# 西安交通大学本科生课程考试试题标准答案与评分标准

课程名称：高等数学上(期中) 课时：______ 考试时间：2017年11月5日

一.（每小题3'） 1. $e^2$. 2. 3. $\frac{1}{3}$. 4. $a=0, b=1$ 5. $a=-1, b=3$

二.（$3'\times 4=12'$） 1. D. 2. C. 3. B. 4. C

三.（$6\times 9'=54'$）

1. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}{x^2}\overset{(3')}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sin x+1-\cos x}{x^2(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}\overset{(6')}{=\!=}\dfrac{3}{4}$ (9')

2. $y'=\dfrac{1}{1+x^2-1}\cdot\dfrac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x-\dfrac{1}{x\sqrt{x^2-1}}-(\ln x)(-\tfrac{1}{2})(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x$ (3') (6')

$=x(\ln x)(x^2-1)^{-\frac{3}{2}}$ (9')

3. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x+e^x\cos x-2x-1}{\sin x}\overset{(3')}{=\!=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2e^x\cos x-2}{\cos x}\overset{(6')}{=\!=}0$ (9')

4. $x\ln y=x+y$ (2') 两边对x求导得：

$\ln y+x\cdot\dfrac{y'}{y}=1+y'$ (6') $\quad dy=\left[\dfrac{y-x}{y(\ln y-1)}\right]^{-1}dx$ (9')

5. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-\sin t}{2t}$ (3') $\quad \left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=-\dfrac{1}{\pi}$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t\cos t-\sin t}{t^2}\cdot\dfrac{1}{2t}$ (7') $\quad \left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\dfrac{2}{\pi^3}$ (9')

6. $y' = 4x^3(12\ln x - 7) + 12x^3$ (3')

$y'' = 12x^2(12\ln x - 7) + 84x^2 = 144x^2\ln x$ (6')

$x>1$ 时 $y''>0$. 上凹. $0<x<1$ 时 $y''<0$. 下凹. (8')

拐点为 $(1, -7)$ (9')

四. 1. $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2} \sin\frac{\pi}{x^2-4}$ 不存在 $x=2$ 为第二类(振荡)间断点 (2')

2. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$. $x=0$ 为第一类(跳跃)间断点 (4')

3. $\lim\limits_{x\to -1} f(x) = \lim\limits_{x\to -1} \frac{x(1+x)}{\cos\frac{\pi}{2}x} = \frac{2}{\pi}$ $x=-1$ 为第一类(可去)间断点 (6')

4. $\lim\limits_{x\to -(2k+1)} f(x) = \infty$. $k\in N_+$. $x=-(2k+1)$ 为第二类(无穷)间断点 (8')

连续区间为 R 除去上述间断点. (10')

五. ① $\because f(-1) = -f(1) = -1$ 令 $F(x) = f(x) - x$ (2')

$F(0)=0$. $F(1)=0$. 据 Rolle Th. $F'(\xi) = f'(\xi) - 1 = 0$. (4')

② $\frac{f(1)-f(0)}{1-0} = f'(\xi_1)$. $\xi_1\in(0,1)$. $\frac{f(-1)-f(0)}{-1-0} = f'(\xi_2)$ $\xi_2\in(-1,0)$

令 $G(x) = e^x[f'(x)-1]$ (6') $x\in[\xi_2, \xi_1]$. 用 Rolle Th 得:

$G'(\eta)=0$. $\eta\in(\xi_2, \xi_1)$. 即. $f''(\eta) + f'(\eta) = 1$ (9')

还可用 $f'(x)$ 为偶函数. 用 $G(x)$ 在 $[-\xi, \xi]$ 上应用 Rolle Th

四. (10 分) 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x(1+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}, & x\le 0\\ \sin\dfrac{\pi}{x^2-4}, & x>0\end{cases}$ 的连续性,并确定其间断点类型

$\boxed{f'(x)\text{是偶函数}}$ ① $\Longrightarrow \exists\,\theta\in(-1,0).\ St.\ f'(\theta)=0$

五 证明题（9 分）.

设奇函数 $f(x)$ 在[-1 1]上具有二阶导数,且 $f(1)=1$,证明

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$,使得 $f'(\xi)=1$.

(2) 存在 $\eta\in(-1,1)$,使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$.

'(1)

① 令 $F(x)=f(x)-1$ ∵ $F(1)=f(1)-1=0$ $f(x)$奇函数 $\Rightarrow f(0)=0\Rightarrow F(0)=0$

$\Rightarrow \exists\,\xi\in(0,1).\ St.\ f'(\xi)=1$

② 方法1 $f(x)$奇函数 $\Rightarrow f'(x)$偶函数.

令 $F(x)=f'(x)+f(x)$

由 L-中值定理, $\exists\,\eta\in(-1,1).\ St.$

$F'(\eta)=\dfrac{F(1)-F(-1)}{1+1}=\dfrac{f'(1)+f(1)-f'(-1)-f(-1)}{2}$

$=f'(\eta)+f(\eta)$

$\Rightarrow f'(\eta)+f(\eta)=1$

② 方法2. 令 $F(x)=e^x f'(x)$. ($\exists\,\theta\in(-1,0)$ $f'(\theta)=0$)

$G(x)=e^x$, 由柯西中值定理可知:

$\exists\,\eta\in(\theta,\xi)\subset(-1,1).\ s.t$

$\dfrac{F(\xi)-F(\theta)}{e^\xi-e^\theta}=\dfrac{F'(\eta)}{e^\eta}$

$\Rightarrow \dfrac{e^\xi f'(\xi)-e^\theta f'(\theta)}{e^\xi-e^\theta}=1=\dfrac{e^\eta f'(\eta)+e^\eta f''(\eta)}{e^\eta}$

$\Rightarrow f'(\eta)+f''(\eta)=1$



$f(-x)=-f(x)\Rightarrow -f'(-x)=-f'(x)\Rightarrow f'(-x)=f'(x)$

$\eta_1 \sim \eta_2$

(题4)

构 $F(x) = e^x[f'(x)-1]$

在 $(0,1)$ $\exists \xi_1 \in (0,1)$ s.t $F'(\xi_1)=0$

$\exists \xi_2 \in (-1,0)$ s.t. $F'(\xi_2)=0$

~~再~~ 由罗尔定理知 $\exists \eta \in (\xi_2\ \xi_1)$

s.t $F'(\xi_2)=0$ 代入即可

题3. 构 $F(x) = f'(x)+f(x)-x$

$F(1) = f'(1) + \overset{=1}{f(1)} - 1 = f'(1)$

$F(-1) = f'(-1) + \overset{=-1}{f(-1)} + 1 = f'(-1) = f'(1)$

由罗尔定理 可知 $\exists \eta \in (-1,1)$ s.t

$F'(\eta)=0$

即 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$