2015年版

南卷汇

大一上高数考试试题汇编

南洋书院学生会 制作

目录

试题

答案

2005 年高数（上）期末

一、解答下列各题（每小题 6 分，共 60 分）

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(x+1)}{x-\sin x}$.

2. 设 $y=\dfrac{x}{2}\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$，求 dy.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}x^2, & x\le x_0\\ ax+b, & x>x_0\end{cases}$ 在 x_0 处可导，求常数 a 和 b.

4. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}n}{3^n}$ 的敛散性。若收敛，是条件收敛还是绝对收敛？

5. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y=1-\ln(x+y)+e^y$ 所确定，求 y'

6. 设 $f(x)$ 连续，且满足 $\int_0^{x^3-1}f(t)dt=x$，求 $f(26)=?$

7. （注意:学习《工科分析》者做第（1）题，其余的做第（2）题）

   （1） 将 $f(x)=|x|,x\in[-\pi,\pi]$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶级数.

   （2） 求 $f(x)=2x^3-3x^2-12x+1$ 的极值.

8. 计算不定积分 $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$

9. 计算定积分 $\int_0^1\arctan\sqrt{x}dx$

10. 求曲线 $y=x^2+1$, 直线 $y=0,x=0,x=1$ 所围成的平面图形绕 y 轴旋转一周所产生的旋转体的体积.

二、（8 分） 试证明不等式 $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 时，$\tan x>x+\dfrac{x^3}{3}$

三、（9 分） 将函数 $f(x)=\dfrac{1}{2x^2+x-3}$ 展成 $x-3$ 的幂级数，并指出收敛区间.

四、（9 分） 已知 $f(x)$ 在 $x=12$ 的邻域内可导，且 $\lim\limits_{x\to 12}f(x)=0$，$\lim\limits_{x\to 12}f'(x)=\dfrac{2005}{2}$.

求极限 $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{\int_{12}^{x}\left[t\int_{t}^{12}f(u)du\right]dt}{(12-x)^3}$.

五、（8 分）（注意:学习《工科分析》者做第（1）题，其余的做第（2）题）

（1） 求微分方程 $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$ 的通解；

（2） 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}x^n$ 的收敛域及和函数.

六、（6 分） 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在内可导，且 $0<f'(x)\le 1, f(0)=0$，证明：

$$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2 \ge \int_0^1 f^3(x)dx$$

2006 年高数（上）期末

一、解答下列各题（每小题 6 分，共 60 分）

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$.

2. 设 $y=\arctan\left(\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}\right)$，求 dy.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{-x}, x\ge 0\\ x^2+1, x<0\end{cases}$，求 $\int_{-1}^{2}f(x-1)$.

4. 判定 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{n^2}{2}}$ 的敛散性.

5. 设 $y=y(x)$ 由方程 $y=\tan(x+y)$ 所确定， 求 y'.

6. 计算不定积分 $\int\frac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx$.

7. 将 $f(x)=2+|x|, x\in[-\pi,\pi]$ 展开成以 2π 为周期的 Fourier 级数.

8. 将函数 $f(x)=\frac{1}{x^2+3x+2}$ 展开成 $x+4$ 的幂级数，并指出收敛区间.

9. 求微分方程 $xy'-3y=x^4e^x$ 的通解.

10. 设曲线 $y=ax^2(a>0,x\geq 0)$ 与 $y=1-x^2$ 交于点 A，过坐标原点 o 和点 A 的直线与曲线 $y=ax^2$ 围成一个平面图形，问 a 为何值时，该图形绕 x 轴旋转一周所产生的旋转体的体积

最大.

二、（8 分） 试证明不等式：当 $x>0$ 时， $x^{\alpha}-\alpha x\leq 1-\alpha$.

三、（9 分） 设 $f(x)=\int_1^{x^2}e^{-t^2}dt$，求 $\int_0^1 xf(x)dx$.

四、（9 分） 一物体在某一介质中按 $x=ct^3$ 作直线运动，已知介质的阻力与物体速度的平方成正比，计算物体由 $x=0$ 移动到 $x=a$ 时克服阻力所作的功.

五、（9 分）（注意:学习《工科分析》者做第（1）题，其余的做第（2）题）

（1） 证明：级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}2^{-nx}$ 在区间上 $[\delta,+\infty)$ 一致，而在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

（2） 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}$ 的和.

六、（5 分） 设 $f''(x)>0, x\in[a,b]$，证明： $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$

2007年年高数（上）期末

一、解答下列各题（每小题6分，共60分）

1.计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+\ln(1-x)-1}{x-\arctan x}$.

2.设 $y=\arctan\sqrt{1-x^2}$，求 dy.

3. 设 $\begin{cases} x=\int_0^t e^{-u^2}du. \\ e^y\sin t-y+1=0. \end{cases}$，求 $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=0}$.

4.判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{4+3^n}$ 的敛散性.

5.计算反常积分 $\int_1^{+\infty}\dfrac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$.

6. 设 $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$ 为 $f(x)$ 的原函数，求 $\int xf'(x)dx$.

7.将 $f(x)=\begin{cases}1 & 0\le x\le \pi/2 \\ 0 & \pi/2<x\le\pi\end{cases}$ 展开成以 2π 为周期的傅里叶正弦级数，并求此级数分别在 $x=\dfrac{3}{2}\pi$ 和 $x=\dfrac{5}{2}\pi$ 两点的收敛值.

8.将函数 $f(x)=\ln x$ 展开为 $x-2$ 的幂级数，并指出其收敛域.

9.求微分方程 $(x+1)y'-2y=(x+1)^{7/2}$ 的通解.

10.求抛物线 $x=5y^2$ 与 $x=1+y^2$ 所围图形的面积.

二、（9分） 若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_{\cos x}^{1}e^{t^2}dt}{x}, & x\ne 0 \\ a, & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 点可导，求 a 和 $f'(0)$.

三、（9分） 在曲线 $y=e^{-x}(x\ge 0)$ 上求一点 $\left(x_0,e^{-x_0}\right)$，使得过该点的切线与两个坐标轴所围平面图形的面积最大，并求出此最大面积.

四、（8 分） 半径为 R 的半球形水池充满水，将水从池中抽出，当抽出的水所作的功为将水全部抽出所作的功的一半时，试问此时水面下降的深度 H 为多少？

五、（8 分） 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$ 的和函数并求出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2^n}$ 的和.

六、（6 分） 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导，且并满足等式

$f'(x)+f(x)-\frac{1}{1+x}\int_0^x f(t)dt=0$，求并证明：$e^{-x} \le f(x) \le 1 \quad (x \ge 0)$.

2008 年高数（上）期末

一、解答下列问题（每小题 6 分，共 60 分）

1. 计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x(x-2)+x+2}{\sin^3 x}$

2. 设 $y=e^{2x}-x\log_2 x+\arctan\frac{\pi}{5}$，求 dy

3. 设 $\begin{cases} x=\ln\cos t \\ y=\sin t-t\cos t \end{cases}\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$, 求 $\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{3}}$.

4. 判定级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n2^n}$ 的敛散性.

5. 判断反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x^2}dx$ 的敛散性，若收敛，试计算其值.

6. 计算不定积分 $\int\frac{2x\sin x}{\cos^3 x}dx$.

7. 计算定积分$\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+e^x\right)^2}$.

8. 将函数$f\left(x\right)=\begin{cases}1, 0\le x\le 1\\ 2, 1<x<2\end{cases}$在$[0,2]$上展成以 4 为周期的正弦级数.

9. 求微分方程$(1+y)dx+(x+y^2+y^3)dy=0$的通解.

10.求由曲线$y=x^2+7$及$y=3x^2+5$所围成的图形绕ox轴旋转一周而成的旋转体的体积.

二、（9 分）证明：当$x\ge 0$时，有$\left(1+x\right)^2[2\ln\left(1+x\right)-1]+1\ge 4x\arctan x-2\ln\left(1+x^2\right)$

三、（9 分）设抛物线$y=ax^2+bx\left(a<0\right)$通过点$M\left(1,3\right)$，为了使此抛物线与直线$y=2x$所围成的平面图形的面积最小，试确定$a$和$b$的值.

四、（8 分）设一车间空间容积为 10000 立方米，空气中含有 0.12%的二氧化碳（以容积计算），现将含二氧化碳 0.04%的新鲜空气以 1000 立方米每分钟的流量输入该车间，同时按 1000 立方米每分钟的流量抽出混合气体，问输入新鲜空气 10 分钟后，车间内二氧化碳的浓度降到多少？

五、（9 分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2^n n!}x^n$的收敛域及和函数.

六、（6 分）设函数$f\left(x\right)$在$x=0$的邻域内有连续的一阶导数，且$\lim_{x\to 0}\frac{f\left(x\right)}{x}=a\left(a>0\right)$，

证明：$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-1\right)^{n-1}f\left(\frac{1}{n}\right)$条件收敛

2009 年高数（上）期末

一、计算下列各题（每题 6 分，共 60 分）

1、 求极限$\lim_{x\to 0+} x\ln(1+e^{\frac{1}{x}})$.

2、 设 $y=x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})$，求 dy。

3、 设$\begin{cases} x=2t-t^2 \\ y=3t-t^3 \end{cases}$，求$\frac{d^2y}{dx^2}$.

4、 判定级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\lambda-e)^2\lambda^n n!}{n^n}(\lambda\ge 0)$的敛散性。

5、 求反常积分$\int_0^1\frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}dx$。

6、 求$\int x\arctan x\,dx$.

7、 $\int_0^{\pi}\sqrt{\sin x-\sin^3 x}\,dx$.

8、 将$f(x)=\begin{cases} x, |x|<\frac{\pi}{2} \\ 0, \frac{\pi}{2}\le |x|\le\pi \end{cases}$在$[-\pi，\pi]$上展为以 2π为周期的付里叶级数，并指出收敛于 f(x)的区间。

9、 求微分方程 $ydx+(x^2-4x)dy=0$ 的解。

10、 求曲线 xy=1 与直线 x=1,x=2,y=0 所围成平面图形绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积。

二、（8 分） 将 $f(x)=\ln(4x-5)$展为x-2 的幂级数，并指出其收敛域。

三、（9 分） 在曲线 $y=\sin x^2(0\le x\le 1)$上取点 A（$a,\sin a^2$），$(0\le a\le 1)$,过点 A 作平行于 ox 轴的直线 L，由直线 L，oy 轴及曲线 $y=\sin x^2(0\le x\le a)$所围成的图形面积记为S_1，由直线 L，直线 x=1 及曲线 $y=\sin x^2(a\le x\le 1)$所围成的图形面积记为S_2，问 a 为何值时，$S=S_1+S_2$取得最小值。

四、 冷却定律指出，物体在空据点中冷却的速度与物体和空气温度之差成正比，已知空气温度为 30 ℃时，物体由 100 ℃经 15 分钟冷却至 70℃，问该物体冷却至 40℃需要多少时间？

五、（8 分）（学习《工科数学分析》的做（1），其余的做（2））

（1）证明级数$\sum_{n=0}^{\infty}x^2e^{-nx}$在$[0，+\infty)$上一致收敛。

（2）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{2^{2n-1}}x^{2n-2}$的收敛域及和函数。

六、（6 分） 设 $f(x)\epsilon C^2[a,b]$,试证存在$\xi\epsilon[a,b]$,使

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}(b-a)^3f^n(\xi)$$

2010 年高数（上）期末

一、填空题

1. 在抛物线 $y=x^2$ 上与直线 x+2y=0 垂直的切线方程是_______

2. 设 $f(x)=\begin{cases} e^{ax}, x\le 0 \\ b(1-x^2), x>0 \end{cases}$，在（$-\infty$，$+\infty$）上可微，则 a=____b=____

3. 设 f(x)的定义域为（0，+∞），已知 f(1)=1,$f'(x^2)=x^3$,则 f(4)=_____

二、单项选择题

1. 设 f(x)在 x=a 处取得极值且满足 $f^n(x)+2f^{'}(x)=\int_a^{x+1}e^{f(t)}dt$, 则 f(x)在 x=a 处（）

   A 必取极大值　　B 必取极小值　　C 不可能取极值　　D 是否取极值不能确定

2. 设 a 为常数，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[\frac{\sin(na)}{n^2}-\frac{1}{\sqrt{n}}]$（）

   A 绝对收敛　　B 条件收敛　　C 发散　　D 收敛性与 a 的取值有关

3. 设 $f(x)=2x\ln(1-x), g(x)=\sin^2 x$, 则当 x→0 时 f(x)是 g(x)的（）

   A 同阶但非等价无穷小　B 等价无穷小　C 高阶无穷小　D 低阶无穷小

三、解答下列各题

1. 设 $y=\arctan(\sqrt{x^2-1})-\frac{\ln x}{\sqrt{x^2-1}}(x>1)$, 求 $\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{dy}{dx}$

2. 设$\begin{cases} x=\int_0^t e^{-u^2}du \\ y=e^{-t^2}(1+t^2) \end{cases}$，求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}$

3. 求不定积分$\int e^x\ln(e^x+1)dx$

4. 求微分方程$2xy'=y+2x^2$的通解

四、解答下列各题

1.（学习《工科分析》者做（1），其余的做（2））

（1）讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}n2^{-nx}$在[δ，＋∞）（δ＞0）上的一致收敛性并求和

（2）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}x^{n-1}$的收敛域及和函数

2.设函数$f(x)=\begin{cases}1,0\le x\le 1\\ 2,1<x<2\end{cases}$在[0,2]上将 f(x)展成以 4 为周期的正弦级数，并指出级数在 x=5 处的值

3.设函数$f(x)=\begin{cases}(\sin\frac{1}{x})\int_0^x \sin t^2dt, x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$求$f'(x)$并讨论$f'(x)$在 x=0 处的连续性

4.计算反常积分$I=\int_0^{+\infty}\frac{xe^{-x}}{(1+e^{-x})^2}dx$

5.一抛物线$y=ax^2+bx+c$通过(0,0)(1,2)两点，且 a<0.确定 a,b,c 的值与 x 轴所围图形 D 的面积最小？并求此图形 D 绕 Y 轴旋转一周所得旋转体的体积.

五、 设函数 f(x)在闭区间[a,b]上连续，在开区间（a,b）内可导，且$f'(x)$>0，若极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{f(2x-a)}{x-a}$存在，证明在(a,b)内存在点ξ，使$\frac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\frac{2\xi}{f(\xi)}$

2011 年高数（上）期末

一、填空（每小题 4 分，共 16 分）

1. $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x<0 \\ 3x^2-2x+k, & x\geq 0 \end{cases}$ 在 x=0 连续，则常数 k = ____

2. $\int_{-2}^{2}(1+x)\sqrt{4-x^2}\,dx$ = ____

3. 设$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的收敛半径为 3，则$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$的收敛半径 R= ___

4. $\frac{d}{dx}\int_0^{x^2}\frac{\sin t}{1+\cos^2 t}dt$= _____

二．单项选择题（每小题 4 分，共 16 分）

1.设周期函数 f(x)在(-∞，+∞)内可导，其周期为 4，且$\lim_{x\to 0}\frac{f(1)-f(1-x)}{2x}$=-1，则曲线 y=f(x)在点(5，f(5))处的切线的斜率为(　　)

A. 2　　B.-2　　C.1　　D.-1

2.对于常数 k>0，级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\tan(\frac{1}{n}+\frac{k}{n^2})$(　　)

A.绝对级数　　B.条件收敛　　C.发散　　D.收敛性与 k 的取值相关

3.$f(x)=\frac{(x^2+x)(\ln|x|)\sin\frac{1}{x}}{x^2-1}$的可去间断点的个数是(　　)

A.0　　B.1　　C.2　　D.3

4.设$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{x}dx$　　$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x}{\tan x}dx$，则(　　)

A. $I_1>I_2>1$　　B.$1>I_1>I_2$　　C. $I_2>I_1>1$　　D.$1>I_2>I_1$

三．计算下列各题（每小题 6 分，共 54 分）

1.求极限$\lim_{x\to 0}\frac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}$

2.计算积分$\int\frac{x\sin x}{\cos^5 x}dx$

3.求定积分$\int_1^4\frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx$

4.设$\begin{cases} x=\int_1^{t^2} u\,du \\ y=\int_{t^2}^1 u^2\ln u\,du \end{cases}$ t>1，求$\frac{d^2y}{dx^2}$

5.求微分方程的通解：$xy'-3y=x^4e^x$

6.将函数 $f(x)=|x|, |x|\le\pi$ 展开成付里叶级数

7.在抛物线 $y=x^2(0\le x\le 8)$上求一点，使得过此点所做切线与直线 x=8 及 x 轴所围图形面积最大

8.将函数 $f(x)=\frac{x+4}{2x^2-5x-3}$在 x=1 处展开成 x-1 的幂级数并指出收敛域

9.(学习《工科数学分析》者做(1)，其余的做(2))

(1)设广义积分$\int_1^{+\infty}f^2(x)dx$收敛，证明广义积分$\int_1^{+\infty}\frac{f(x)}{x}dx$绝对收敛

(2)计算$\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}dx$

四.(8 分)求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n2^n}$的收敛域及和函数

五.(6 分)设 f''(x)存在，且$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{x-1}=0$，记$\varphi(x)=\int_0^1 f'[1+(x-1)t]dt$，求$\varphi(x)$在 x=1 的某个邻域内的导数，并讨论$\varphi'(x)$在 x=1 处的连续性

2012 年高数（上）期末

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 函数 $F(x)=\int_1^x(2-\frac{1}{\sqrt{t}})dt\ (x>0)$ 的单调减区间为______

2. 若 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续且 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=2$，则 $f(0)=$______及 $f'(0)=$______

3. 若 $f(x)=\begin{cases}\frac{\cos x}{x+2}, & x\ge 0\\ \frac{\sqrt{a+x}-\sqrt{a}}{x}, & x<0\end{cases}$ 有可去间断点 $x=0$，则 $a=$______

4. 设 $f(x)=\begin{cases}e^{ax}, & x\le 0\\ b(1-x^2), & x>0\end{cases}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 可微，则 $a=$______，$b=$______

5. 设 $x\to 0$ 时，$f(x)=\ln(1+ax^2)$ 与 $g(x)=\sin^2 3x$ 是等价无穷小，则 $a=$______

二、计算下列各题（每小题 8 分,共 72 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\ln\cos(x-1)}{1-\sin\frac{\pi}{2}x}$；2.求函数 $f(x)=\frac{x^2-5}{x-3}+\int_{-1}^{1}(\sqrt{1-x^2}+x)^2dx$ 的单调性和极值;

3. 求定积分 $\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}dx$；4. 求微分方程 $\frac{dy}{dx}+xy=x^3y^3$ 的通解；5. 判定级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1-\cos\frac{1}{n})\sqrt{n}$ 的敛散性;6. 将 $f(x)=\begin{cases}x+\frac{\pi}{2}, & 0<x<\frac{\pi}{2}\\ 0, & \frac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$，展开为以 2π 为周期的正弦级数;

7. 设由曲线 $y=\cos x$（其中 $x\in[0,\frac{\pi}{2}]$）及 x 轴，y 轴所围成平面图形的面积被曲线 $y=a\sin x(a>0)$ 二等分.

①确定 a 的值；②求曲线 $y=\cos x, y=a\sin x$ 及 $x=0$ 所围平面图形绕 x 轴旋转一周所成的立体的体积.

8. 设函数 $F(x)=\begin{cases}\dfrac{\int_0^x tf(t)dt}{x^2}, & x\neq 0\\ a, & x=0\end{cases}$,其中 $f(x)$ 具有二阶连续导数，且 $f(0)=0$.(1) a 为何值时，$F(x)$ 在 $x=0$ 处连续 ;(2) 讨论 $F'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

9.求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n2^n}$ 的收敛域及和函数.

三、（7 分）（学习《工科数学分析》者做（1），其余的做（2））

(1) 证明函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}2^{-nx}$, 在区间 $[\delta,+\infty)$ $(\delta>0)$ 一致收敛. 但在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛.

(2) 将函数 $f(x)=\dfrac{x}{2x^2+3x-2}$ 在 $x_0=2$ 处展开为幂级数.

四、(6 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导 $(a > 0b,>$ ，且满足方程. $2\int_a^{\frac{a+b}{2}} e^{\lambda(x^2-b^2)}f(x)dx=(b-a)f(b)$,

证明：存在 $\xi\in(a,b)$,使 $2\lambda\xi f(\xi)+f'(\xi)=0$.

2014 年高数（上）期末

一、计算下列各题（每题 6 分，共 60 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos x}}$

2.已知$\int_1^{\cos x} f(t)dt=\cos 2x$，其中$f(t)$连续，求$f(\dfrac{\sqrt{2}}{2})$。

3. $y=\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}-\dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}(|x|<1)$，求$\mathrm{dy}$。

4.求不定积分$\int\dfrac{\mathrm{dx}}{\sqrt{e^x-1}}$。

5.求定积分$\int_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{1}\dfrac{\sqrt{1-\mathrm{x}^2}}{x^2}dx$。

6.求微分方程$(1+y)dx+(x+y^2+y^3)dy=0$的通解。

7.判断级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\lambda-e)^2\lambda^n n!}{n^n}(\lambda\geq 0)$的敛散性。

8.设$f(x)=\begin{cases}0, -2\leq x\leq 0\\ x,\ 0<x<2\end{cases}$，将$f(x)$展为以 4 为周期的 Fourier 级数。

9.将函数$f(x)=\ln(4x-5)$展为$x-2$的幂数。

10.计算反常积分$\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}dx$。

二、（9 分）当$x\in[-1,1]$时，确定函数$f(x)=\dfrac{\tan\pi x}{|x|(x^2-1)}$的间断点及类型。

三、（9 分）设函数$f(x)=\begin{cases}\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)\cdot\int_0^x\sin t^2dt, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，求$f'(x)$，并讨论$f'(x)$在$x=0$点的连续性。

四、（8 分）（学习工科分析基础的同学做 2 小题，其余同学做 1 小题）

1.求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n+1)3^n}$的收敛域及和函数。

2.判断级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}$在$x\in(-\infty,+\infty)$上的一致收敛性，并讨论是否可以逐项求导。

五、（8 分） 设曲线l_1的方程为$y=a\ln x$（其中常数$a>0$），曲线l_1的一条切线l_2过原点。

1.求曲线l_1，切线l_2以及x轴围成的平面图形的面积。

2.求此平面图形绕y轴旋转所成的旋转体的体积。

六、（6 分） 设函数$f(x)$在$[-l,l]$上连续，在$x=0$处可导，且$f'(0)\neq 0$。

1. 证明：对$\forall x\in(0,l)$，至少$\exists\theta\in(0,1)$，使$\int_0^x f(t)dt+\int_0^{-x} f(t)=x[f(\theta x)-f(-\theta x)]$;

2.求极限$\lim\limits_{x\to 0^+}\theta$。

答案

2005 年

一、1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x(x+1)}{x-\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x+e^x\cos x-2x-1}{1-\cos x}$.

$$=\lim_{x\to 0}\frac{2e^x\cos x-2}{x}=\lim_{x\to 0}2\left(e^x\cos x-e^x\sin x\right)=2.$$

2. $dy=[\dfrac{1}{2}\sqrt{x^2+1}+\dfrac{x}{2}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)]dx=\sqrt{x^2+1}dx.$

3. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\Rightarrow x_0{}^2=ax_0+b,f'_-(x_0)=f'_+(x_0)\Rightarrow 2x_0=a,\therefore a=2x_0,b=-x_0{}^2$.

4.参看 2002 年第一题第 5 题，绝对收敛.

5. $y'=-\dfrac{1+y'}{x+y}+e^y y'\Rightarrow y'=\dfrac{1}{(x+y)\left(1-e^y\right)-1}$.

6.方程两边求导，$f\left(x^3-1\right)=\dfrac{1}{3x^2},x^3-1=26\Rightarrow x=3,\therefore f(26)=\dfrac{1}{27}$.

7.(2) $f'(x)=6(x+1)(x-2)$, 驻点为 $x_1=-1,x_2=2$, $f''(x)=12x-6$,

$f''(-1)<0,f''(2)>0$, 所以极大值为 $f(-1)=8$,，极小值为 $f(2)=-19$.

8. $\displaystyle\int\frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}=\int\frac{d\ln x}{\sqrt{4-\ln^2 x}}=\arcsin\left(\frac{\ln x}{2}\right)+C.$

9. $\displaystyle\int_0^1\arctan\sqrt{x}dx=x\arctan\sqrt{x}\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x}{1+x}dx=\frac{\pi}{4}-1+\ln 2.$

10. $V_y=2\pi\displaystyle\int_0^1 x\left(x^2+1\right)dx=\frac{3\pi}{2}.$

二、设 $f(x)=\tan x-x-\dfrac{x^3}{3},f'(x)=\sec^2 x-1-x^2=\tan^2 x-x^2>0,x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,

$f(x)$ 单调增，又 $f(0)=0,\therefore f(x)>0$.

三、$f(x)=\dfrac{1}{2x^2+x-3}=\dfrac{1}{(2x+3)(x-1)}=\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{2x+3}$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-3}{2}}-\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{1+\frac{2(x-3)}{9}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n[\frac{1}{2^{n+1}}-\left(\frac{2}{9}\right)^{n+1}](x-3)^n$$

收敛区间为$(1,5)$.

四、$\lim\limits_{x\to12}\dfrac{\int_{12}^{x}\left[t\int_{t}^{12}f(u)du\right]dt}{(12-x)^3}=\lim\limits_{x\to12}\dfrac{x\int_{x}^{12}f(u)du}{-3(12-x)^2}=\lim\limits_{x\to12}\dfrac{\int_{x}^{12}f(u)du-xf(x)}{6(12-x)}.$

$$=\lim_{x\to12}\frac{-2f(x)-xf'(x)}{-6}=2005.$$

五、（2）$\because\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=0,\therefore$ 收敛域为$(-\infty,+\infty)$.

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{n!}x^n+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n-1)!}x^n+e^x=x\sum_{n=1}\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}+e^x=x(e^x+1).$$

六、令$F(x)=\left[\int_0^x f(t)dt\right]^2-\int_0^x f^3(t)dt,F'(x)=f(x)\left[2\int_0^x f(t)dt-f^2(x)\right],$

令$G(x)=2\int_0^x f(t)dt-f^2(x),G'(x)=2f(x)-2f(x)f'(x)\geq0,G(0)=0\therefore G(x)\geq0$

$\because f'(x)>0,f(0)=0,\therefore f(x)\geq0,(x\geq0).$从而$F'(x)\geq0,F(0)=0\Rightarrow F(x)\geq0.$

从而$F(1)\geq0,$即$\left[\int_0^1 f(x)dx\right]^2\geq\int_0^1 f^3(x)dx$

2006 年

一、1. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sec^2x-\cos x}{x^2}(2')=\lim\limits_{x\to}\dfrac{1-\cos^2x}{3x^2}(4')$

$$=\lim_{x\to0}\frac{3\cos^2x\sin x}{6x}(6')=\frac{1}{2}$$

2．$dy=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{x}{2}\right)^2}\cdot\dfrac{1}{2}\left(\sec^2\dfrac{x}{2}\right)\cdot\dfrac{1}{2}dx=\dfrac{\sec^2\dfrac{x}{2}}{4+\tan^2\dfrac{x}{2}}dx$

3．$\int_{-1}^{2}f(x-1)dx\overset{x-1=t}{=}\int_{-2}^{1}f(t)dt(2')=\int_{-2}^{0}(x^2+1)dx+\int_{0}^{1}e^{-x}dx(6')=\dfrac{17}{3}-e^{-1}(6')$

4．$\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}(2')=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{n}{2}}}{2}=\dfrac{\sqrt{e}}{2}<1$　　收敛

5.两边对 x 求导：$y'=\left[\sec^2(x+y)\right](1+y')$　　$y'=\dfrac{\sec^2(x+y)}{1-\sec^2(x+y)}=-\csc^2(x+y)(6')$

6.$\int\dfrac{(1+e^x)^2}{1+e^{2x}}dx=\int\left(1+\dfrac{2e^x}{1+2e^x}\right)dx(3')=x+2\int\dfrac{de^x}{1+e^{2x}}(5')=x+2\arctan e^x+c(6')$

7.$b_n=0(2')$　　$a_0=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}f(x)dx=\dfrac{\pi}{2}\int_0^{\pi}(2+x)dx=4+\pi(3')$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(2+x)\cos nxdx=\frac{2}{n^2\pi}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0,n=2k\\-\dfrac{4}{\pi}\cdot\dfrac{1}{(2k-1)^2},n=2k-1\end{cases}(4')$$

$f(x)\sim 2+\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$, $f(-\pi)=f(\pi)$,由 Dirichlet 收敛定理知，

其付氏级数在 $[-\pi,\pi]$ 上均收敛于 $f(x).(6')$

8. $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x+4}{2}}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{x+4}{3}}(2')$

$$=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x+4}{3}\right)(5')=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{1}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n$$

收敛区间为 $|x+4|<2.(6')$

9. $y'-\dfrac{3}{x}y=x^3e^x.(2')$　　$y=e^{\int\frac{3}{x}dx}\left[\int x^3e^xe^{-\int\frac{3}{x}dx}dx+c\right](5')=x^3\left(e^x+c\right)(6')$

10.解 $\begin{cases} y=ax^2 \\ y=1-x^2 \end{cases}$ 得 $A\left(\frac{1}{\sqrt{1+a}},\frac{a}{1+a}\right)$.$OA$ 的方程为：$y=\frac{a}{\sqrt{1+a}}x\,(2')$

旋转体体积 $\bar{V}=\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{1+a}}}\left(\frac{a^2x^2}{1+a}-a^2x^4\right)dx=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{a^2}{(1+a)^{5/2}}\,(4')$

$$\frac{dV}{da}=\frac{2\pi}{15}\cdot\frac{4a-a^2}{(1+a)^{3/2}}$$

得准驻点 $a=4.\frac{dV}{da}=\begin{cases} >0, a<4 \\ <0, a>4 \end{cases}$ 故此时体积最大.

二、证：设 $f(x)=x^\alpha-\alpha x-1+\alpha$. 则 $f'(x)=\alpha x^{\alpha-1}-\alpha=\alpha\left(x^{\alpha-1}-1\right)$.

令 $f'=0$, 得 $x=1.(3')$

$f''(x)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}.f''(1)=\alpha(\alpha-1)<0$. 所以 $f(x)$ 在 $x=1$ 处取得极大值.极大值唯一，没有极小值.所以 $f(1)$ 是在 $(0,+\infty)$ 内的最大值.$(6')$ 所以 $x\in(0,+\infty)$ 有 $f(x)\le f(1)=0$

移项即可 $(8')$

三 $\int_0^1 xf(x)dx=\int_0^1 f(x)d\frac{x^2}{2}(2')=\frac{x^2}{2}f(x)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}e^{-x^4}(2x)dx\,(7')=-\frac{1}{4}\left(1-e^{-1}\right)(9')$

四、因为 $x=ct^3$ $v=\frac{dx}{dt}=3ct^2$ $t=\left(\frac{c}{x}\right)^{\frac{1}{3}}.(3')$ 由题设知阻力 $f=kv^2$

$$\bar{W}=\int_0^a fdx\,(6')=\int_0^a fqkc^{\frac{2}{3}}x^{\frac{4}{3}}dx=\frac{27}{7}k\sqrt[3]{c^2a^7}.(9')$$

五、1. $f_n(x)=\sqrt{n}2^{-nx}$ $f_n'(x)=-n^{\frac{3}{2}}2^{-nx}\ln 2<0.$ $0\le f_n(x)\le\sqrt{n}2^{-n\delta}\,(2')$

$$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+12}2^{-(n+1)\delta}}{\sqrt{n}2^{-n\delta}}=\frac{1}{2^\delta}<1.(5')$$

所以，函数项级数一致收敛.$(6')$ 对 $\varepsilon=\frac{1}{2},\exists x_n=\frac{1}{n}\in(0,+\infty),\left|f_n(x)\right|=\frac{\sqrt{n}}{2}\ge\frac{1}{2}$..故

$\{f_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛于零.从而级数在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.$(9')$

2.设 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}(2')\quad S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\quad |x|<1(4')$

$$S(x)=\int_0^x S'(t)dt=\int_0^x\frac{dt}{1-t}=-\ln(1-x)(6')$$

$$S\left(\frac{1}{3}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}(8')\quad \therefore\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)3^n}=3S\left(\frac{1}{3}\right)=3\ln\frac{3}{2}.(9')$$

六、因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸的，从而过点 $M_0\left(\frac{a+b}{2},f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$ 的切线在曲线的下方，弦在曲线的上方.$(2')$

切线为：$\bar{Y}=f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(x-\frac{a+b}{2}\right).$

弦为 $\bar{Y}'=f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).\quad \therefore\int_a^b\bar{Y}dx\le\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b\bar{Y}'dx$

$\int_a^b\bar{Y}dx\le f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a),\int_a^b\bar{Y}'dx=\frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$ 代入上述不等式！$(5')$

2007 年

一 1. $=\lim_{x\to0}\frac{e^x-\frac{1}{1-x}}{1-\frac{1}{1+x^2}}(2')=\lim_{x\to0}\frac{(1+x^2)[(1-x)e^x-1]}{(1-x)x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1+x^2}{1-x}\lim_{x\to0}\frac{(1-x)e^x-1}{x^2}(4')$

$$=\lim_{x\to0}\frac{(1+x)e^x-e^x}{2x}=-\frac{1}{2}.(6')$$

2. $dy=\frac{1}{\sqrt{1-(1-x^2)}}\cdot\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx(5')=\frac{-x}{|x|\sqrt{1-x^2}}dx(6')$

3. $e^y\cdot y'\sin t+e^y\cos t-y'=0(3')$

$\frac{dx}{dt}=e^{-t^2}(4')\qquad x=0,\ t=0,\ y=1.\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=0}=e(6')$

4. $\frac{n}{4+3^n}<\frac{n}{3^n}(2')\qquad p=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n}=\frac{1}{3}<1$ 收敛$(6')$

5. $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}=2\int_1^{+\infty}\frac{d\sqrt{x}}{1+x}(3')=2\arctan\sqrt{x}\Big|_1^{+\infty}(5')=\frac{\pi}{2}(6').$

6. $\int xf'(x)dx=\int xdf(x)(2')=xf(x)-\int f(x)dx(4')=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}-\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)+C.$

7.将函数在上作奇延拓. $a_n=0.\ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin nxdx=\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)$

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi}\left(1-\cos\frac{n\pi}{2}\right)\sin nx(4')$$

$x=\frac{\pi}{2}$时，收敛于$-\frac{1}{2}$，$x=\frac{3\pi}{2}$时，收敛于$\frac{1}{2}$.

8. $\ln x=\ln\left[2+(x-2)\right]=\ln 2+\ln\left(1+\frac{x-2}{2}\right)=\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(\frac{x-2}{2}\right)^n(5')$

收敛域为$(0,4]$

9. $y'-\frac{2}{x+1}y=(x+1)^{\frac{5}{2}}(1')$

$$y=e^{\int\frac{2}{x+1}dx}[\int(x+1)^{5/2}e^{-\int\frac{2}{x+1}dx}+C](4')=(x+1)^2[\frac{2}{3}(x+1)^{3/2}+C](6')$$

10.由方程组$\begin{cases}x=1+5y^2\\x=1+y^2\end{cases}$得交点$\left(\frac{5}{4},\pm\frac{1}{2}\right)(2')\qquad S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(1+y^2-5y^2\right)dy(5')=\frac{2}{3}(6')$

二、$\because f(x)$在$x=0$可导，$\therefore f(x)$在$x=0$点连续，于是$a=f(0)=\lim_{x\to0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{t^2}dt}{x}$

即　$a=\lim_{x\to0}e^{\cos^2x}\sin x=0$

$$f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}(7')=\lim_{x\to0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{t^2}dt}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{e^{\cos^2x}\sin x}{2x}=\frac{1}{2}(9')$$

三、曲线$y=e^{-x}$上一点$\left(x_0,e^{x_0}\right)$的切线方成为$y-e^{-x_0}=-e^{-x_0}(x-x_0)(2')$

在 x 轴上截距为 $1+x_0$，在 y 轴上截距为 $(1+x_0)e^{-x_0}\,(4')$，

面积为 $S=\frac{1}{2}(1+x_0)^2 e^{-x_0}\,(x_0>0)(5')$

令 $S'=(1+x_0)[1-\frac{1}{2}(1+x_0)]e^{-x_0}=0$, 得 $x_0=1$ 及 $x_0=-1$（舍去）$(7')$

即在 $x_0>0$ 内驻点唯一，所求点为 $(1,e^{-1})(8')$，最大面积为 $S=2e^{-1}.(9')$

四、取作积分变量，对应的一薄层水，其体积为 $dV=\pi y^2dx=\pi\left(R^2-x^2\right)dx(3')$

把这层水抽出所作的功为 $dW=\rho g\pi\left(R^2-x^2\right)dx(5')$，

故水面下降 H 时作的功为 $W(H)=\int_0^H \rho g\pi\left(R^2-x^2\right)dx=\frac{\pi}{4}\rho gH^2\left(2R^2-H^2\right)(7')$

将全部水抽出所作的功为 $W(R)=\frac{\pi}{4}\rho gR^4$. 由题设 $\frac{\pi}{4}\rho gH^2\left(2R^2-H^2\right)=\frac{\pi}{8}\rho gR^4$，

解得 $H=\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}R(8')$

五、设 $\sum_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n=xS(x)(2'),\int_0^x S(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)t^{n-1}dt=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)x^n=$

$g(x)(4')$，收敛域为 $|x|<1.\int_0^x g(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x n(n+1)t^n dt=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n+1}=\frac{x^2}{1-x}(6')$

求导得 $g(x)=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2},S(x)=g'(x)=\frac{2}{(1-x)^3}(7')|x|<1.$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^3}=8(8')$$

六、变形为：$(1+x)\left[f'(x)+f(x)\right]-\int_0^x f(t)dt=0$. 由 f 可导和等式可得，f 二阶可导.

等式两边对求导得：

$$f''(x)+\left(1+\frac{1}{1+x}\right)f'(x)=0(2'),f'(x)=\frac{Ce^{-x}}{x+1}(3').f'(0)=-f(0)=-1.$$

故 $f'(x)=-\dfrac{e^{-x}}{x+1}.x\geq 0$ 时， $f'(x)\leq 0,$故$f(x)\leq f(0)=1(4').$

2008 年

一、1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}(x-2)+x+2}{\sin^{3}x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{x}-2e^{x}+x+2}{x^{3}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{x}-e^{x}+1}{3x^{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{x}}{6x}=\dfrac{1}{6}$

2. $dy=(2e^{2x}-\log 2^{x}-\dfrac{1}{\ln 2})dx$

3. $\dfrac{dy}{dx}=-t\cos t,\dfrac{d^{2}y}{dx^{2}}\bigg|_{x=\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\cos^{2}t-t\sin t\cos t}{\sin t}\bigg|_{x=\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1-\sqrt{3}\pi}{6\sqrt{3}}.$

4. $\because\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_{n}}=\dfrac{3}{2}>1,\therefore$ 原级数发散

5. $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\ln x}{x^{2}}dx=\lim_{b\to+\infty}\int_{1}^{b}\ln x d\left(-\frac{1}{x}\right)=\lim_{b\to+\infty}[-\frac{\ln x}{x}\bigg|_{1}^{b}-\int_{1}^{b}\left(-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}dx]$

$\displaystyle=\lim_{b\to+\infty}\left(1-\frac{1+\ln b}{b}\right)=1$

6. $\displaystyle\int\frac{2x\sin x}{\cos^{3}x}dx=\int xd\sec^{2}x=x\sec^{2}x-\int\sec^{2}xdx=x\sec^{2}x-\tan x+C.$

7. $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{dx}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}\overset{t=e^{x}}{=}\int_{1}^{e}\frac{1}{t\left(1+t\right)^{2}}dt=\int_{1}^{e}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}-\frac{1}{\left(1+t\right)^{2}}\right)dt=[\ln\frac{t}{1+t}+\frac{1}{t+1}]_{1}^{e}$

$=\ln\dfrac{2e}{1+e}+\dfrac{1}{e+1}-\dfrac{1}{2}.$

8.将 $f(x)$ 作奇延拓，再做周期延拓，显然延拓后的函数满足 Dirichlet 收敛定理的条件.

$a_{n}=0(n=0,1,2,\cdots)$

$\displaystyle b_{n}=\int_{0}^{1}\sin\frac{n\pi x}{2}dx+\int_{1}^{2}2\sin\frac{n\pi x}{2}dx=\frac{2}{n\pi}\left(1-2\cos n\pi+\cos\frac{n\pi}{2}\right)$

$$\therefore f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-2\cos n\pi+\cos\frac{n\pi}{2}}{n}\sin\frac{n\pi x}{2}\left(x\in(0,1)\cup(1,2)\right)$$

$$S(x)=\begin{cases} f(x) & x\in(0,1)\cup(1,2) \\ 0 & x=0,2 \\ \frac{3}{2} & x=1 \end{cases}$$

9. $\frac{dx}{dy}+\frac{1}{1+y}x=-y^2$,

$$x=e^{-\int\frac{1}{1+y}dy}\left[\int -y^2e^{\int\frac{1}{1+y}dy}dy+C\right]=\frac{1}{1+y}\left[\int -y^2(1+y)dy+C\right]=\frac{1}{1+y}\left[C-\frac{y^3}{3}-\frac{y^4}{4}\right]$$

10. $V=2\pi\int_0^1\left[\left(x^2+7\right)^2-\left(3x^2+5\right)^2\right]dx=\frac{512}{15}\pi.$

二、令 $f(x)=(1+x)^2[2\ln(1+x)-1]+1-4x\arctan x+2\ln\left(1+x^2\right)$

$f'(x)=4\left[(1+x)\ln(1+x)-\arctan x\right]$, 且 $f'(0)=0$

$f''(x)=4\left[\ln(1+x)+1-\frac{1}{1+x^2}\right]>0\Rightarrow f'(x)$ 单调减又 $f'(0)=0$，

故 $f'(x)<0$, 从而 $f(x)$ 单调减，又 $f(0)=0$, 故 $f(x)<0$, 证毕.

三、$b=3-a$, $y=ax^2+(3-a)x$, 另一交点横坐标为 $x=1-\frac{1}{a}$.

$$A(a)=\int_0^{1-\frac{1}{a}}\left[ax^2+(3-a)x-2x\right]dx=-\frac{(a-1)^3}{6a^2}$$

$A'(a)=-\frac{1}{6}\frac{a(a-1)(a+2)}{a^4}$，解得驻点为 $a=-2$，

因驻点唯一，且在驻点处取得极大值，所以在该点也取得最大值，故 $a=-2, b=3-a=5$

四、设 t 时刻车间内二氧化碳的含量为 $x(t)m^3$

$$x(t+\Delta t)-x(t)=10^3\left(0.04\%\cdot v\Delta t-\frac{x(t)}{10^4}\cdot v\Delta t\right)$$

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}+\dfrac{1}{10}x=\dfrac{4}{10}\\ x(0)=12\end{cases}$$，解此微分方程得，$x(t)=Ce^{-\frac{t}{10}}+4, C=8, x(10)=6.96$，

所以 10 分钟后车间二氧化碳的浓度约降到 0.0696%

五、$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=0<1, \therefore$ 收敛域为$(-\infty,+\infty)$，设和函数为 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{n!}\left(\dfrac{x}{2}\right)^n$

$$S(x)-S(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x\frac{n+1}{2^n n!}x^n dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\frac{x^{n+1}}{2^n}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^n=xe^{\frac{x}{2}}$$

$$S(x)=xe^{\frac{x}{2}}, x\in(-\infty+\infty)$$

六、由于 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=a(a>0)$，　　由题设条件知、

$$f(0)=0, f'(0)=a, \text{根据} f'(x) \text{的保号性，} \exists U(\delta), f'(x)>0, \therefore 0\le f\left(\frac{1}{n+1}\right)\le f\left(\frac{1}{n}\right)$$

故级数收敛，又 $\lim\limits_{a\to\infty}\dfrac{f\left(\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=a>0, \therefore \sum f\left(\dfrac{1}{n}\right)$ 发散. 从而原级数条件收敛.

2009 年

一、1、$\lim_{x\to 0^+} x\ln\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\left(1+e^{\frac{1}{x}}\right)}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$=1.

2、dy=（$\sqrt{x^2+a^2}+\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}+a^2\frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$） dx=$2\sqrt{x^2+a^2}$dx.

3、$\frac{dy}{dx}=\frac{3-3t^2}{2-2t}=\frac{3}{2}(1+t), \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{3}{2}\frac{dt}{dx}=\frac{3}{4(1-t)}$.

4、 ρ =$\lim_{n\to\infty}\lambda\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{\lambda}{e}$， λ ≤e 时，收敛， λ >e 时，发散.

5、原式=$\lim_{\xi\to 0^+}\frac{arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x(1-x)}}$dx=$\lim\limits_{\xi\to 0^+} arcsin\sqrt{x}\mid_0^{1-\xi}$=$\frac{\pi^2}{4}$.

6、$\int xarctanxdx=\int arctanxd\frac{x^2+1}{2}=\frac{x^2+1}{2}arctanx-\frac{x}{2}+C$.

7、原式=$\int_0^{\pi}\sqrt{sinx}\mid cosx\mid dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{sinx}cosxdx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\sqrt{sinx}(-cosx)dx=\frac{4}{3}$

8、∵f(x)为奇函数，∴a_n=0

$$b_n == \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sinn\pi dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} xsinn\pi \mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}（-\frac{\pi}{2n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{2}）$$

f(x)= $\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2}\sin(2n-1)x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n}sin2nx, x\in[-\pi，-\frac{\pi}{2}）$U（$-\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}$）U（$\frac{\pi}{2}$，π]

9、分离变量得，$\frac{dy}{y}=\frac{dx}{4x-x^2}$,积分得 y=C$\sqrt[4]{|\frac{x}{4-x}|}$

10、$V_y=\pi*2^2*\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\pi x^2dy-\pi*1^2*1=2\pi$

二、f(x)=ln$[4(x-2)+3]=\ln 3+\ln\left[1+\frac{4}{3}(x-2)\right]$

$$=\ln 3+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(\frac{4}{3})^n}{n}(x-2)^n(6')$$

$-1<\frac{4}{3}(x-2)\le 1$,收敛区间为$\frac{5}{4}<x\le\frac{11}{8}$ (8')

∴由 $y=\sin x^2(0\le x\le 1)$ 得：$y'=2x\cos x^2\ge 0$,∴ $y=\sin x^2$ 在[0,1]上单调递增,（2’）

所求面积 $S=S_1+S_2=\int_0^a(\sin a^2-\sin x^2)dx+\int_a^1(\sin x^2-\sin a^2)dx$ （3’）

$$=(2a-1)\sin a^2-\int_0^a\sin x^2dx=\int_a^1\sin x^2dx(0\le a\le 1)(3')$$

$\frac{ds}{da}=2a(2a-1)\cos a^2(5')$, $a<\frac{1}{2}$时，$\frac{ds}{da}<0, a>\frac{1}{2}$时，$\frac{ds}{da}>0$ (7')

∴s（a）在 $a=\frac{1}{2}$ 处取得极小值，据题意，$a=\frac{1}{2}$时，s 的值最小。

四.设物体在时刻 t 的温度为 T(t) ,由冷却定律及题设条件得，

$\frac{dT}{dt}=-k(T-30)$， $T(0)=100$ ，解之得：$T=Ce^{-kt}+30(6')$ 代之得，$C=$ 70，即

$T=30+70e^{-kt}$ 再由 $T(15)=70$ ，得 $k=\frac{1}{15}\ln\frac{7}{4}(7')$,即 $T=\frac{15}{\ln\frac{7}{4}}\ln\frac{70}{T-30}$

又 $T=40$,得 t≈52

五 $f_n(x)=x^2e^{-nx}$, $f_n'(x)=2xe^{-nx}-nx^2e^{-nx}$,令 $f_n'=0$,得 $x=\frac{2}{n}$

$f_n''(x)=2e^{-nx}-4nxe^{-nx}+n^2x^2e^{-nx}$， $f_n''(\frac{2}{n})<0,(4')$

$x=\frac{2}{n}$ 为 $f_n(x)$ 在$[0,+\infty)$上的唯一极大值，$\therefore\ f_n(x)\le f_n(\frac{2}{n})=\frac{4}{n^2}e^{-2}(6')$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\frac{1}{4}x^2<1$时收敛，$x=\pm2$时发散，收敛域为（-2, 2）(2')

令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}(2n-1)}{2^{2n-1}}x^{2n-2}(3')$

$\int_0^x s(t)dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}t^{2n-2dt}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\frac{x}{2})^{2n-1}(5')$

$\therefore\int_0^x S(t)dt=\frac{2x}{4+x^2}(7')$.故 $S(x)=(\frac{2x}{4+x^2})'=\frac{8-2x^2}{(4+x^2)^2}(8')$

六．方法一：$\int_a^b f(x)dx=\int_0^{\frac{a+b}{2}}+\int_{\frac{a+b}{2}}^b=\int_0^{\frac{b-a}{2}}[f(a+t)+f(b-t)](3')$

$=$t$[[f(a+t)+f(b-t)]\Big|_0^{\frac{b-a}{2}}-\int_0^{\frac{b-a}{2}}[f(a+t)+f(b-t)]dt$

$=f(\frac{a+b}{2})(b-a)-\frac{t^2}{2}[f'(a+t)-f'(b-t)]dt$

$f(\frac{a+b}{2})(b-a)-\frac{t^2}{2}[f'(a+t)-f'(b-t)]\Big|_0^{\frac{b-a}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{b-a}{2}}t^2[f''(a+t)+f''(b-t)]dt$

$=f(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{1}{2}[f''(a+\eta)+f''(b-\eta)]\int_0^{\frac{b-a}{2}}t^2dt,\eta\in[0,\frac{b-a}{2}]$

$=f(\frac{a+b}{2})(b-a)+\frac{1}{24}f''(\xi)(b-a)^3,\xi\in[a+\eta,b-\eta](6')$

方法 2：根据 taylor 公式

$f(x)=f(\frac{a+b}{2})+f'(\frac{a+b}{2})(x-\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2!}f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2(2')$

$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{2}\int_a^b f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2dx(4')$

$\because f''(x)$ 在$[a,b]$上连续，不妨设最值分别为 M 和 m，从而

$m\int(x-\frac{a+b}{2})^2dx\le\int_a^b f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})dx\le M\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx(4')$

$\therefore\int_a^b f''(\eta)(x-\frac{a+b}{2})^2dx=f''(3)\int_a^b(x-\frac{a+b}{2})^2dx=\frac{1}{12}f''(\xi)(b-a)^3$

故 $\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}(b-a)^3 f''(\xi)(6')$

方法 3：设 $f(x)$ 的原函数为 $F(x)$ ，则

$F'(x)=f(x),\int_a^b f'(x)dx=\int_a^b F'(x)dx=F(b)-F(a)$

对于函数 $F(x)$, 有 taylor 公式

$$F(b)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+F'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(b-\frac{a+b}{2}\right)+\frac{1}{2}F''\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-\frac{a+b}{2})^2$$
$$+\frac{1}{3!}F'''(\xi)(b-\frac{a+b}{2})^2$$
$$=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\left(\frac{b-a}{2}\right)+\frac{1}{6}f''(\xi)(\frac{b-a}{2})^3$$
$$F(a)=F\left(\frac{a+b}{2}\right)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\frac{a-b}{2}+\frac{1}{2}f'\left(\frac{a+b}{2}\right)(\frac{a-b}{2})^2+\frac{1}{6}f''(\xi_2)(\frac{a-b}{2})^3$$

于是， $F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{6}[f''(\xi_1)+f''(\xi_2)](\frac{b-a}{2})^3$ ，又 $f''(x)$连续，故必有 $\xi\in[a,b]$，使得$f''(\xi_1)+f''(\xi_2)=2f''(\xi)$。所以，命题成立。

2010 年

一. 填空：1. y=2x−1. 2. a=0，b=1 3. $\frac{67}{5}$

二. 单选： B C A

三. 1. $dy=\frac{xInx}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}dx.\lim\limits_{x\to1^+}\frac{dy}{dx}=+\infty.$

2. $\frac{dy}{dx}=-2t^3,\frac{d^2y}{dx^2}=-6t^2\frac{dt}{dx}=\frac{-6t^2}{e^{-t^2}},\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=1}=-6e$

3. 原式= $\int In(e^{xc}+1)d(e^x+1)=(e^x+1)In(e^x+1)-\int e^x dx=(e^x+1)In(e^x+1)-e^x+C$

4. 方程变形为 $y'-\frac{1}{2x}y=x,y=e^{\int\frac{1}{2x}dx}[xe^{-\int\frac{1}{2x}dx}dx+C]=\sqrt{x}(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+C)$

四. 1.（1） $f_n(x)=n.2^{-nx}.(f_n'(x)=-n^2.2^{-nx}In2<0),f_n(x)\le n.2^{-n\sigma},\rho=$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^{-(n+1)\sigma}}{n\cdot 2^{-n\sigma}}=2^{-\sigma}<1$ 收敛，据 M-判别法知，原级数在 $(\sigma,+\infty)$ 上一致收敛. 令

$2^{-x}=y,\sum\limits_{n=0}^{+\infty}y^n=\frac{1}{1-y}$，故 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}ny^n=\frac{y}{(1-y)^2}$，即 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}n2^{-nx}=\frac{2^{-x}}{(1-2^{-x})^2}=\frac{2^{-x}}{(2^x-1)^2}$.

(2)收敛域为[-2,2)，令 S(x)=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n*2^n}$，则 S（x）=$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\frac{x}{2})^n$

$[xS(x)]'=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{x}{2})^{n-1}=\frac{1}{2}*\frac{1}{1-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2-x}$

得$xS(x)=-\ln(2-x)+\ln 2$，S（x）=$\begin{cases}-\frac{1}{x}\ln\left(1-\frac{x}{2}\right),x\neq 0\\ \frac{1}{2} \qquad ,x=0\end{cases}$

2. 将作奇延拓，令 F(0)=0，$a_n=0$

$$b_n=\frac{2}{2}\int_0^2 f(x)sin\frac{n\pi}{2}xdx=\int_0^1 sin\frac{n\pi}{2}xdx+\int_1^2 2sin\frac{n\pi}{2}xdx$$

$$=\frac{n\pi}{2}cos\frac{n}{2}\pi+\frac{2}{n\pi}-4\frac{(-1)^n}{n\pi}$$

f(x)=$\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi}{2}x.\quad x\in(-\infty,+\infty)$且$x\neq 2k-1,k\in N_+$.

在 x=1 处收敛于$\frac{3}{2}$，故在 x=5 处也收敛于$\frac{3}{2}$，x=2k-1 时收敛于$\frac{3}{2}$.

3. f’(0)=$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(sin\frac{1}{x})\int_0^x sint^2dt}{x}$

$=\lim_{x\to 0}[\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(cos\frac{1}{x}\right)\int_0^x sintdt+\left(sin\frac{1}{x}\right)sinx^2]=0$

$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}[\left(-\frac{1}{x^2}\right)\left(cos\frac{1}{x}\right)\int_0^x sintdt+\left(sin\frac{1}{x}\right)sinx^2]=0$连续

4. I=$\int_0^{+\infty}\frac{xe^x}{(e^x+1)^2}dx=-\int_0^{+\infty}xd\frac{1}{e^x+1}=\frac{-x}{e^x+1}|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{dx}{1+e^x}=-\ln 1+e^{-x}|_0^{+\infty}=\ln 2$

5. 由抛物线过（0,0）得 c=0，过（1,2）点得 a+b=2，因 a<0 得 b>2.

于是 S=$\int_0^{-\frac{b}{a}}(ax^2+bx)dx=\frac{b^3}{6(b-2)^2}$,令 S’=0，得 b=6.

故当 a=-4，b=6，c=0 时，面积最小。

dV=2π xydx(7’)V=2π $\int_0^{\frac{3}{2}}(-4x^3+6x^2)dx=\frac{27}{8}$π

五、∵$\lim_{x\to a}\frac{f(2x-a)}{x-a}$存在. ∴f(a)=0　f(x)>f(a)=0

令 F(x)=$\int_a^x f(t)dt,F'(x)=f(x)>0,\frac{b^2-a^2}{F(b)-F(a)}\xrightarrow{Cauchy}\frac{2\xi}{f(\xi)}.\xi\in(a,b)$

2011 年

一.填空：1. k=2. 2. 2π 3. R=3 4. $\dfrac{2x\sin x^2}{1+\cos^2(x^2)}$

二.单选：1.B 2.B 3.D 4.B

三.1.原式=$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{2x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-1}{6x^2}$=-$\dfrac{1}{6}$

2.原式=-$\int\dfrac{xd\cos x}{\cos^5 x}=\dfrac{1}{4}\int xd\cos^{-4}x=\dfrac{x}{4\cos^4 x}-\dfrac{1}{4}\int\dfrac{dx}{\cos^4 x}$

$=\dfrac{x}{4\cos^4 x}-\dfrac{1}{4}\int(1+\tan^2 x)d\tan x=\dfrac{x}{4\cos^4 x}-\dfrac{1}{4}\tan x-\dfrac{1}{12}\tan^3 x+C$

3.原式=$2\int_1^4 Inxd\sqrt{x}=2\sqrt{x}Inx\Big|_1^4-2\int_1^4\dfrac{\sqrt{x}}{x}dx=4(2In2-1)$

4.

$\dfrac{dx}{dt}=2t^3Int^2,\dfrac{dy}{dt}=-2t^5Int^2,\dfrac{dy}{dx}=-t^2,\dfrac{d^2y}{dx^2}-2t\dfrac{dt}{dx}=$

$.\dfrac{-2t}{2t^3Int^2}=-\dfrac{1}{2t^2Int}$

5. $y'-\dfrac{3}{x}y=x^3e^x,y=e^{\int\frac{3}{x}dx}(\int x^3e^xe^{-\int\frac{3}{x}dx}dx+C)=x^3(e^x+C)$

6.因为 f（x）为偶函数，$b_n=0,a_n=\dfrac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos nxdx,a_0=\pi$

$a_n=\dfrac{2}{n\pi}\int_0^\pi xd\sin nx=\dfrac{2}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^\pi-\dfrac{2}{n\pi}\int_0^\pi\sin nxdx=\dfrac{2}{n^2\pi}\cos nx\Big|_0^\pi$

$=\dfrac{2}{n^2\pi}[\cos n\pi-1]=\dfrac{2}{n^2\pi}[(-1)^n-1]=\{\begin{matrix}0,n=2k\\ \dfrac{-4}{\pi(2k-1)^2},n=2k-1\end{matrix}$

因为 f（x）连续 所以 f（x）$=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(2k-1)^2}\cos(2k-1)x$

7.过曲线上（x，y）的切线方程为 $\pi - y = 2x(z-x)$，交点为（$\dfrac{x}{2}$，0）和（8,2x（8-x）$+x^2$）.S（x）= $\dfrac{1}{2}$（$8-\dfrac{x}{2}$）【2x（8-x）$+x^2$】. $S'(x)=\dfrac{3}{4}x^2-16x+64.x=\dfrac{16}{3}$，x=16.所求点为（$\dfrac{16}{3},\dfrac{256}{9}$）.

8.f（x）$=\dfrac{x+4}{(2x+1)(x-3)}=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{2x+1}=\dfrac{1}{-2+(x-1)}-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\frac{3}{2}+(x-1)}$

$$=-\frac{1}{2}.\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{3}.\frac{1}{1+\frac{2}{3}(x-1)}=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{x-1}{2})^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}[-\frac{2}{3}(x-1)]^n,|x-1|<\frac{3}{2}$$

9.（1）因为 $\left|\dfrac{f(x)}{x}\right|\le\dfrac{1}{2}[\dfrac{1}{x^2}+f^2(x)]$，而 $\int_1^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}dx$ 和 $\int_1^{+\infty}f^2(x)dx$ 都收敛。所以 $\int_1^{+\infty}\dfrac{f(x)}{x}dx$ 绝对收敛

（2）$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}dx=-\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\arctan x d(\frac{1}{x^2})=-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2}\arctan x\Big|_1^{+\infty}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2(1+x^2)}dx$

$$=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}\int_1^{+\infty}(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2})dx=\frac{\pi}{8}+\frac{1}{2}(\frac{-1}{x}-\arctan x)\Big|_1^{+\infty}=\frac{1}{2}$$

四. $\rho=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{|x|^n}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{|x|^{n-1}}{n2^n}}=\dfrac{|x|}{2}<1,$ 收敛域为 $[-2,2)$。设 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n}$，

$S'(x)=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}x^{n-1}=\dfrac{1}{1-x}.S(x)=-In(1-x)$，$|x|<1,S(\dfrac{x}{2})=\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^n}{n2^n}=x\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{x^{n-1}}{n2^n}$,

所以 $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{n-1}}{n2^n}=\begin{cases}\frac{1}{x}S(\frac{x}{2})=-\frac{1}{x}In(1-\frac{x}{2}),(x\ne0)\\ \frac{1}{2},(x=0)\end{cases}$

五.由 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=0$ 可得，$f(1)=0,f'(1)=0$. 所以 $\varphi(x)=\int_0^1 f'[1+(x-1)t]dt$

$\overset{1+(x-1)t=u}{=}\displaystyle\int_1^x f'(u)\frac{d\ u}{x-1}=\frac{f(x)}{x-1}$ 可知 $\varphi(1)=0$ 于是 $\varphi'(1)$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\varphi(x)-\varphi(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{(x-1)^2}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{2(x-1)}=\frac{1}{2}\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)-f'(1)}{x-1}=\frac{1}{2}f''(1)$$

$\lim_{x\to 1}\varphi'(x)=\lim_{x\to 1}[\frac{f'(x)}{x-1}-\frac{f(x)}{(x-1)^2}]=\frac{1}{2}f''(1)$，所以连续

更多精彩，尽在南洋书院学生会微信公众号的南卷汇专栏，欢迎通过公众号提供题目或反馈错题信息，南卷汇需要您的支持。