例1

已知 $f(x)=\begin{cases} g(x)\cos\dfrac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0 \end{cases}$

且 $g(0)=g'(0)=0$, 求 $f'(0)$.

例2 设 $y = f\left(\frac{3x-2}{3x+2}\right)$, $f'(x) = \arctan x^2$, 求 $\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$.

解 令 $u = \frac{3x-2}{3x+2} = 1 - \frac{4}{3x+2}$, 则

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(u) \cdot \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f'(u) \cdot \frac{12}{(3x+2)^2}$$

又当 $x = 0$ 时, $u = -1$.

$$\therefore \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0} = f'(-1) \cdot 3 = \arctan(-1)^2 \cdot 3 = \frac{3\pi}{4}.$$

例3 设 $f(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{e^x-1}{x}, & x>0 \end{cases}$，求 $f'(x)$.

解 当 $x<0$ 时，$f'(x)=(x)'=1$

当 $x>0$ 时，$f'(x)=\dfrac{e^x\cdot x-e^x+1}{x^2}$

当 $x=0$ 时，

$f(0^-)=\lim\limits_{x\to 0^-} x=0$ $\quad f(0^+)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

$\therefore$ $f(x)$ 在 $x=0$ 处不连续，从而不可导.

$$\therefore f'(x)=\begin{cases} 1, & x<0 \\ \dfrac{e^x x-e^x+1}{x^2}, & x>0 \end{cases}.$$

例4 求阿基米德螺线 $\rho = a\theta(a>0)$上，直角坐标为$(0,\frac{\pi a}{2})$的点处的切线方程 .

解 先写出曲线的参数方程: $\begin{cases} x = \rho\cos\theta = a\theta\cos\theta, \\ y = \rho\sin\theta = a\theta\sin\theta, \end{cases}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cancel{a}\sin\theta + \cancel{a}\theta\cos\theta}{\cancel{a}\cos\theta - \cancel{a}\theta\sin\theta} = \frac{\sin\theta+\theta\cos\theta}{\cos\theta-\theta\sin\theta}$$

直角坐标为 $(0,\frac{\pi a}{2})$的点对应的极角为 $\theta = \frac{\pi}{2}$

而 $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$

故所求切线方程为

$$y - \frac{a\pi}{2} = -\frac{2}{\pi}(x-0)$$

例5 设 $y=\sin^6 x+\cos^6 x$，求 $y^{(n)}$.

解 $y=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)\cdot(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)$$

$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-3\sin^2 x\cos^2 x$$

$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\cos 4x$$

$$y^{(n)}=\frac{3}{8}\cdot 4^n\cos(4x+n\frac{\pi}{2})$$

西安交通大学
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY

例6 设 $f(x)=(x^2-3x+2)^n\cos\dfrac{\pi x^2}{16}$，求 $f^{(n)}(2)$.

解 $f(x)=(x-2)^n(x-1)^n\cos\dfrac{\pi x^2}{16}$

各项均含因子 $(x-2)$

由莱布尼兹公式，得

$$f^{(n)}(x)=n!\,(x-1)^n\cos\frac{\pi x^2}{16}+\cdots\cdots\cdots$$

$$f^{(n)}(2)=n!\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}n!$$

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$$

例7 设 $y=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}$，求 $y^{(n)}$.

解 $y=\dfrac{4x^2-1}{x^2-1}=\dfrac{4x^2-4+3}{x^2-1}=4+\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1}\right)$

$$\because \left(\frac{1}{x-1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x-1)^{n+1}},\quad \left(\frac{1}{x+1}\right)^{(n)}=\frac{(-1)^n n!}{(x+1)^{n+1}},$$

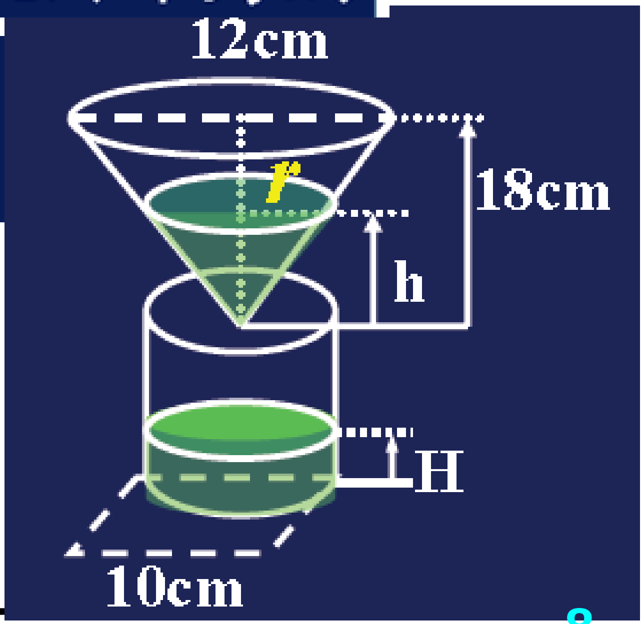
$$\therefore y^{(n)}=\frac{3}{2}(-1)^n n!\left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}}-\frac{1}{(x+1)^{n+1}}\right].$$

例8 液体从深为18cm，顶部直径为12cm 的正圆锥形漏斗，漏入直径为10cm的圆柱形桶中，开始时漏斗盛满液体，已知漏斗中液面深12cm时，液面下落速度为1cm/min，问此时桶中液面上升的速度是多少？

解 设桶中液面深为H，漏斗中液面深为h，

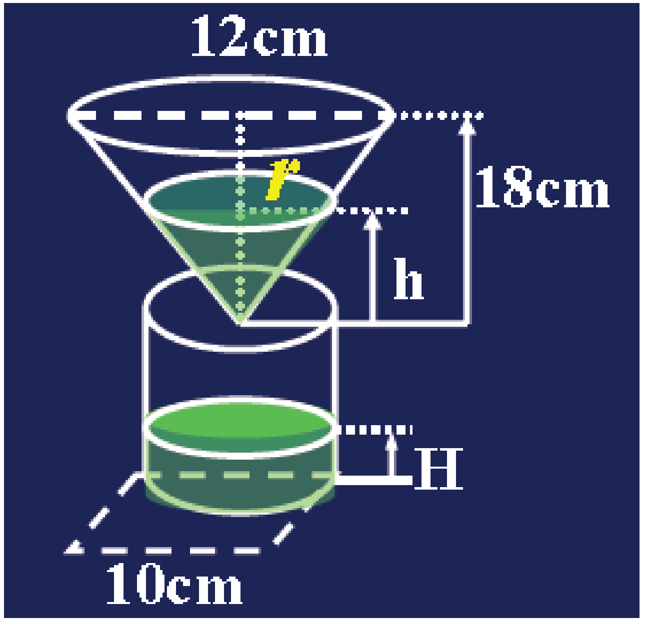
依题设，知 $\left.\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=12}=-1\ (\mathrm{cm}/\mathrm{min})$

需求：$\left.\dfrac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right|_{h=12}=?$



由 $V_{柱}+V_{锥}=V_0$（开始时的液体体积），得

$$25\pi H+\frac{1}{3}\pi r^2 h=V_0$$



$$\because\quad \frac{h}{18}=\frac{r}{6},$$

$$r=\frac{h}{3}$$

$$\therefore\quad 25\pi H+\frac{1}{27}\pi h^3=V_0$$

即 $25\pi H=V_0-\dfrac{1}{27}\pi h^3,$

两边对 t 求导得:

$$25\pi\left.\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right|_{h=12}=-\frac{1}{27}\pi 3h^2\left.\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}\right|_{h=12}$$

$$\left.\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}t}\right|_{h=12}=0.64(\mathrm{cm}/\mathrm{min})$$

例8 设 $f(\arctan\frac{y}{x})=xy$，$f(x)$可微，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

解（方法1）（利用一阶微分形式不变性）

$$\mathrm{d}[f(\arctan\frac{y}{x})]=\mathrm{d}(xy)$$

$$f'(\arctan\frac{y}{x})\mathrm{d}(\arctan\frac{y}{x})=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$$

记 $f'=f'(\arctan\frac{y}{x})$，则

$$f'\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2}=y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y}{x}\cdot\frac{f'+x^2+y^2}{f'-(x^2+y^2)}.$$

例8 设 $f(\arctan\frac{y}{x}) = xy$, $f(x)$可微, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$

解 (方法2) (隐函数求导法) $[f(\arctan\frac{y}{x})]' = (xy)'$

$$f'(\arctan\frac{y}{x})\cdot(\arctan\frac{y}{x})' = y + xy'$$

$$f'\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot(\frac{y}{x})' = y + xy'$$

$$f'\cdot\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2} = y + xy'$$

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}\cdot\frac{f'+x^2+y^2}{f'-(x^2+y^2)}.$$

例9 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xe^{2x}+xe^{x}-2e^{2x}+2e^{x}}{x\sin^{2}x}$. $\dfrac{0}{0}$

解

等价无穷小量代换

$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{xe^{x}+x-2e^{x}+2}{}}{x^{3}}\quad e^{x}$$

非零因子单独求极限

$$=\lim_{x\to 0}e^{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x}+x-2e^{x}+2}{x^{3}}\qquad \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x}+e^{x}+1-2e^{x}}{3x^{2}}\qquad \frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^{x}+2e^{x}-2e^{x}}{6x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{x}}{6}=\frac{1}{6}.$$

例10 由方程 $x^3+3y^3-3xy=0$所确定的函数在$x>0$且$x\neq y^2$范围内的极值点.

隐函数求极值

解 方程两边关于x求导一次，有

$$3x^2+3y^2\frac{dy}{dx}-3y-3x\frac{dy}{dx}=0,$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2}{y^2-x}$$

令$\dfrac{dy}{dx}=0$, 可得 $y=x^2$, 代入原方程，便得 $x^6-2x^3=0.$

驻点为$x=\sqrt[3]{2}.$

$$\left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=\sqrt[3]{2}}<0,$$

所以$\sqrt[3]{2}$是函数 $y=f(x)$ 的极大值点.

例10 设 $f(x)=nx(1-x)^n, n\in N$，试求 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上的最小值 $m(n)$，最大值 $M(n)$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} M(n)$.

解 $f'(x)=n(1-x)^n - nx\cdot n(1-x)^{n-1}$

$$=n(1-x)^{n-1}[1-(n+1)x].$$

令 $f'(x)=0$，得 $(0,1)$ 内的唯一驻点 $x=\dfrac{1}{n+1}$.

又 $f(0)=0$, $f(\dfrac{1}{n+1})=(\dfrac{n}{n+1})^{n+1}$, $f(1)=0$,

故所求的最小值为 $m(n)=f(0)=f(1)=0$,

最大值为 $M(n)=f(\dfrac{1}{n+1})=(\dfrac{n}{n+1})^{n+1}$. $\lim\limits_{n\to\infty} M(n)=e^{-1}$.

练习

设 $y = y(x)$由方程:

$$y' - y^2 - x = 0$$

所确定，且 $y'(x_0) = 0$. 问$y(x)$在x_0处是否取得极值？若取得极值，是极大值还是极小值？

解 $$y'(x) - y^2(x) - x = 0$$

$$y''(x) - 2y(x)y'(x) - 1 = 0$$

$$y''(x) = 2y(x)y'(x) + 1$$

$$\because \quad y''(x_0) = 2y(x_0)\underbrace{y'(x_0)}_{=0} + 1 = 1 > 0$$

$\therefore$ $y(x)$在 x_0 处取得极小值 .

例11 设 $f(x)$在某 $U(0)$内连续，且 $f(0)=0$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2.$ 问：$f(x)$在$x=0$处是否取得极值？

分析 依题设条件，只知

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{1-\cos x}\cdot\frac{1-\cos x}{x}=2\times 0=0$$

存在，但在 $\mathring{U}(0)$内不知 $f(x)$的可导性，

故不能用极值的充分判定法.

由极限的保号性知，$f(x)$在$x=0$处取得极小值

例12 在$1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \cdots, \sqrt[n]{n}, \cdots$中求出最大的一个数．

解 设$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$，求$f(x)$的最大值．

$$f'(x) = (e^{\frac{1}{x}\ln x})' = e^{\frac{1}{x}\ln x} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}} \cdot \frac{1-\ln x}{x^2};$$

令$f'(x) = 0$，解得$x = e$.

当$0 < x < e$时，$f'(x) > 0$；当$x > e$时，$f'(x) < 0$，

所以$f(x)$在$x = e$处取得极大值．又因为$f(x)$可导，

且只有一个驻点，所以此极大值就是最大值.

又$2 < e < 3$，因此最大值在$\sqrt{2}$与$\sqrt[3]{3}$之间，而

$(\sqrt{2})^6 = 8$，$(\sqrt[3]{3})^6 = 9$，可知$\sqrt[3]{3}$为数列中的最大数．

例13 设 $b > a > \mathrm{e}$，证明 $b^a < a^b$.

分析 要证 $b\ln a - a\ln b > 0$

可设 $f(x) = x\ln a - a\ln x \quad (x \geq a)$

解 令 $f(x) = x\ln a - a\ln x, x \in [a, +\infty)$,

则 $f'(x) = \ln a - \dfrac{a}{x} > 0$,

故 $f(x)$ 在 $[a, +\infty)$ 上单调递增. 故当 $b > a > \mathrm{e}$ 时,

$$f(b) > f(a) = 0,$$

即 $a\ln b < b\ln a$, 从而 $b^a < a^b$.

例14 证明：当 $0<x<\frac{\pi}{2}$ 时，$\tan x > x+\frac{1}{3}x^3$.

证 法1：用单调性

法2：用柯西中值定理证.

令 $f(x)=\tan x, F(x)=x+\frac{1}{3}x^3$,

在[0,1]区间上用柯西中值定理 得

$$\frac{\tan x-\tan 0}{x+\frac{1}{3}x^3-0}=\frac{\sec^2\xi}{1+\xi^2}=\frac{1+\tan^2\xi}{1+\xi^2}>1, \quad \xi\in(0,x)$$

故原不等式成立.

例15 设$1<a<b, f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$，求证:

$$0< f(b)-f(a)\le \frac{1}{4}(b-a).$$

解 由微分中值定理知存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)=\frac{\xi-1}{\xi^2}(b-a)>0.$$

记$g(x)=\frac{x-1}{x^2}$，只需证$g(x)\le\frac{1}{4}\quad(x>1)$.

$$g'(x)=\frac{2-x}{x^3}\begin{cases}>0 & 1<x<2\\ =0 & x=2\\ <0 & x>2\end{cases}$$

因此点$x=2$是函数$g(x)$在$(1,+\infty)$内的最大值点，

且$g(x)\le g(2)=\frac{1}{4}$，于是$f(b)-f(a)\le\frac{1}{4}(b-a)$.

例16 设函数$f(x)$在闭区间$[-1,1]$上具有三阶连续导数，且$f(-1)=0$, $f(1)=1$, $f'(0)=0$, 证明在开区间$(-1,1)$内至少存在一点 ξ, 使$f'''(\xi)=3$.

证

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}+\frac{f'''(\eta)x^3}{3!}$$

其中 η介于0和x之间，从而

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)-\frac{1}{6}f'''(\xi_1)\quad(-1<\xi_1<0)$$

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{6}f'''(\xi_2)\quad(0<\xi_2<1)$$

两式相减得 $f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)=6$

又$f'''(x)$在$[\xi_1,\xi_2]$上必有最小值 m和最大值 M,

从而 $m\le\frac{1}{2}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]\le M$,

由介值定理，$\exists\xi\in[\xi_1,\xi_2]\subset(-1,1)$, 使得$f'''(\xi)=3$.