西安交通大学考试题

成绩	

课　　程　高等数学 I

学　　院 ________________

专业班号 ________________　　考试日期　2019 年 11 月 3 日

姓　　名 ________________　　学　号 ________________　期中 √

一、 单选题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $x\to 0$ 时，变量 $\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}$ 是（　　）

A. 无穷小　B. 无穷大　C. 有界但非无穷小量　D. 无界但非无穷大

2. 设 $f(x)=\begin{cases}\sqrt{|x|}\sin\frac{1}{x^2}, & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$，则 $f(x)$ 在 $x=0$ 处（　　）

A. 极限不存在　　　B. 极限存在，但不连续

C. 连续　　　D. 以上结论都不对

3. 已知 $f(x)$ 是奇函数且 $x<0$ 时单增，则当 $x>0$ 时，$f(x)$ 是（　　）

A. 单增　B. 单减　C. 可能单增，可能单减　D. 既非单增也非单减

4. 设 $f(x),g(x)$ 都在 $x=a$ 处取得极大值，则函数 $F(x)=f(x)g(x)$ 在 $x=a$ 处（　　）

A. 必取得极大值　　　B. 必取得极小值

C. 不可能取极值　　　D. 是否取极值不能确定

5. 设 $f(x)$ 在 $x=a$ 的某邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x=a$ 处可导的一个充分条件是（　　）

A. $\lim\limits_{h\to+\infty} h\left[f\left(a+\frac{1}{h}\right)-f(a)\right]$ 存在　　B. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$ 存在

C. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a-h)}{h}$ 存在　　D. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(a)-f(a-h)}{h}$ 存在

二、 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. 设 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，则 $f(\ln x)$ 的定义域为 ________.

2. 已知 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x-a}\right)^x=9$，则 $a=$ ________.

3. 设 $f(x)=\begin{cases}(1+2x)^{1/x}, & x<0\\ b+1, & x=0\\ \frac{\sin x}{x}, & x>0\end{cases}$，当 $a=$ ____，$b=$ ____ 时，$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$

会转学术

内连续．

4. 函数 $f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}\sin x}{|x|}$ 的第一类间断点 $x=$____，第二类间断点 $x=$____.

5. 已知 $x\to 0$ 时，$\sin x$ 与 $\ln(1+ax)$ 是等价无穷小，则 $a=$_____ .

三、 计算题（每小题 7 分，共 35 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}\sin x-x(x+1)}{1-\cos x}$.

2. 设 $y=\sin^{2}\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$，求 y'.

3. 设函数 $y=y(x)$ 由 $\begin{cases} x-\mathrm{e}^{t}\sin t+1=0 \\ y=t^{3}+2t \end{cases}$ 确定，求 $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$.

4. 方程 $\sin(xy)-\ln\dfrac{x+1}{y}=1$ 表示平面上一条曲线，试求该曲线在 $x=0$ 处的切线方程与法线方程.

5. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}+\dfrac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{n+n}{n^2+n}\right)$.

四、 （本题 9 分）设 $n\in \mathrm{N}_+$，讨论函数 $f(x)=\begin{cases} x^n\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0 \\ 0\quad, & x=0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处的连续性与可导性以及 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性。

五、 证明下列各题（每小题 7 分,共 21 分）

1、设 $x_1 < -1$， $x_{n+1} + \sqrt{1 - x_n} = 0$，证明 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

2、证明不等式：当 $e < x_1 < x_2$ 时, 有 $\dfrac{\ln x_1}{\ln x_2} < \dfrac{x_2}{x_1}$.

3、设 $f\in C[0,1]$，f 在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=1, f(1)=\dfrac{1}{3}$。

证明：存在点 $\xi\in\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$，$\eta\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$，使得 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$。

课程名称：高等数学I上　课时：______　考试时间：2019 年11月3日

一. 选择题（$3' \times 5 = 15'$）

1. D　2. C　3. A　4. D　5. D

二. 填空题（$4' \times 5 = 20'$）

1. $[1+e]$ 2. $\ln 3$　3. $a=e^2,\ b=e^2-1$.　4. $x=0$ 和 $x=1$　5. $a=1$

三.（$7' \times 5 = 35'$）

1. 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x(\sin x+\cos x)-(2x+1)}{\sin x} \overset{(3')}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x\cos x-2}{\cos x} \overset{(6')}{=} 0 \ (7')$

2. $y' = \left[\sin 2\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)\right] \cdot \dfrac{-1-(1-\ln x)}{x^2} = \dfrac{\ln x-2}{x^2} \sin 2\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$ (7')

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2+2}{e^t(\sin t+\cos t)}$ (3')

$\dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{6te^t(\sin t+\cos t)-(3t^2+2)e^t \cdot 2\cos t}{e^{2t}(\sin t+\cos t)^2} \cdot \dfrac{1}{e^t(\sin t+\cos t)}$ (7')

4. 方程两边求导得：$[\cos(xy)](y+xy') - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y} \cdot y' = 0$ (3')

另外. 注意到 $x=0$ 时. $y=e$. (4')　$\therefore\ y'(0)=e(1-e)$ (5')

切线：$y-e=e(1-e)x$ (6')

法线：$y-e=\dfrac{1}{e(e-1)}x$ (7')

5. 注意到 $\frac{n^2+1+2+\cdots+n}{n^2+n} \le$ 原式 $\le \frac{n^2+1+2+\cdots+n}{n^2+1} = \frac{n^2+\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1} \to \frac{3}{2}\ (n\to\infty)$ (5')

$\therefore \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right)=\frac{3}{2}$ (7')

四. 1. $n=1$ 时. $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$ 连续 (3')

2. $n=2$ 时. $f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$. 可导 (6')

3. $n\ge 3$ 时. $f'(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}, & x\ne 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$\lim_{x\to 0} f'(x)=\left[\lim_{x\to 0}\left(nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}\right)=0\right]$ $f'(x)$ 连续. (9')

五. 1. 易见 $x_n<0\ (n\in N_+)$ $x_{n+1}-x_n=\sqrt{1-x_{n-1}}-\sqrt{1-x_n}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{1-x_{n-1}}+\sqrt{1-x_n}}$

$\therefore |x_{n+1}-x_n|<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}| \le \cdots \le \frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$ (3')

$\forall p\in N_+$. $|x_{n+p}-x_n|\le |x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$

$\le\left(\frac{1}{2^{n+p-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)|x_2-x_1|\le\frac{1}{2^n}|x_2-x_1|$ (5')

据 Cauchy 准则知收敛. 设 $\lim_{n\to\infty}x_n=l$. 并对两边取极限得: $l=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (7')

$\begin{cases} x>\frac{-1-\sqrt{5}}{2} & 4 \\ x<\frac{-1+\sqrt{5}}{2} & 4 \end{cases}$

不讨论: 只有极限:

2. 令 $f(x)=x\ln x$ (1') $f'(x)=1+\ln x>0$ ($\because x>e$) (4')

$\therefore$ 当 $e<x_1<x_2$ 时. $x_1\ln x_1<x_2\ln x_2$. $\frac{\ln x_1}{\ln x_2}<\frac{x_2}{x_1}$ (7')

3. 令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$ (2') $\frac{F(\frac{1}{2})-F(0)}{\frac{1}{2}-0}=F'(\xi)=f'(\xi)-\xi^2$ (4')
$0<\xi<\frac{1}{2}$

$\frac{F(1)-F(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}}=F'(\eta)=f'(\eta)-\eta^2$. (6') 即 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$ (7')

$\frac{1}{2}<\eta<1$

课程名称：高等数学I上　课时：______　考试时间：2019年11月3日

一. 选择题（$3' \times 5 = 15'$）

1. D　2. C　3. A　4. D　5 D

二. 填空题（$4' \times 5 = 20'$）

1. $[1,e]$ 2. $\ln 3$　3. $a=e^2$，$b=e^2-1$　4. $x=0$ 和 $x=1$　5. $a=1$

三.（$7' \times 5 = 35'$）

1. 原式 $= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x(\sin x+\cos x)-(2x+1)}{\sin x} \overset{(3')}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2e^x\cos x-2}{\cos x} \overset{(6')}{=} 0$ (7')

2. $y' = \left[\sin 2\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)\right] \cdot \dfrac{-1-(1-\ln x)}{x^2} = \dfrac{\ln x-2}{x^2}\sin 2\left(\dfrac{1-\ln x}{x}\right)$ (7')

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3t^2+2}{e^t(\sin t+\cos t)}$ (3')

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6te^t(\sin t+\cos t)-(3t^2+2)e^t\cdot 2\cos t}{e^{2t}(\sin t+\cos t)^2} \cdot \frac{1}{e^t(\sin t+\cos t)}$$ (7')

4. 方程两边求导得：$[\cos(xy)](y+xy') - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{y}\cdot y' = 0$ (3')

另外，注意到 $x=0$ 时，$y=e$ (4')　$\therefore y'(0)=e(1-e)$ (5)

切线：$y-e = e(1-e)x$ (6')

法线：$y-e = \dfrac{1}{e(e-1)}x$ (7')

5. 注意到 $\frac{n^2+1+2+\cdots+n}{n^2+n} \le$ 原式 $\le \frac{n^2+1+2+\cdots+n}{n^2+1} = \frac{n^2+\frac{1}{2}n(n+1)}{n^2+1} \to \frac{3}{2}\ (n\to\infty)$ (5')

$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n^2+1}+\frac{n+2}{n^2+2}+\cdots+\frac{n+n}{n^2+n}\right)=\frac{3}{2}$ (7')

四. 1. $n=1$ 时. $\lim\limits_{x\to0} f(x)=\lim\limits_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}=0=f(0)$ 连续 (3')

2. $n=2$ 时. $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0} x\sin\frac{1}{x}=0$. 可导 (6')

3. $n\ge3$ 时. $f'(x)=\begin{cases} nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}, & x\neq0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0} f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(nx^{n-1}\sin\frac{1}{x}-x^{n-2}\cos\frac{1}{x}\right)=0$ $f'(x)$ 连续. (9')

五. 1. 易见 $x_n<0$ $(n\in N_+)$ $x_{n+1}-x_n=\sqrt{1-x_{n-1}}-\sqrt{1-x_n}=\frac{x_n-x_{n-1}}{\sqrt{1-x_{n-1}}+\sqrt{1-x_n}}$

$\therefore |x_{n+1}-x_n|<\frac{1}{2}|x_n-x_{n-1}| \le \cdots \le \frac{1}{2^{n-1}}|x_2-x_1|$ (3')

$\forall p\in N_+$. $|x_{n+p}-x_n|\le|x_{n+p}-x_{n+p-1}|+|x_{n+p-1}-x_{n+p-2}|+\cdots+|x_{n+1}-x_n|$

$\le\left(\frac{1}{2^{n+p-1}}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)|x_2-x_1|\le\frac{1}{2^n}|x_2-x_1|$ (5')

据Cauchy收敛准则知 收敛. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l$. 等式两边取极限得: $l=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ (7')

2. 令 $f(x)=x\ln x$ (1') $f'(x)=1+\ln x>0$ ($\because x>e$) (4')

$\therefore$ 当 $e<x_1<x_2$ 时. $x_1\ln x_1<x_2\ln x_2$. $\frac{\ln x_1}{\ln x_2}<\frac{x_2}{x_1}$ (7')

3. 令 $F(x)=f(x)-\frac{1}{3}x^3$ (2') $\frac{F(\frac{1}{2})-F(0)}{\frac{1}{2}-0}=F'(\xi)=f'(\xi)-\xi^2$ (4')

$0<\xi<\frac{1}{2}$

$\frac{F(1)-F(\frac{1}{2})}{1-\frac{1}{2}}=F'(\eta)=f'(\eta)-\eta^2$. (6') 即 $f'(\xi)+f'(\eta)=\xi^2+\eta^2$. (7')

$\frac{1}{2}<\eta<1$