2023-2024学年第一学期 工科数学分析（上）期中真题解析

创作：人工智能2402 沈子毅 人工智能2402 韩子慕

审核：人工智能2401 石济诚 人工智能2402 伍欢宇 人工智能2402 关舟涵 人工智能2402 缪凯昕

联系方式：zimuhan276@gmail.com

更新日期：2024年10月27日

一、选择题（每题3分，共18分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^5+3n^2+6n+1}{3n^5+6n^4+n^3+2n}$ 的值为（　　）.

   (A) $\dfrac{4}{3}$

   (B) 0

   (C) $+\infty$

   (D) $-\infty$

   答案：A

   解析： 分子分母同时除以n^5得到：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^5+3n^2+6n+1}{3n^5+6n^4+n^3+2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4+\dfrac{3}{n^3}+\dfrac{6}{n^4}+\dfrac{1}{n^5}}{3+\dfrac{6}{n}+\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^4}}=\dfrac{4}{3}$

2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1}$ 的值为（　　）.

   (A) 1

   (B) -1

   (C) ∞

   (D) 不存在，但不为 ∞

   答案：D

   解析： 注意 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 两种情况，分母恒为正数，而分子可能为正数或者负数，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1}=1$ 而 $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+2x-3}}{x-1}=-1$ 极限不存在。

   评论：这是易错题，注意正负无穷都要考虑。

3. 设 $f(x)=\begin{cases}(x+1)\arctan\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x|\neq 1\\ 1, & |x|=1\end{cases}$，则 $x=-1$ 为 $f(x)$ 的（　　）.

   (A) 不可去间断点

   (B) 可去间断点

   (C) 第二类间断点

   (D) 连续点

   答案：B

   解析： $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=0$，而 $f(-1)=0$，因此，$x=-1$ 为 $f(x)$ 的可去间断点。

4. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^{x^2}-1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，则 $f'(0)=$（　　）.

   (A) 0

   (B) $\dfrac{1}{2}$

   (C) 1

   (D) 2

   答案：C

   解析： 根据极限的定义：$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{x^2}=1$。

5. 设函数数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$，则（　　）.

   (A) $f(0)=0$ 且 $f'(0)$ 存在.

   (B) $f(0)=1$ 且 $f'(0)$ 存在.

   (C) $f(0)=0$ 且 $f'_+(0)$ 存在.

   (D) $f(0)=1$ 且 $f'_+(0)$ 存在.

   答案：C

   解析： 由$\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(h^2)}{h^2}=1$推断，分子一定为0，故$f(0)=0$；又由于$h^2$为非负数，所以只能推断$x=0$处的右导数存在，故选C。

6. 当 $x\to0$ 时，$\sqrt{1+x^2+x^4}-1$ 是 x^k 的同阶无穷小，则 $k=$（　　）.

(A) 1
(B) 2
(C) 3
(D) 4

答案：B

解析： 在$x \to 0$时，x^4是x^2的高阶无穷小，若将上式保留至最低非零阶，那么可以直接舍弃x^4，对$\sqrt{1+x^2}-1$泰勒展开，并保留最低非零阶，得到$\frac{1}{2}x^2$，这是二阶无穷小，故选B。

二、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left[x\sin\left(\frac{1}{x}\right)+\frac{\sin(2x)}{x}\right]$ = ________.

答案：2

解析： 在$x \to 0$时，$\sin\frac{1}{x}$有界，x为无穷小量，故$x\sin\frac{1}{x}$为无穷小量；由重要极限知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{x}=2$，故本题答案为2。

2. 已知 $f'(x_0)=-1$, 则 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}$ = ________.

答案：1

解析： 可以考虑用极限的定义：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}=-\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x_0-x)-f(x_0-2x)}{x}=-f'(x_0)=1$

也可以考虑用洛必达法则：$\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x_0-2x)-f(x_0-x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(-2)f'(x_0-2x)-(-1)f'(x_0-x)}{1}=\lim\limits_{x\to 0}[(-2)f'(x_0)-(-1)f'(x_0)]=-f'(x_0)=1$

3. 若函数 $f(x)=\begin{cases}\frac{a-e^{\frac{1}{x}}}{1+2e^{\frac{1}{x}}}, & x>0\\ a, & x\le 0\end{cases}$ 在点 $x=0$ 处连续，则 $a=$ ________.

答案： $-\frac{1}{2}$

解析： 由题知$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=f(0)=a$，要使得$f(x)$为连续函数，则$a=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$ = $-\frac{1}{2}$。

4. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2(e^x-1)}=$ ____________.

答案： $\frac{1}{2}$

解析： 由无穷小代换知$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x+\frac{1}{3}x^3-(x-\frac{1}{6}x^3)+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{2}$。

评论：这道题用洛必达会有点麻烦，如果熟练掌握常见的无穷小代换，就能很快地算出结果。

5. 设 $y=\ln(1+x+\sqrt{x^2+2x})$, 则 $\mathrm{d}y=$ ____________.

答案： $\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x}}$

解析： $y'=\frac{1+\frac{2x+2}{2\sqrt{x^2+2x}}}{1+x+\sqrt{x^2+2x}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2x}}$，故$\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+2x}}$。

评论： 这道题大家都会算，为了避免被误判，提示大家尽量要把结果化到最简。

6. $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{4+x}{3+x})^{2x}=$ ____________.

答案： e^2

解析： $\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{4+x}{3+x})^{2x}=\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{3+x})^{3+x\times\frac{2x}{3+x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x}{3+x}}=e^2$ 。

评论： 这属于1^∞型的极限问题，将其转化为重要极限求解。

三、计算题（每小题 8 分，共 40 分）

1. 已知摆线的方程为 $\begin{cases}x=a(t-\sin t)\\ y=a(1-\cos t)\end{cases}$ ，求该方程所确定的函数的一、二阶导数。

解析：

对于参数方程

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}$$

的求导，我们有一阶导公式

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \tag{1.1}$$

与二阶导公式

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3} \tag{1.2}$$

其中

$$\dot{x}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t},\quad \dot{y}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \tag{1.3}$$

（这两个公式十分重要，建议记住，详细推导见《工科数学分析》P115）
对于此题，我们易有

$$\begin{cases}\dot{x}=a(1-\cos t)\\ \ddot{x}=a\sin t\end{cases},\quad \begin{cases}\dot{y}=a\sin t\\ \ddot{y}=a\cos t\end{cases} \tag{1.4}$$

代入公式$(1.1),(1.2)$即得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\sin t}{1-\cos t},\quad \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{-1}{a(1-\cos t)^2} \tag{1.5}$$

2. 确定常数a,b，使函数$f(x)=\begin{cases}e^x, & x\leqslant 2,\\ ax+b, & x>2\end{cases}$在点$x=2$处可导。

解析：
$f(x)$在$x=2$处可导，则$f'_+(2)$与$f'_-(2)$都要存在且相等

$$\begin{aligned}f'_+(2)&=\lim_{x\to 0^+}\frac{f(2+x)-f(2)}{x}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{a(2+x)+b-\mathrm{e}^2}{x}\end{aligned} \tag{2.1}$$

要使这个极限存在，必有$2a+b-\mathrm{e}^2=0$，代入消去b可得

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 0^+}\frac{ax}{x}=a \tag{2.2}$$

又

$$\begin{aligned}f'_-(2)&=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(2+x)-f(2)}{x}\\&=\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{2+x}-\mathrm{e}^2}{x}\\&=\mathrm{e}^2\lim_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\\&=\mathrm{e}^2\end{aligned} \tag{2.3}$$

由$f'_+(2)=f'_-(2)$得$a=\mathrm{e}^2$，进而$b=\mathrm{e}^2-2a=-\mathrm{e}^2$
经检验知符合题意，从而$a=\mathrm{e}^2$，$b=-\mathrm{e}^2$.

3. 确定$f(x)=\dfrac{(x+1)\sin x}{x|x^2-1|}$的间断点并判断其类型。

解析：
间断点有$x=0$，1，-1.

$$f_+(0)=\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x+1}{|x^2-1|}\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1\times 1=1 \tag{3.1}$$

同理有$f_-(0)=1=f_+(0)$，从而$x=0$为第一类间断点（可去间断点）.

$$f_+(1)=\lim_{x\to 1^+}f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{(x+1)\sin x}{x|x^2-1|}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin x}{x(x-1)}=+\infty \tag{3.2}$$

从而$x=1$为第二类间断点（无穷间断点）.

$$f_{-}(-1)=\lim_{x\to-1^-}f(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{(x+1)\sin x}{x(x^2-1)}=\lim_{x\to-1^-}\frac{\sin x}{x(x-1)}=-\frac{\sin 1}{2} \tag{3.3}$$

同理有$f_+(-1)=\dfrac{\sin 1}{2}\neq f_+(0)$，从而$x=-1$为第一类间断点（跳跃间断点）.

4. 设函数$f(x)=\arctan x$，若$f(x)=xf'(\xi)$，求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\xi^2}{x^2}$的值。

解析:

由初等函数的求导公式知

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \tag{4.1}$$

从而

$$\arctan x=\frac{x}{1+\xi^2} \tag{4.2}$$

故

$$\xi^2=\frac{x}{\arctan x}-1 \tag{4.3}$$

因此

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{\xi^2}{x^2}&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{x}{\arctan x}-1}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{3}x^3}{x^3}\\&=\frac{1}{3}\end{aligned} \tag{4.4}$$

评论:

在求$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}$这个极限时，不要用洛必达法则，这会增加许多的计算量。如果能熟练掌握常见的无穷小替换，则会发现分母和分子都是三阶无穷小。这时直接进行替换会更加简单。

5. 设函数$f(x)$二阶可导，且$f(0)=f(1)=0$, $f(x)$在$[0,1]$上的最小值为-1，证明：至少存在一点$\xi\in(0,1)$，使得$f''(\xi)\geqslant 8$.

解析:

由$f(0)=f(1)\neq-1$知最小值在$(0,1)$上取得，则-1也是极值，不妨记$f(\eta)=-1$，$\eta\in(0,1)$，由$f(x)$在$(0,1)$上可导与**Fermat引理**，我们有$f'(\eta)=0$.

因为$f(x)$二阶可导，由**Taylor定理**可知

$$\begin{aligned}&\exists\xi_1\in(0,\eta),s.t.f(0)=f(\eta)+f'(\eta)(0-\eta)+\frac{f''(\xi_1)}{2!}(0-\eta)^2\\&\exists\xi_2\in(\eta,1),s.t.f(1)=f(\eta)+f'(\eta)(1-\eta)+\frac{f''(\xi_2)}{2!}(1-\eta)^2\end{aligned} \tag{5.1}$$

从而我们有

$$f''(\xi_1)=\frac{2}{\eta^2},\quad f''(\xi_2)=\frac{2}{(1-\eta)^2} \tag{5.2}$$

进而由不等式知识我们有

$$f''(\xi_2)+f''(\xi_2)=2(\frac{1}{\eta^2}+\frac{1}{(1-\eta)^2})\geq4(\frac{1}{\eta(1-\eta)})\geq16 \tag{5.3}$$

上式当且仅当$\eta = \dfrac{1}{2}$时取等，显然

$$\exists \xi \in (0,1), s.t. f''(\xi) = \max\{f''(\xi_1), f''(\xi_2)\} \tag{5.4}$$

从而

$$2f''(\xi) \geq f''(\xi_2) + f''(\xi_2) \geq 16 \tag{5.5}$$

故

$$f''(\xi) \geq 8 \tag{5.6}$$

四、（15分）

设 $y = \dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$，讨论该函数的单调性、极值、凹凸性、拐点、渐近线。

解析:

（1） 单调性与极值

首先，函数在分母不为零的情况下有定义，即 $x-1 \neq 0$，因此定义域为 $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$。

为了找到函数的单调区间和极值点，需要计算函数的一阶导数

$$y' = \frac{(x-1)^2 \cdot 3(x+1)^2 - (x+1)^3 \cdot 2(x-1)}{(x-1)^4} \tag{1}$$

简化得到:

$$\begin{gathered} y' = \frac{(x+1)^2(3(x-1) - 2(x+1))}{(x-1)^3} \\ y' = \frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3} \end{gathered} \tag{2}$$

根据 y' 的符号变化，我们可以分析函数的单调性:

- 当 $x > 5$ 或 $x < -1$ 时，$y' > 0$，函数单调递增。
- 当 $-1 < x < 1$ 或 $1 < x < 5$ 时，$y' < 0$，函数单调递减。
  注意到 $x = -1$ 时，$y' = 0$，但是 $x = -1$ 不在定义域内，因此不需要考虑 $x = -1$ 作为极值点。
  当 $x = 5$ 时，y' 的符号从负变为正，因此 $x = 5$ 是一个局部极小值点。计算 $x = 5$ 时 y 的值:

$$y(5) = \frac{(5+1)^3}{(5-1)^2} = \frac{6^3}{4^2} = \frac{216}{16} = 13.5 \tag{3}$$

因此，$x = 5$ 时，函数取得极小值 $y = 13.5$。

（2） 凹凸性与拐点

为了分析凹凸性和拐点，我们需要计算二阶导数 y'' 并观察其符号变化。

$$y'' = \frac{d}{dx}\left(\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}\right) = \frac{24(x+1)}{(x-1)^4} \tag{4}$$

$x = -1$是其变号零点，故$x = -1$是该函数的拐点。

（3） 渐近线

因为

$$\lim_{x \to -1} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2} = \infty \tag{5}$$

故$x = 1$为其垂直渐近线。

设其还有一条斜渐近线$y = kx + b$，那么

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2} = 1$$

$$b=\lim_{x \to \infty} \frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-x=5 \tag{6}$$

因此，该函数的渐近线为：

$$\begin{gathered}x=1\\y=x+5\end{gathered} \tag{7}$$

评论：

1. 本题计算量比较大，二阶导算起来很麻烦，注意运算过程中时常化简，多算几遍可以提高正确率。
2. 注意渐近线有两种：有$y=kx+b$这样无穷处的渐近线，还有函数在某点处发散形成的垂直渐近线。

五、（9分）

已知函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续，在$(0,1)$内可导，且$f(0)=0, f(1)=1$。

证明：（I）存在 $c \in (0,1)$，使得$f(c)=1-c$;

（II）存在两个不同的点$\eta, \xi \in (0,1)$，使得$f'(\eta)f'(\xi)=1$。

解析： 证明：

（I）构造函数

$$h(x)=f(x)+x-1 \tag{1}$$

因为

$$h(0)=-1<0, h(1)=1>0 \tag{2}$$

由零点存在定理知

$$\exists c \in (0,1), s.t. f(c)=1-c \tag{3}$$

（II）

由拉格朗日中值定理知

$$\begin{gathered}\exists \xi \in (0,c), s.t. f'(\xi)=\frac{1-c-0}{c-0}=\frac{1-c}{c}\\ \exists \eta \in (c,1), s.t. f'(\eta)=\frac{1-(1-c)}{1-c}=\frac{c}{1-c}\end{gathered} \tag{4}$$

因此

$$f'(\xi)f'(\eta)=1 \tag{5}$$

评论：

1. **这种题要找两个点，很有可能是从某个位置截断，然后两侧各找一个点。**
2. **要特别注意第一问对第二问的提示作用，否则分割η, ξ这两个点的位置是有点难想到的。**
3. 经调查发现，这道题是2005年考研真题，距今已有将近20年的历史。