2019版

南卷汇

大一上高数期末试题汇总

南洋书院学生会制作

目录

2018 年高数（上）期末

一、单项选择题(每小题 3 分，共 15 分)

1.若 $\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3+bx^2+2}{x^2+2}=1$（其中 a，b 为常数），则（　　）

（A）$a=0,\ b\in R$　　　　（B）$a=0,\ b=1$

（C）$a\in R,\ b=1$　　　　（D）$a\in R,\ b\in R$

2.若函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上皆可导，且 $f(x)<g(x)$，则必有（　　）

（A）$f(-x)>g(-x)$　　　　（B）$f'(x)<g'(x)$

（C）$\lim_{x\to x_0}f(x)<\lim_{x\to x_0}g(x)$　　　　（D）$\int_0^x f(t)dt<\int_0^x g(t)dt$

3.若函数 $f(x)$ 的一个原函数是 $(x-2)e^x$，则 $f'(x+1)=$（　　）

（A）xe^x；　（B）xe^{x+1}；　（C）$(x+1)e^{x+1}$；　（D）$(x+1)e^x$

4.下列广义积分中，发散的是（　　）

（A）$\int_0^1 \ln x dx$；　（B）$\int_2^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$；　（C）$\int_0^{+\infty}e^{-x}dx$；　（D）$\int_{-1}^1\frac{dx}{x\cos x}$

5.设 $f(t)=\begin{cases}\sin\frac{1}{t}, t\neq 0\\ 0, t=0\end{cases}$，$F(x)=\int_0^x f(t)dt$，则 $F(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

（A）不连续；　　　　（B）连续但不可导；

（C）可导且 $F'(x)\neq 0$　　　　（D）可导且 $F'(0)=0$

二、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1.已知函数 $y=f(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=\frac{t}{1+t^2}\\ y=\frac{t^2}{1+t}\end{cases}$ 所确定，则曲线 $y=f(x)$ 在 $t=2$ 处的切线方程为________

2.设 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数，则定积分 $\int_0^{2018}(x-[x])dx$ 的值是_______3.已

知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^{x}-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二姐非齐次线性微分方程的 3 个解，

则该方程的通解是 $y=$ ________

4.极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}(\sin\frac{1}{n}+2\sin\frac{2}{n}+3\sin\frac{3}{n}+\cdots+n\sin\frac{n}{n})=$________

5.设 $f(x)=(x-1)\ln(2-x)\quad(x<2)$，则 $f(x)$ 的最大值点是 $x=$________

三、计算积分（每小题 5 分，共 15 分）

1.计算积分 $\int\frac{1}{\sin^2x+9\cos^2x}dx$.

2.计算积分 $\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$.

3.计算积分 $\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$.

四、解答题（本题 8 分）

求微分方程 $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{3}y+\frac{1}{3}(x-3)y^4=0$ 的通解.

五、解答题（本题 10 分）

求微分方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix} & & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}\vec{x}$ 的通解.

六、应用题（本题 10 分）

求曲线 $y=3(1-x^2)$ 与 x 轴围成的封闭图形绕直线 $y=3$ 旋转一周所得的旋转体的

七、解答题（本题 9 分）

对 t 取不同的值，讨论函数 $f(x)=\dfrac{1+2x}{2+x^2}$ 在区间 $[t,+\infty)$ 上是否有最大值或者最小值？若存在最大值或最小值，则求出相应的最大值和最大值点，或者最小值和最小值点。

八、证明题（本题 9 分）

设 $f'(x)$ 是连续函数，$F(x)=\int_0^x f(t)\,f'(2a-t)\,dt$，证明：

$$F(2a)-2F(a)=f^2(a)-f(0)f(2a)$$

九、证明题（本题 9 分）

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0,1]$ 上具有连续导数，且 $f(0)=f(1)=0$，求证：

（1）$\forall t\in R,\int_0^1 xf(x)\,dx=-\dfrac{1}{2}\int_0^1(x^2-t)f'(x)\,dx$；

（2）$(\int_0^1 xf(x)\,dx)^2\le\dfrac{1}{45}\int_0^1(f'(x))^2\,dx$，

等号当且仅当 $f(x)=A(x^3-x)$ 时成立，其中 A 为常数.

答案

一、 单选

1.B　2.C　3.C　3.C　4.D　5.D

二、填空

1. $y-\frac{4}{5}=-\frac{4}{3}(x-\frac{2}{5})$　2.1009　3. $y=C_1e^x+C_2e^{3x}-xe^{2x}$

4. $\sin 1-\cos 1$　5. $x=1$

三、

1.原式= $\int\frac{1}{\tan^2 x+9}d(\tan x)=\frac{1}{3}\arctan(\frac{\tan x}{3})+C$

2.

$$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 2\sqrt{x}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=-4\sqrt{x}\ln(x+1)\Big|_0^1+\int_0^1\frac{4\sqrt{x}}{x+1}dx=8-2\pi-4\ln 2$$

3.原式=

$$\int_0^1\frac{f(x)}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1 2\sqrt{x}\frac{\ln(1+x)}{x}dx=-4\sqrt{x}\ln(x+1)\Big|_0^1+\int_0^1\frac{4\sqrt{x}}{x+1}dx=8-2\pi-4\ln 2$$

四、

$y'+\frac{1}{3}=-(x-3)y^4$　　$(y^{-3})'-y^{-3}=x-3$

$y^{-3}=e^{\int dx}(\int(x-3)e^{-\int dx}dx+C)=Ce^x-(x+2)$

五、

$|\lambda I-A|=\lambda^2(\lambda-1)$　　$A^2=\begin{pmatrix}3&1&-3\\3&1&-3\\3&1&-3\end{pmatrix}$

$$A^2x=0 \qquad \bar{r}_0^{(1)}=\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix} \qquad \bar{r}_0^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \qquad (I-A)x=0$$

$$\bar{r}_1^{(1)}=\begin{pmatrix}2\\6\\4\end{pmatrix} \qquad \bar{r}_1^{(2)}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\-2\end{pmatrix} \qquad \bar{r}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

通解有： $C_1\begin{pmatrix}-1+2t\\3+6t\\4t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1-t\\-3t\\1-2t\end{pmatrix}+C_3e^t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

六、

原式 $=18\pi-\int_{-1}^{1}\pi\left[3-3(1-x^2)\right]^2dx=18\pi-9\pi\int_{-1}^{1}x^4dx=18\pi-\frac{18}{5}\pi$

七、

$$f'(x)=\frac{2(x+2)(1-x)}{(2+x^2)^2}$$

驻点 $x_1=-2 \quad x_2=1$

（1） 当 $t\le-2$ 时 $m(t)=f(-2)=-\frac{1}{2} \quad m(t)=f(1)=1$

（2） 当 $-2\le t\le-\frac{1}{2} \quad m(t)=f(t) \quad m(t)=f(1)=1$

（3） 当 $-\frac{1}{2}\le t\le1$ 无 $m(t) \quad m(t)=f(1)=1$

（4） 当 $t>1$ 无 $m(t) \quad m(t)=f(t)$

八、

$$\int_a^{2a}f(2a-t)f'(t)dt=-f(t)f(2a-t)\Big|_a^{2a}+\int_a^{2a}f(2a-t)f'(t)dt=f^2(a)-f(0)f(2a)+\int_a^{2a}f(2a-t)f'(t)dt$$

$\int_a^{2a}f(2a-t)f'(t)dt=-\int_a^{0}f(u)f'(2a-u)du=\int_0^{a}f(u)f'(2a-u)du$ 其中 $u=2a-t$

九、

（1）$\forall x \in R$ $\forall x \in R\int_0^1 xf(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1 f(x)d(x^2-t)=-\frac{1}{2}\int_0^1(x^2-t)f'(x)dx$

（2）$(\int_0^1 xf(x)dx)^2 \le \frac{1}{4}\int_0^1(t-x^2)^2dx\cdot\int_0^1[f'(x)]^2dx$

由于$\int_0^1(t-x^2)^2dx=t^2-\frac{2}{3}+\frac{1}{5}=(t-\frac{1}{3})^2+\frac{4}{45}\ge\frac{4}{45}$

$\therefore(\int_0^1 xf(x)dx)^2\le\frac{1}{45}\int_0^1[f'(x)]^2dx$

高等数学 I/II（A）卷 2017 年 01 月 06 日

一、计算下列各题（每题 6 分，共 60 分）.

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\ln(1+\tan x)}{\sin^2 x}$.

2、设 $f(x)=\dfrac{x(x+1)}{|x|(x^2-1)}$，试讨论函数 $f(x)$ 的间断点及类型.

3、设 $f(x)=\begin{cases}x, x<0\\ 2^x, x\ge 0\end{cases}$，求导函数 $f'(x)$.

4、设函数 $y=y(x)$ 由方程 $\arctan\dfrac{x}{y}=\ln\sqrt{x^2+y^2}$ 所确定，求 dy.

5、求不定积分 $\int\sqrt{e^x+1}dx$.

6、设 $f(x)=\int_0^x e^{-t}\cos t dt$，试求 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上的最大值点.

7、求由曲线 $x^2+(y-5)^2=16$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转所产生的旋转体的体积.

8、判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^n\sin\dfrac{\pi}{2^n}(a>0)$ 的敛散性 .

9、将函数 $f(x)=x$ 在 $[0,\pi]$ 上展成余弦级数.

10、求微分方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}=1+(\dfrac{dy}{dx})^2$ 的通解.

二、（8 分）设函数 $f(x)$ 具有连续的一阶导数，且满足

$f(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f'(t)dt+x^2$，求 $f(x)$ 的表示式.

三、（8 分）函数 $f(x)$ 在点 $x=a$ 的某邻域 $U(a)$ 内有定义，且

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}=l$（$l>0$，$k$ 为正整数），试讨论函数 $f(x)$ 在点 $x=a$

处是否取得极值.

四、（9 分）（学习工科分析基础的同学做 2 小题，其余同学做 1

小题）.

1、求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2+1}{3^n n!}x^n$的收敛域及和函数$S(x)$.

2、判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{1+n^{\frac{3}{2}}}$的一致收敛性.

五、（9 分）已知曲线L的方程为$\begin{cases}x=t^2+1\\ y=4t-t^2\end{cases}(t\ge 0)$，

（1）讨论曲线L的凹凸性；

（2）过点$(-1,0)$引曲线L的切线，求切点坐标(x_0,y_0)，并求切线的方程；

（3）求此切线与曲线L（对应于$x<x_0$的部分）及x轴所围成的平面图形的面积S.

六、（6 分）设函数$f(x)$在闭区间$[0,1]$上满足：$|f''(x)|\le M$，且在$(0,1)$内$f(x)$取得最大值，试证：$|f'(0)|+|f'(1)|\le M$.

高等数学 I/II（A）卷 2017 年 01 月 06 日 答案

一、1、解：

$$原极限=\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(1+\tan x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{\sec^2 x}{1+\tan x}}{2x}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-\sin x}{\cos x(\cos x+\sin x)}=\frac{1}{2}$$

2、解：

$$f(x)=\frac{x}{|x|}\bullet\frac{x+1}{x+1}\bullet\frac{1}{x-1},\ f(x)在x=-1,\ x=0,\ x=1处无定义，$$

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\frac{1}{2},故x=-1为第一类（可去型）间断点；$$

$$\lim_{x\to -1}f(x)=\infty，故x=1为第二类（无穷型）间断点；$$

$$f(0^-)\neq f(0^+),故x=0为第一类（跳跃型）间断点.$$

3、解：

$$当x<0时，f'(x)=1;当x>0时，f'(x)=\ln 2\bullet 2^x;$$

$$在x=0处，f(0^-)=\lim_{x\to 0^-}x=0,\ f(0^+)=\lim_{x\to 0^+}2^x=1,\ f(0^-)\neq f(0^+),$$

$$f(x)在x=0处不连续，因此在x=0处不可导.$$

$$故\ f'(x)=\begin{cases}1, x<0\\ \ln 2\bullet 2^x, x>0\end{cases}.$$

4、解：

$$\frac{1}{1+(\frac{x}{y})^2}\bullet\frac{y-xy'}{y^2}=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\bullet\frac{x+yy'}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$y'=\frac{y-x}{y+x},dy=\frac{y-x}{y+x}dx.$$

5、解：

$$令t=\sqrt{e^x+1},则x=\ln(t^2-1),dx=\frac{2t}{t^2-1}dt,$$

$$\int\sqrt{e^x+1}dx=\int t\bullet\frac{2t}{t^2-1}dt=2\int(1+\frac{1}{t^2-1})dt=2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=2\sqrt{e^x+1}+\ln\left|\frac{\sqrt{e^x+1}-1}{\sqrt{e^x+1}+1}\right|+C$$

6、解：

$f'(x)=e^{-x}\cos x, x\in[0,\pi]$,令$f'(x)=0$得驻点$x=\dfrac{\pi}{2}\in(0,\pi)$.

又当$x\in[0,\pi)$时，$f'(x)>0$;当$x\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$时，$f'(x)<0$,

故$x=\dfrac{\pi}{2}$是极大值点，也是最大值点.

7、解：

由$x^2+(y-5)^2=16$解得$y=5+\sqrt{16-x^2}$,及$y=5-\sqrt{16-x^2}$.

所求旋转体的体积：

$$V=\pi\int_{-4}^{4}(5+\sqrt{16-x^2})^2dx-\pi\int_{-4}^{4}(5-\sqrt{16-x^2})^2dx=20\pi\int_{-4}^{4}\sqrt{16-x^2}dx=20\pi\frac{\pi\cdot 4^2}{2}=160\pi^2$$

8、解：

因$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^n\sin\frac{\pi}{2^n}}{a^n\frac{\pi}{2^n}}=1$,

等比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{2}{a})^n$,当$\left|\dfrac{2}{a}\right|<1$,即$0<x<2$时收敛；当$\left|\dfrac{2}{a}\right|>1$,即$a\geq 2$时发散.

用正项级数的比较审敛法知：

原级数当$0<x<2$时收敛；当$a\geq 2$时发散.

9、解：

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\left[\frac{x\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]\Bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{\pi n^2}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}-\dfrac{4}{\pi n^2},, n=1,3,5,\Lambda\\ 0, n=2,4,6,\Lambda\end{cases},$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}(0\leq x\leq\pi)$$

10、解：

令$\dfrac{dy}{dx}=p$,则$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{dp}{dx}$,

原方程化为$\dfrac{dp}{dx}=1+p^2$,$\displaystyle\int\frac{dp}{1+p^2}=\int dx$,

$\arctan p=x+C_1$,$\dfrac{dy}{dx}=p=\tan(x+C_1)$,

通解为：$y=\int\tan(x+C_1)dx$,

即：$y=-\ln\left|\cos(x+C_1)\right|+C_2$.

二、解：

易得$f(0)=0$.

$f(x)=x^2\int_0^x f'(t)dt-\int_0^x t^2 f'(t)dt+x^2=x^2\cdot f(t)\Big|_{t=0}^{t=x}-t^2 f(t)\Big|_0^x+2\int_0^x tf(t)dt+x^2$

得$f(x)=2\int_0^x tf(t)dt+x^2$,求导得：$f'(x)-2xf(x)=2x$,

通解：$f(x)=e^{\int 2xdx}\left[\int 2xe^{-\int 2xdx}dx+C\right]=e^{x^2}\left[\int 2xe^{-x^2}dx+C\right]=e^{x^2}\left[-e^{-x^2}+C\right]=-1+Ce^{x^2}$,

由$f(0)=0$得$C=1$,故所求函数表达式为$f(x)=e^{x^2}-1$.

三、解：

由条件$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}=l>0$,根据极限的保号性定理，

$\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^k}>0, x\in \overset{0}{U}(a)$,

当k为偶数时，由$(x-a)^k>0$知，

$f(x)-f(a)>0$,即$f(x)>f(a), x\in \overset{0}{U}(a)$,

即当k为偶数时，$f(x)$在点$x=a$处取得最小值.

当k为奇数时，当$x<0$时$(x-a)^k<0$,

$f(x)-f(a)<0$,即$f(x)<f(a)$.

当$x>a$时,$(x-a)^k>0$，$f(x)-f(a)>0$，即$f(x)>f(a)$,

故当k为奇数时，$f(a)$不是极值.

四、解：

1、收敛半径：$R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{3^n\cdot n!}\bullet\dfrac{3^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^2+1}=+\infty$,收敛域为（$-\infty$, $+\infty$），

和函数：$S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{3^n\cdot n!}x^n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n\cdot(n-1)!}x^n+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!}(\dfrac{x}{3})^n=S_1(x)+e^{\frac{x}{3}}$,

其中$S_1(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n\cdot(n-1)!}x^n=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n\cdot(n-1)!}x^{n-1}=x\left[\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n\cdot(n-1)!}x^n\right]'=x(\dfrac{x}{3}e^{\frac{x}{3}})'=\dfrac{x}{3}(e^{\frac{x}{3}}\cdot\dfrac{3+x}{3})$,

故$S(x)=e^{\frac{x}{3}}\left[\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{x}{3}+1\right], x\in(-\infty,+\infty)$.

2、$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,$\left|\dfrac{cosnx}{1+n^{\frac{3}{2}}}\right|\le\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$,而$p$级数:$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$收敛$(p>\dfrac{3}{2}>1)$,

根据$Weierstrass$判别准则，原级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{cosnx}{1+n^{\frac{3}{2}}}$在$(-\infty,+\infty)$上一致连续.

五、解：

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{y_t}{x_t}=\frac{2}{t}-1,$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(\frac{2}{t}-1)_t'}{x_t}=\frac{-1}{t^3},$

当$t>0$时，$\frac{d^2y}{dx^2}<0$，故曲线L是凸的.

(2)曲线L的直角坐标方程为$y=4\sqrt{x-1}-(x-1)$.

当x_0=1时，L在对应点处切线方程为：$x=1$，不合题意.

可设L在点(x_0,y_0)处切线方程为$y-y_0=(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1)(x-x_0)$，

将$x=-1,y=0$代入上式得$-y_0=(\frac{2}{\sqrt{x_0-1}}-1)(-1-x_0)$，

$(x_0-1)+\sqrt{x_0-1}-2=0,$

即（$\sqrt{x_0-1}-2$）（$\sqrt{x_0-1}-1$）=0,

解得$x_0=2,y_0=3$，所求切点为$(2,3)$，切线方程为：$y=x+1$.

（3）令$y=0$得L与x轴交点:$(1,0),(17,0)$.所求面积：

$$S=\int_{-1}^{2}(x+1)dx-\int_{1}^{2}[4\sqrt{x-1}-(x-1)]dx=\frac{7}{3}.$$

六、解：

证：因可导函数$f(x)$在（0,1）内取得最大值，由费马定理，在最大值点$a\in(0,1)$处，$f'(a)=0$.

对$f'(x)$在$[0,a],[a,1]$上使用拉格朗日中值定理，存在

$\xi_1\in(0,a),\xi_2\in(a,1)$，使得

$f'(a)-f'(0)=f''(\xi_1)a,\ f'(1)-f'(a)=f''(\xi_2)(1-a),$

故$|f'(0)|+|f'(1)|=|f'(a)-f'(0)|+|f'(1)-f'(a)|=|f''(\xi_1)|a+|f''(\xi_2)|(1-a)\le Ma+M(1-a)=M.$

2016 年高数（上）期末

一、 填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^3}\int_0^x \sin t^2 dt, x\neq 0\\ a, x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则 a=________.

2. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $x\ln x$，则 $f'(x)=$________.

3. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^4}=2$，则 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处取得极____值.

4. 定积分 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\dfrac{\sin x}{1+x^4}+\cos^3 x)dx=$____________.

5. 微分方程 $x(1+y^2)dx-y(1+x^2)dy=0$ 的通解为______________.

6. 设函数 $f(x)=\begin{cases}x+1, -\pi\le x<0\\ x^2, 0\le x<\pi\end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的 Fourier 级数的和函数为

$S(x)$，则 $S(-\pi)=$___________.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 12 分）

1. 下列结果中不成立的是（）

A. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos x}{x-\frac{\pi}{2}}=1$　B. $\lim\limits_{x\to\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=1$　C. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$　D. $\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$

2. 设 $y=f(x)$ 满足 $f'(x)>0, f''(x)>0$，Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量，Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分，若 $\Delta x>0$，则（）

A. $0<dy<\Delta y$　B. $0<\Delta y<dy$　C. $\Delta y<dy<0$　D. $dy<\Delta y<0$

3. 设函数 $f(x)$ 连续，则下列函数中，必为偶函数的是（）

A. $\int_0^x t[f(t)-f(-t)]dt$　　B. $\int_0^x t[f(t)+f(-t)]dt$

C. $\int_0^x f(t^2)dt$　　D. $\int_0^x f^2(t)dt$

4. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散 $(b_n\neq 0)$，则下列级数中一定发散的是（）

A. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{b_n}$ B. $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ C. $\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)$ D. $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n{}^2+b_n{}^2)$

二、基本计算题（每小题 6 分，共 36 分）

1. 求极限 $l=\lim_{x\to\infty}(x+e^x)^{\frac{1}{x}}$.

2. 设 $y=y(x)$ 由参数方程 $\begin{cases}x=1-t^2, \\ y=t-t^3\end{cases}$ 确定，求 $\frac{dy}{dx},\frac{d^2y}{dx^2}$.

3. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-xe^y$ 确定，求曲线 $y=y(x)$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

4. 计算反常积分 $I=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx$.

5. 求函数 $f(x)=\frac{x\ln|x|}{|x-1|}$ 的间断点，并说明间断点的类型.

6. 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 在 $x_0=2$ 处展开为幂级数，并指出收敛区间.

四、综合题（每小题 8 分，共 24 分）

1. 设 $f(x)$ 满足 $\int_0^x f(t-x)dt=-\dfrac{x^2}{2}+e^{-x}-1$，求曲线 $y=f(x)$ 的斜渐近线.

2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 的和函数，并求数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)2^n}{n!}$ 的和.

3. 已知 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续且满足 $xf'(x)=f(x)+3x^2$，求 $f(x)$，使由曲线 $y=f(x)$ 与 $x=0,x=1,y=0$ 所围的平面图形绕 x 轴旋转一周所得的旋转体体积最小.

五、证明题（每小题 5 分，共 10 分）

1. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上具有单调减少的导函数 $f'(x)$， $f(0)=0$，证明：对于满足不等式 $0<a<b<a+b<c$ 的 a, b, 有 $f(a)+f(b)\geq f(a+b)$.

下列两题中：学习“高等数学基础”（即校内高数 II 层次）的学生要求只做 2 题，学习“I 工科数学分析基础”（即校内高数 I 层次）的学生要求只做 3 题.

2. 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的某领域 $N(0,r)$ 内具有二阶连续导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，证明：级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(\dfrac{1}{n})$ 绝对收敛.

3. 证明：函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^2e^{-nx}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

2016 高数上期末答案

一、填空题

1. 0　　2. $\frac{1}{x}$　　3. 小　　4. $\frac{4}{3}$　　5. $(1+y^2)=C(1-x^2)$

二、选择题

1. A　　2. A　　3. B

三、基本计算题

1. 原式$=\lim\limits_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(x+e^x)}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(x+e^x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+e^x}{x+e^x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+e^x}}=e$

2. $\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{1-3t^2}{-2t}$　又 $\ddot{y}=-6t,\ddot{x}=-2$

$$\frac{d^2y}{d^2x}=\frac{\ddot{y}\cdot\dot{x}-\ddot{x}\cdot\dot{y}}{\dot{x}^3}=-\frac{1+3t^2}{1+4t^3}$$

3. $y'=e^y-xe^y\cdot y'\Rightarrow y'=-\frac{e^y}{xe^y+1}$

当$x=0$，$y=1$代入上式得$y'=-e$

$\therefore$ 切线方程为$y=1-ex$

4. $I=\int_2^{+\infty}\frac{1}{x\sqrt{x-1}}dx\overset{x=\sec^2 t}{\Rightarrow}\int\frac{1}{\sec^2 t\cdot\tan t}d\sec^2 t=\int 2dt=\lim\limits_{b\to+\infty}2\arccos\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_2^b=\frac{\pi}{2}$

5. 易知

$x=0,x=1$是$f(x)$的间断点

$$\lim_{x\to1^+}f(x)=\lim_{x\to1^+}\frac{x\ln x}{x-1}\overset{t=x-1}{\Longrightarrow}\lim_{t\to0^+}\frac{(t+1)\ln(t+1)}{t}=\lim_{t\to0^+}\frac{t(t+1)}{t}=1$$

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\lim_{x\to1^-}\frac{x\ln x}{1-x}\overset{\text{同理得}}{\Longrightarrow}-1$$

$\therefore x=1$是跳跃间断点

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x\ln x}{1-x}=\lim_{x\to0^+}x\ln x=\lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=0$$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)$[同上]=0

所以 x=0 是可去间断点

四、综合题

1. $\int_0^\pi f(t-x)dt \overset{u=t-x}{\Longrightarrow} \int_{-x}^0 f(u)du$

对两边求导得有 $f(x)=x-e^x$

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x-e^x}{x}=1$$

$$b=\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}-e^x=0$$

$\therefore y=x$

3.

由$xf'(x)=f(x)+3x^2$得$\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=3x$

$y=3x^2+Cx$

$V=\int_0^1\pi y^2dx=\int_0^1\pi(3x^2+Cx)^2dx$

$=\pi(\frac{9}{5}+\frac{3}{2}C+\frac{C^2}{3})$

设$g(x)=\frac{9}{5}+\frac{3}{2}C+\frac{C^2}{3}$

则$g'(x)=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}C=0\Rightarrow C=\frac{9}{4}$

此时$g''(x)=\frac{2}{3}>0$

$\therefore y=3x^2-\frac{9}{4}x$时，$V$最小

五、证明题

要证 $f(a)+f(b)\ge f(a+b)$ ，只要证

$f(a+b)-f(a)\geq f(b)-f(0)$

又$f(a+b)-f(a)=bf'(\varphi_1)\qquad(\varphi_1\in(a,a+b))$

$f(b)-f(0)=bf'(\varphi_2)\qquad(\varphi_2\in(0,b))$

$\because \varphi_1>\varphi_2$

$\therefore f'(\varphi_1)\leq f'(\varphi_2)$

故$f(a+b)-f(a)\leq f(b)-f(0)$

得证

2015 年高数（上）期末

一、填空题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1. 计算 $\int_{-\pi/2}^{\pi/2}(\ln\frac{2-x}{2+x}+\cos^2 x)dx=$______________.

2. 设函数 $y=x2^x$ 在 $x=x_0$ 点处取得极小值，则 $x_0=$_____.

3. 计算极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\frac{\sqrt{2}}{n\sqrt{n+\frac{1}{2}}}+\ldots+\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n+\frac{1}{n}}}\right]=$______________.

4. 设函数 $y=y(x)$ 满足方程 $\int_0^x xydx=x^2+y$，则 $y(x)=$__________.

5，设函数 $y=\varphi(x)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上有连续的二阶导数，$\varphi(0)=b$，$a>0$ 且 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处取得极大值 $\varphi(a)=0$，则积分 $\int_0^a x\varphi''(x)dx=$_____________.

二、单项选择题（每小题 3 分，共 5 小题，满分 15 分）

1. 设函数 $f(x)$ 连续，$F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数，则

（A）当 $f(x)$ 为奇函数时，$F(x)$ 必为偶函数.

（B）当 $f(x)$ 为偶函数时，$F(x)$ 必为奇函数.

（C）当 $f(x)$ 为周期函数时，$F(x)$ 必为周期函数.

（D）当 $f(x)$ 为单调递增函数时，$F(x)$ 必为单调递增函数.

2. 曲线 $y=(x-1)^4(x-2)^3(x-3)^2(x-4)$ 的拐点是

（A）$(1,0)$　　（B）$(2,0)$　　（C）$(3,0)$　　（D）$(4,0)$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 有连续导数，且 $f(0)=0$，令 $M=\max\limits_{x\in[0,1]}|f'(x)|$，则必有

（A）$M\le\int_0^1|f(x)|dx\le 3M$　　（B）$\frac{M}{2}\le\int_0^1|f(x)|dx\le M$

（C）$\int_0^1|f(x)|dx\le\frac{M}{2}$　　（D）$\int_0^1|f(x)|dx\ge 3M$

4. 设 $f(x)$ 是以 T 为周期的函数，下列函数中以 T 为周期的函数是

（A） $\int_0^x f(t)dt$ （B） $\int_0^x f(t)dt-\int_{-x}^0 f(t)dt$

（C） $\int_{-x}^0 f(t)dt$ （D） $\int_0^x f(t)dt+\int_{-x}^0 f(t)dt$

5. 设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)dt$，则 $f'(x)$ 的零点个数为

（A） 0 （B） 2 （C） 1 （D） 4

三、简答题（每小题 7 分，共 14 分）

1. 求曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)$ 的渐近线.

2. 求解初值问题 $\begin{cases} y''-e^{2y}=0 \\ y|_{x=0}=0, y'|_{x=0}=1 \end{cases}$.

四、（9 分）设函数 $F(x)=\int_0^{x^2} e^{-t^2}dt$，试求

（1）$F(x)$ 的极值；

（2）曲线 $y=F(x)$ 的拐点的横坐标；

（3）计算 $\int_{-2}^{3} y=F'(x)dx$.

五、（8 分）过曲线 $y=\sqrt[3]{x}(x\geq 0)$ 上点 A 作切线，使该切线与曲线 $y=\sqrt[3]{x}$ 及 x 轴所围平面图形 D 的面积 $S=3/4$.

（1）求点 A 的坐标；

（2）求平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积.

六、（7 分）设 a，b 均为常数且 $a>-2$，$a\neq 0$，问 a，b 为何值时，有

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]dx=\int_0^1\ln(1-x^2)dx$$

七、（8 分）判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n!(\frac{x}{n})^n,(x>0)$ 的敛散性

八、（8 分）将 $f(x)=\frac{2}{\pi}|x|$ 在 $|x|\leq\pi$ 上展开为 Fourier 级数.

九、（8 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n$的收敛域及和函数.

十、（8 分）（学习《工科数学分析基础》者做（1），其余的做（2））

（1）证明函数项级数$\sum_{n=1}^{\infty}e^{-nx}$，在区间$[\delta,+\infty)(\delta>0)$一致收敛。但在$(0,+\infty)$内不一致收敛.

（2）将函数$f(x)=\frac{x+4}{2x^2-5x-3}$在$x_0=1$处展开为幂级数.

2015 年高数（上）期末答案

一、填空题（每小题 2 分，共 5 小题，满分 10 分）

1. $\frac{\pi}{2}$

2. $-\frac{1}{\ln 2}$

3. $\frac{2}{3}$

4. $2-2e^{\frac{1}{2}x^2}$

5. b

二、选择题(每小题 2 分，共 5 小题，满分 10 分) ABCBC

三、简答题

1.（8 分）解：$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)\right]=\infty$ 可得 $x=0$ 为垂直渐近线 －2 分

$$a_1=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(e^{-x}+1)}{x}x\right]=0，\quad b_1=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln\left(e^{-x}+1\right)\right]=0 \quad \text{--4 分}$$

故 $y=0$ 为水平渐近线 --5 分

$$a_2=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x^2}+\frac{\ln(e^{-x}+1)}{x}\right]=-1，$$

$$b_2=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}+\ln(e^{-x}+1)+x\right]=0 \quad \text{--7 分}$$

故 $y=-x$ 为一般渐近线 －8 分

2.（8 分）设 $y'=u$，则 $y''=u\frac{du}{dy}$ --2 分

则原式化为 $u\dfrac{du}{dy}=e^{2y}$ --4 分

积分有 $y'^2=e^{2y}+c_1$ --6 分

由初始条件 $c_1=0$，故 $y'=e^y$，$\therefore e^{-y}dy=dx$，从而 $e^{-y}=c_2-x$，再由初始条件 $c_2=1$，$\therefore$ 初值问题的解为 $y=-\ln(1-x)$ --8 分

四、（10 分）解：（1）$F'(x)=e^{-(x^2)^2}\cdot 2x=2xe^{-x^4}$，

$F''(x)=2(1-4x^4)e^{-x^4}$ 令 $F'(x)=0$，得驻点 $x=0$，又 $F''(0)=2>0$，故 $x=0$ 是 $F(x)$ 的极小值点，其极小值为 $F(0)=0$ --4 分

（2）令 $f''(x)=0$，得 $x_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$x_2=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，又

当 $-\infty<x<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$F''(x)<0$，当 $-\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$F''(x)>0$；当 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}<x<\infty$ 时，$F''(x)<0$. 所以曲线 $y=F(x)$ 的拐点有两个，其横坐标分别为 $x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 和 $x=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. －7 分

（3）$\int_{-2}^{3}x^2F(x)dx=2\int_{-2}^{3}x^3e^{-x^4}dx=-\dfrac{1}{2}e^{-x^4}\Big|_{-2}^{3}=\dfrac{1}{2}(e^{-16}-e^{-81})$ --10 分

五、（10 分）（1）设 A 点的坐标为 $(t,\sqrt[3]{t})$，则切线方程为 $y-\sqrt[3]{t}=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{t^2}}(x-t)$，

即 $y=\dfrac{x}{3\sqrt[3]{t^2}}+\dfrac{2}{3}\sqrt[3]{t}$ --3 分

命：$y=0$，得此切线与 x 轴的交点横坐标 $x_0=-2t$，从而图形 D 的面积为

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2t\cdot\frac{2\sqrt[3]{t}}{3}+\int_0^1\left(\frac{x}{3\sqrt[3]{t^2}}+\frac{2}{3}\sqrt[3]{t}-\sqrt[3]{x}\right)dx=\frac{2t\cdot\sqrt[3]{t}}{3}+\frac{x^2}{6\sqrt[3]{t^2}}\Big|_0^5+\frac{2}{3}\sqrt[3]{t}x\Big|_0^t-\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\Big|_0^t=\frac{3t\cdot\sqrt[3]{t}}{4}=\frac{3}{4}$$

$\Rightarrow t=1$。即 A 点的坐标为 $(1,1)$ --（6 分）

（2）平面图形 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为：

$$V=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot 2+\pi\int_0^1\left\{\left[\frac{1}{3}(x+2)\right]^2-\left(\sqrt[3]{x}\right)^2\right\}dx=\frac{8}{27}\pi+\pi\left[\frac{1}{27}(x+2)^3-\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}\right]\Bigg|_0^1=\pi-\frac{3}{5}\pi=\frac{2}{5}\pi$$

--10 分

六、（7 分）

$$\int_0^1\ln(1-x^2)dx=\int_0^1\ln(1+x)dx+\int_0^1\ln(1-x)dx$$

$$=(1+x)\ln(1+x)\Big|_0^1-x\Big|_0^1-(1-x)\ln(1-x)\Big|_0^1-x\Big|_0^1=2(\ln 2)-1$$

--3 分

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]dx=\int_1^{+\infty}\frac{(b-a)x+a}{x(2x+a)}dx=\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x}-\frac{2-b+a}{2x+a}\right)dx$$

--6 分

$$=\lim_{B\to+\infty}\ln\frac{x}{(2x+a)^{1-\frac{1}{2}(b-a)}}\Bigg|_1^B$$

因为极限存在，故必有 $b-a=0$，即 $b=a$，所以有

$$\int_1^{+\infty}\left[\frac{2x^2+bx+a}{x(2x+a)}-1\right]dx=\ln\frac{1}{2}-\ln\frac{1}{2+a}=\ln\frac{2+a}{2}$$

由题意得 $2(\ln 2-1)=\ln\dfrac{2+a}{2}$，

即 $b=a=8e^{-2}-2$ --7 分

七、（9 分）$\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+1)\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{n\left(\frac{x}{n}\right)^n}=\dfrac{x}{e}$ --4 分

当 $x<e$ 时收敛， --5 分 $x>e$ 时发散， --6 分

当 $x=e$ 时，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{x}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\geq 1$，$a_n\to \backslash 0(n\to\infty)$，发散， --9 分

八、（9 分）$f(x)$ 为偶数，$bn=0$ --2 分 $a_0=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=2$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi^2}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{4\left[(-1)^n-1\right]}{n^2\pi^2}$$ --6 分

$$=\begin{cases}0,n=2k\\ \dfrac{-8}{\pi^2(2k-1)^2},n=2k-1\end{cases}$$ --7 分

$$f(x)=1-\frac{-8}{\pi^2}\sum\frac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x,$$ --9 分

九、（10 分）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$，收敛域为 $x\in(-1,1)$ --2 分

$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}$，$T(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ --4 分 $\int_0^x S(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{x}{1-x}$ --6 分

$T'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$， --8 分 $T(x)=-\ln(1-x)$

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n}x^n=\frac{x}{(1-x)^2}-\ln(1-x)$ --10 分

十、（9 分）$f(x)=\frac{x+4}{(2x+1)(x-3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{2x+1}$ --3 分

$$=\frac{1}{-2+(x-1)}-\frac{1}{2(x-1)+3}=\frac{1}{-2}\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2(x-1)}{3}}$$ --6 分

$$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}\left[-\frac{2(x-1)}{3}\right]^n$$ --8 分

$$f(x)=-\sum_{n=0}\frac{1}{2^{n+!}}(x-1)^n-\sum_{n=0}(-1)^n\frac{2^n}{3^{n+1}}(x-1)^n,\quad |x-1|<\frac{3}{2}$$ --9 分

2014 年高数（上）期末

一、计算下列各题（每题 6 分，共 60 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

2. 已知$\int_1^{\cos x} f(t)dt=\cos 2x$，其中$f(t)$连续，求$f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})$。

3. $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}(|x|<1)$，求$\mathrm{dy}$。

4. 求不定积分$\int\dfrac{\mathrm{dx}}{\sqrt{e^x-1}}$。

5. 求定积分$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{x}^2}}{x^2}dx$。

6. 求微分方程$(1+y)dx+(x+y^2+y^3)dy=0$的通解。

7. 判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\lambda-e)^2\lambda^n n!}{n^n}(\lambda\geq 0)$的敛散性。

8. 设$f(x)=\begin{cases}0,-2\leq x\leq 0\\ x,\ 0<x<2\end{cases}$，将$f(x)$展为以 4 为周期的 Fourier 级数。

9. 将函数$f(x)=\ln(4x-5)$展为$x-2$的幂数。

10. 计算反常积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}dx$。

二、（9 分） 当$x\in[-1,1]$时，确定函数$f(x)=\dfrac{\tan\pi x}{|x|(x^2-1)}$的间断点及类型。

三、（9 分） 设函数$f(x)=\begin{cases}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)\cdot\int_0^x\sin t^2dt, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求$f'(x)$，并讨论$f'(x)$在$x=0$点的连续性。

四、（8 分）（学习工科分析基础的同学做 2 小题，其余同学做 1 小题）

1. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n+1)3^n}$的收敛域及和函数。

2.判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$在$x\in(-\infty,+\infty)$上的一致收敛性，并讨论是否可以逐项求导。

五、（8 分） 设曲线l_1的方程为$y=a\ln x$（其中常数$a>0$），曲线l_1的一条切线l_2过原点。

1.求曲线l_1，切线l_2以及x轴围成的平面图形的面积。

2.求此平面图形绕y轴旋转所成的旋转体的体积。

六、（6 分） 设函数$f(x)$在$[-l,l]$上连续，在$x=0$处可导，且$f'(0)\neq 0$。

1. 证明：对$\forall x\in(0,l)$，至少$\exists\theta\in(0,1)$，使$\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$;

2.求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$。

14 年高数上期末答案

一、1、原式= $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}{1-\cos x+x\sin x}$（3 分）= $\dfrac{4}{3}$（6 分）

2、求导 $f(\cos x)(-\sin x)=-2\sin 2x$，（4 分）求 $f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})=2\sqrt{2}$。（6 分）

3、$dy=[\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{1+x}+\dfrac{1}{1-x})-\dfrac{1}{1-x^2}-\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\arcsin x]dx=-\dfrac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\arcsin xdx$（6 分）

4、$\int \underline{\underline{e^{\frac{x}{2}}=t}}\int\dfrac{1}{t-1}\dfrac{2}{t}dt$（3 分）= $2\int(\dfrac{1}{t-1}-\dfrac{1}{t})dt$（5 分）=

$2\ln|\dfrac{t-1}{t}|+C=2\ln\dfrac{\sqrt{e^x}-1}{\sqrt{e^x}}+C$（6 分）

5、$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx\underline{\underline{x=\sin t}}\int_{\arcsin\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{\pi}{2}}\dfrac{\cos^2 t}{\sin^2 t}dt$（3 分）$=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{\pi}{2}+\sqrt{2}$。（6 分）

6、$\dfrac{dx}{dy}+\dfrac{x}{1+y}=-y^2$，（2 分）$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{-1}{1+y}dy$，$\ln|x|=-\ln|1+y|+C$，$x=\dfrac{C}{1+y}$（6 分）

7、$\rho=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(\lambda-e)^2\lambda^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\dfrac{n^n}{(\lambda-e)^2\lambda^n n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^n\lambda}{(n+1)^n}=\dfrac{\lambda}{e}$，（4 分）

$\lambda=e$ 原级数收敛，所以 $\lambda\le e$ 收敛，$\lambda>e$ 发散（6 分）

8、$a_0=\dfrac{1}{2}\int_0^2 xdx=1$，（1 分）$a_n=\dfrac{1}{2}\int_0^2 x\cos\dfrac{n\pi x}{2}dx$（2 分）$=\dfrac{2((-1)^n-1)}{(n\pi)^2}$（3 分）

$b_n=\dfrac{1}{2}\int_0^2 x\sin\dfrac{n\pi x}{2}dx$（4 分）$=-\dfrac{2(-1)^n}{n\pi}$（5 分）

$f(x)=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{n=1}\dfrac{2((-1)^n-1)}{n^2\pi^2}\cos\dfrac{n\pi x}{2}-\dfrac{2(-1)^n}{n\pi}\sin\dfrac{n\pi x}{2},f(\pm 2)=1$。（6 分）

9、$f(x)=\ln(4(x-2)+3)=\ln 3+\ln(1+\dfrac{4}{3}(x-2))$（3 分）$=\ln 3+\sum\limits_{n=1}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n}(\dfrac{4}{3}(x-2))^n$

（5 分）$|x-2|<\dfrac{3}{4}$（6 分）

10、$\int_1^{+\infty}=-\dfrac{1}{2}\int_1^{+\infty}\ln xd(\dfrac{1}{x^2})$（2 分）$=-\dfrac{1}{2}[\dfrac{\ln x}{x^2}|_1^{+\infty}-\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^3}dx]$（5 分）$=-\dfrac{1}{4x^2}|_1^{+\infty}=\dfrac{1}{4}$（6 分）

二、间断点为 $x=\pm 1,0,\pm\dfrac{1}{2};\lim\limits_{x\to\pm 1}\dfrac{\tan\pi x}{|x|(x^2-1)}=\dfrac{\pi}{2},x=\pm 1$为可去间断点；（3 分）

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\tan\pi x}{|x|(x^2-1)}=-\pi,\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\tan\pi x}{|x|(x^2-1)}=-\pi,x=0$为跳跃间断点；（6 分）

$\lim\limits_{x\to\pm\frac{1}{2}}\dfrac{\tan\pi x}{|x|(x^2-1)}=\infty,x=\pm\dfrac{1}{2}$ 为无穷间断点。（9 分）

三、$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}(\sin\dfrac{1}{x})\dfrac{\int_0^x\sin t^2dt}{x}=0,$（3 分）

$$\begin{cases}(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}).\int_0^x \sin t^2 dt+(\sin\frac{1}{x})\sin x^2, x\neq 0 \\ 0 \qquad\qquad x=0\end{cases}$$ （6 分）

$\lim_{x\to 0} f'(x)=(-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}).\int_0^x \sin t^2 dt+(\sin\frac{1}{x})\sin x^2=0=f'(0)$，故 $f'(x)$ 连续。

四、$\lambda=\lim_{n\to\infty}|\frac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+3)3^{n+1}}\frac{(2n+1)3^n}{(-1)^{n-1}x^{2n}}|=\frac{x^2}{3}<1$，收敛区域为 $-\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3}$，（3 分）

$\frac{S(x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n+1)3^n}, S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n+1}}{(2n+1)3^n},[S(x)']=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{3^n}=\frac{x^2}{3+x^2}$ （5 分）

$S(x)-S(0)=\int_0^x\frac{x^2}{\sqrt{3}+x^2}dx=x-\sqrt{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}$ （7 分）

$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n+1)3^n}=1-\frac{1}{x}\sqrt{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}$ （8 分）

2、$|\frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}|\le\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}},\sum\frac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$收敛，所以原式一致收敛；（6 分）

$\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\cos(n+\frac{1}{2})x-\frac{4x^2}{3(n^4+x^4)^{\frac{4}{3}}}\sin(n+\frac{1}{2})x]$ 在 $x=2k\pi$ 发散，

所以原式不可以逐项求导。（8 分）

五、 1. 因为过原点，所以切线方程为$y=\frac{a}{x_0}x$,切点为(e,a)，（2 分）

$S=\frac{1}{2}ae-\int_1^e a\ln xdx=\frac{1}{2}a(e-2)$; （4 分）

2、$V=2\pi\int_1^e xa\ln xdx-2\pi\int_0^e x(\frac{a}{e}x)dx$ （6 分）$=\frac{\pi}{6}ae^2-\frac{1}{2}\pi a$ （8 分）

六、 1. 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt$,

$F(x)-F(0)=xF'(\theta x)=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$ （2 分）

2. $\frac{x[f(\theta x)-f(-\theta x)]}{2x^2\theta}\theta=\frac{\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)dt}{2x^2}$ （4 分）求极限 $\lim_{x\to 0^+}\theta=\frac{1}{2}$ 。（6 分）

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0}(\sin\frac{1}{x})\frac{\int_0^x\sin t^2dt}{x}=0,$$