彭·高数

高等数学上期中答案详解

（2019 版）

彭康书院课外学业辅导学友互助团

目录

2018 年高数上期中试题答案

一、选择题

1. C

解析：$\lim\limits_{x\to 2^+}\arctan\dfrac{1}{2-x}=-\dfrac{\pi}{2}$ $\quad\lim\limits_{x\to 2^-}\arctan\dfrac{1}{2-x}=\dfrac{\pi}{2}$

2. D

解析：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2g(x)=0$ $\quad f(0)=0$ $\quad\therefore$ 连续

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{x\sqrt{x}}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0^-}-\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}xg(x)=0$ $\quad\therefore$ 可导

3. C

解析：$x^2-x-2=0\Rightarrow x=0$ 或 1 $\quad\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{(x^2-x-2)(x-x^2)}{x}=-2$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(x^2-x-2)(x^2-x)}{x}=2$ $\quad\therefore x=0$ 不可导

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x^2-x-2)(x^2-x)}{x-1}=-2$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x^2-x-2)(x-x^2)}{x-1}=2$ $\quad\therefore x=1$ 不可导

4. B

解析：$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}/(x-a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)-f'(a)}{x-a}=f''(a)=-1<0$

$f(a)=0$ $\quad f'(a)=0$ $\quad\therefore$ 取极大值

5. B

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{x}=f'(1)=-2=f'(5)$

6. A

二、解答题

1. 原式 $=\lim\limits_{x\to\infty}2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}=\lim\limits_{x\to\infty}2^{1-\frac{1}{2^n}}=2$

2. $dy=(\arctan x+\dfrac{x}{1+x^2}-\dfrac{x}{1+x^2})dx=\arctan x\,dx$

3. 原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cot x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-x\sin x-\cos x}{3x^2}=-\dfrac{1}{3}$

4. $y'e^y+6(y+xy')+2x=0$ $\quad y'=\dfrac{-2x-6y}{6x+e^y}$ $\quad$ 又 $y(0)=0$ $\quad\therefore y'(0)=0$

5. $\dot{x}=3t^2+9$ $\quad\dot{y}=2t-2$ $\quad\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\dfrac{2t-2}{3t^2+9}$ $\quad\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(\dfrac{2t-2}{3t^2+9}\right)'/\dot{x}=\dfrac{-6t^2+12t+18}{(3t^2+9)^3}$

6. 设 $f(x)=e^x-1-xe^x$ $\quad f'(x)=-xe^x<0$ $\quad\therefore f(x)$ 单调减 $\quad$ 又 $f(0)=0$

$\therefore$ 当 $x>0$ 时 $f(x)<0$ $\quad$ 即 $e^x-1-xe^x<0\Rightarrow e^x-1<xe^x$

7. $f'(x)=1-2\sin x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$ $\quad f(x)$ 先增后减，在 $\dfrac{\pi}{6}$ 处取最大值，$\quad f(\dfrac{\pi}{6})=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

[注：也可以算出端点值进行比较]

8. $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin ax=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}e^{2x}+b=b+1$ $\quad\therefore b+1=0\Rightarrow b=1$

$f(0)=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin ax}{x}=a$ $\quad\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2$ $\quad\therefore a=2$ $\quad f'(0)=2$

当 $x>0$ 时， $f'(x)=2\cos 2x$；当 $x<0$ 时， $f'(x)=2e^{2x}$ $\therefore f(x)=\begin{cases}2\cos 2x & x>0\\ 2e^{2x} & x\le 0\end{cases}$

9. (1) 定义域：$\{x|x\neq -1\}$ $f'(x)=\dfrac{4x(x+1)}{4(x+1)^4}=\dfrac{x}{(x+1)^3}$ $f'(x)=0\Rightarrow x=0$

当 $x<-1$ 时， $f'(x)>0$；当 $-1<x<0$ 时， $f'(x)<0$；当 $x>0$ 时， $f'(x)>0$

$\therefore$ 增区间：$(-\infty,-1)$，$(0,+\infty)$ 减区间：$(-1,0)$ 极小值： $f(0)=0$ 无极大值

(2) $f''(x)=\dfrac{1-2x}{(x+1)^4}=0\Rightarrow x=\dfrac{1}{2}$ 凹区间：$(-\infty,-1)$，$(-1,\dfrac{1}{2})$ 凸区间：$(\dfrac{1}{2},+\infty)$ 拐点：$(\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{18})$

$\lim\limits_{x\to -1}=\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}=+\infty$ $\lim\limits_{x\to\infty}=\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2(x+1)^2}=0$ $\lim\limits_{x\to\infty}=f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{2(x+1)^2}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore$ 渐近线：$x=-1$(垂直渐近线)；$y=\dfrac{1}{2}$(水平渐近线)

10. 证明：$f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\dfrac{f'''(\xi)}{6}x^3=\dfrac{f''(0)}{2}x^2+\dfrac{f'''(\xi)}{6}x^3$

$\begin{cases}f(1)=\dfrac{f''(0)}{2}+\dfrac{f'''(\xi_1)}{6} & \xi_1\in(0,1)\\ f(-1)=\dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{f'''(\xi_2)}{6} & \xi_2\in(-1,0)\end{cases}$ 两式相减：$f(1)-f(-1)=\dfrac{1}{6}[f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)]=1$

令 $f'''(\eta)=\max\{f'''(\xi_1),f'''(\xi_2)\}$，则 $f'''(\eta)>\dfrac{f'''(\xi_1)+f'''(\xi_2)}{2}=3$ $\eta\in(-1,1)$

11. $\because f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续 $\therefore\exists\eta$ 使得 $f(\eta)=\dfrac{1}{2}$

由拉格朗日中值定理：$\begin{cases}\dfrac{f(\eta)-f(0)}{\eta}=f'(x_1) & x_1\in(0,\eta)\\ \dfrac{f(1)-f(\eta)}{1-\eta}=f'(x_2) & x_2\in(\eta,1)\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{f'(x_1)}+\dfrac{1}{f'(x_2)}=2$

2017 年高数上期中试题答案

一、填空题

1. e^2

解析：$\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{1}{x}\ln(1+2xe^x)}=\lim\limits_{x\to 0}e^{\frac{2xe^x}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}e^{2e^x}=e^2$

2. 3

解析：$\sqrt[n]{3^n}<\sqrt[n]{1+2^n+3^n}<\sqrt[n]{3^n+3^n+3^n}$ $\because\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{3^n}=3$，$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt[n]{3\cdot 3^n}=3$ 由夹逼准则知原极限为 3

3. $\dfrac{1}{3}$

解析：$y'=\dfrac{2}{3}(x+e^{-\frac{x}{2}})^{-\frac{1}{3}}(1-\dfrac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}})=\dfrac{1}{3}$

4. 0；1

解析：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=b$ $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=1$ $\therefore b=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-x^2-1}{x}=0$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{e^{ax}-1}{x}=a$ $\therefore a=0$

5. -1；3

解析：$y''=6ax+2b=0\Rightarrow x=-\dfrac{b}{3a}=1$ 且 $2=a+b$ $\therefore a=-1,b=3$

二、选择题

1. D

解析：$\ln(1+2\sin x)\sim 2\sin x\sim 2x$

2. C

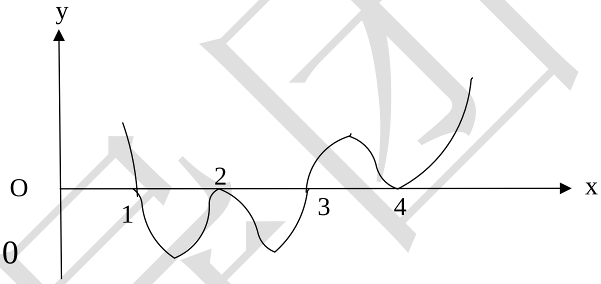
解析：$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{|x|}\sin\dfrac{1}{x^2}=0$（因为$\sin\dfrac{1}{x^2}$有界） $\therefore$连续

3. D

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{\frac{1}{2}x^2}=2\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x^2}=1\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}/x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)=1>0$ $f(0)=0$ $f'(0)=0$ $\therefore x=0$处取极小值

4. C



解析：根据“奇过偶不过”画草图：

容易看出$x=3$为拐点

证明：令$g(x)=(x-1)(x-2)^2(x-4)^4$，则$y=(x-3)^3g(x)$

$y'=3(x-3)^2g(x)+(x-3)^3g'(x)$

$y''=6(x-3)g(x)+6(x-3)^2g'(x)+(x-3)^3g''(x)$ $y''(3)=0$

$y''=6g(x)+18(x-3)g'(x)+9(x-3)^2g''(x)+(x-3)^3g'''(x)$ $y'''(3)=6g(3)=2$ 故$x=3$为拐点

[注：该点的二阶导数为0，三阶导数不为0，是该点为拐点的充分条件。对于幂函数的n重根，若$n\geq 3$且为奇数，则此n重根为函数的拐点。]

三、解答题

1. 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos x}{x\tan x(\sqrt{1+x\sin x}+\sqrt{\cos x})}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x\sin x-\cos x}{2x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x+x\cos x+\sin x}{4x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos x+\cos x-x\sin x}{4}=\dfrac{3}{4}$

2. $y'=\dfrac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}}{1+x^2-1}-\dfrac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{x\ln x}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}=\dfrac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$

3. 原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x(\sin x+\cos x)-2x-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos xe^x-2}{1}=0$

4. $\ln y^x=\ln e^{x+y}\Rightarrow x\ln y=x+y\Rightarrow\ln y+\dfrac{x}{y}y'=1+y'\Rightarrow dy=\dfrac{y(\ln y-1)}{y-x}dx$

5. $\dot{x}=2t$，$\dot{y}=-\sin t$ $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=-\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin t}{t}$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\left(-\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin t}{t}\right)'/\dot{x}=-\dfrac{1}{4}\dfrac{t\cos t-\sin t}{t^3}=\dfrac{2}{\pi^3}$

6. $y'=4x^3(12\ln x-7)+x^4\cdot\dfrac{12}{x}=16x^3(3\ln x-1)$ $y''=16\left[3x^2(3\ln x-1)+x^3\cdot\dfrac{3}{x}\right]=144x^2\ln x=0\Rightarrow x=1$

$\therefore$凹区间$(1,+\infty)$ 凸区间$(0,1)$ 极点$(1,-7)$

7. $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\dfrac{\pi}{x^2-4}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(1+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}=0$ $\therefore x=0$为跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\lim\limits_{x\to 2}\sin\dfrac{\pi}{x^2-4}$不存在 $\therefore x=2$为振荡间断点

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(1+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{-\frac{\pi}{2}\sin(\frac{\pi}{2}x)}=-\dfrac{2}{\pi}$ $\therefore x=-1$ 为可去间断点

$\lim\limits_{x\to 1-2k} f(x)=\lim\limits_{x\to 1-2k}\dfrac{x(1+x)}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}=\infty$ $\therefore x=1-2k\ (k=2,3,4...)$ 为无穷间断点

连续区间为 R 除去上述间断点

8. （1） $f(-1)=-f(1)=-1$ 令 $F(x)=f(x)-x$ $F(0)=0$ $F(1)=0$

由罗尔定理：$\exists\xi\in(0,1)$ 使 $F'(\xi)=0$ 即 $f'(\xi)-1=0\Rightarrow f'(\xi)=1$

[注：由拉格朗日中值定理：$\dfrac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=f'(\xi)=1$，但 $\xi\in(-1,1)$ 不在题中要求范围]

（2）由（1）知 $f'(\xi)=1$，由奇函数性质知，$f'(-\xi)=1$ 令 $G(x)=e^x[f'(x)-1]$

$F(\xi)=F(-\xi)=0$ 由罗尔定理：$\exists\eta\in(-\xi,\xi)$ 使 $G'(\eta)=0$

即 $e^\eta[f''(\eta)+f'(\eta)-1]=0\Rightarrow f''(\eta)+f'(\eta)=1$

[注：解此类题的技巧在于辅助函数的构建]

2016 年高数上期中试题答案

一、填空题

1. $a=1$

解析：$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{a-x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt{a-x})(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})}{x(\sqrt{a}+\sqrt{a-x})}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}\cdot\dfrac{x}{\sqrt{a}+\sqrt{a-x}}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\cos x}{x+2}=\dfrac{1}{2}$ $\therefore\dfrac{1}{2\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2}$ $a=1$

2. $a=-2$

解析：$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\cos 2x+2ae^{2ax}}{1}=2+2a$ $\therefore 2+2a=a$ $a=-2$

3. $(-10,54)$

解析：$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x}}{\dot{x}^3}=\dfrac{2(3t^2+9)-6t(2t-2)}{(3t^2+9)^3}\ge 0$ 解得：$1\le t\le 3$

又 $x=t^3+9t$ 单调增 $\therefore -10<x<54$ （凹凸区间一般不考虑端点）

4. 1

解析：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^x-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(\ln x+1)e^{x\ln x}}{\ln x+1}=\lim\limits_{x\to 1}e^{x\ln x}=1$

5. $y=x+\dfrac{1}{e}$

解析：设渐近线为 $y=kx+b$，则 $k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\ln(e+\frac{1}{x})}{x}=1$

$b=\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim\limits_{x\to\infty}[x\ln(e+\dfrac{1}{x})-x]=\lim\limits_{x\to\infty}x\ln(1+\dfrac{1}{ex})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{e}\ln(1+\dfrac{1}{ex})^{ex}=\dfrac{1}{e}$

二、选择题

1. D

解析：设 $\varphi(x)$ 在 x_0 处间断，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}{f(x_0)}\ne\dfrac{\varphi(x_0)}{f(x_0)}$.

A 反例：若 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$，$f(x)=1$，则 $\varphi[f(x)]=\varphi(1)=1$ 无间断点

B 反例：若 $\varphi(x)=\begin{cases}x+1, & x\ge 0\\ x-1, & x<0\end{cases}$，则 $\lim\limits_{x\to 0}[\varphi(x)]^2=1=[\varphi(0)]^2$ 无间断点.

C 反例：若 $\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\ne 0\\ 0, & x=0\end{cases}$， $f(x)=1$，则 $f[\varphi(x)]=1$ 无间断点.

2. D

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-f'(1-x)\cdot(-1)}{2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(1-x)}{2}=\dfrac{f'(1)}{2}=-1$ $\qquad\therefore f'(1)=-2$

3. B

解析：同 2018 年选择题第 4 题

4. D

解析：$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}}=0$ $\quad\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}x^2g(x)=0$ $\qquad\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处连续

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}-0}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0$$

$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x^2g(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}xg(x)=0$ $\qquad\therefore f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

5. C

解析：对 A、B，若 $f(x)=1$，则 $f''(x_0)=f'(x_0)=0$ $\qquad$ 故 A、B 错误

对 D， $f(x)$ 的最大值可在端点处 $x=a$ 或 $x=b$ 取到.

三、计算题

1. $-\dfrac{1}{6}$

解析：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arctan x-x}{\ln(1+2x^3)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{1+x^2}-1}{\frac{6x^2}{1+2x^3}}=\lim\limits_{x\to 0}-\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1+2x^3}{1+x^2}=-\dfrac{1}{6}$

2. $2dx$

解析：$dy=\left[\dfrac{2}{\cos^2 2x}+2^{\sin x}(\ln 2)\cos x\right]dx$ $\qquad\therefore dy|_{x=\frac{\pi}{2}}=(2+0)dx=2dx$

3. -2

解析：$\because e^y+6xy+x^2-1=0$ $\qquad\therefore y(0)=0$

$\because y'e^y+6(y+xy')+2x=0$ $\qquad\therefore y'(0)=0$

$\because y'^2e^y+y''e^y+6(y'+y'+xy'')+2=0$

4. $x=0$ 为跳跃间断点； $x=-1$ 为可去间断点；

$x=-(2k+1)$,k=1,2,$\cdots$ 为无穷间断点； $x=2$ 为震荡间断点.

解析： $f(0)=-\sin\dfrac{1}{4}$ $\qquad\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x(x+1)}{\cos\frac{\pi x}{2}}=0\ne f(0)$ $\qquad\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\dfrac{1}{x^2-4}=f(0)$

$\therefore x=0$ 处不连续，为跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x(x+1)}{\cos\frac{\pi x}{2}}=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2x+1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}}=\dfrac{2}{\pi}$ $\qquad\therefore x=-1$ 为可去间断点

当 $\cos\dfrac{\pi x}{2}=0$ 时， $\lim\limits_{x\to 2k+1}f(x)=\infty$ $\qquad\therefore x=-(2k+1)$,k=1,2,$\cdots$ 为无穷间断点

当 $x=2$ 时，$x^2-4=0$，此时 $\lim\limits_{x\to2}f(x)=\lim\limits_{x\to2}\sin\dfrac{1}{x^2-4}$ 不存在　　　$\therefore x=2$ 为振荡间断点

5. （1）$x\neq0$ 时 $f'(x)=\dfrac{(g'(x)+e^{-x})x-(g(x)-e^{-x})}{x^2}$

$x\neq0$ 时 $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x}-0}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g(x)-e^{-x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g'(x)+e^{-x}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g''(0)-1}{2}$

（2）$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{(g'(x)+e^{-x})x-(g(x)-e^{-x})}{x^2}, & x\neq0\\ \dfrac{g''(0)-1}{2}, & x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(g'(x)+e^{-x})x-g(x)+e^{-x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(g'(x)+e^{-x})+x(g''(x)-e^{-x})-g'(x)-e^{-x}}{2x}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{g''(x)-e^{-x}}{2}=\dfrac{g''(0)-1}{2}=f'(0)$　　$\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续，即在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续

6. 同 2018 年解答题第 9 题

7. 同 2018 年解答题第 10 题

8. 设 $F(x)=e^{-x}f(x)$，则存在 η 使 $\dfrac{F(b)-F(a)}{b-a}=F'(\eta)$

即 $\dfrac{e^{-b}f(b)-e^{-a}f(a)}{b-a}=e^{-\eta}\left[f'(\eta)-f(\eta)\right]$　　　$\therefore e^{-\eta}\left[f'(\eta)-f(\eta)\right]=\dfrac{e^{-b}-e^{-a}}{b-a}$

设 $G(x)=e^{-x}$，则存在 ξ 使 $\dfrac{G(b)-G(a)}{b-a}=G'(\xi)$ 即 $\dfrac{e^{-b}-e^{-a}}{b-a}=-e^{-\xi}$

$\therefore e^{-\eta}\left[f'(\eta)-f(\eta)\right]=-e^{-\xi}$　　　$e^{\xi-\eta}\left[f(\eta)-f'(\eta)\right]=1$

2015 年高数上期中试题答案

一、填空题

1. $a=b$

解析：$f(0)=a$　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin bx}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{bx}{x}=b$　　$\therefore a=b$

1. 1

解析：原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln(1+\tan x)}-1}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+\tan x)}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\ln(1+\tan x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

2. $y=x-1$

解析：设 $y=kx+b$　　$k=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+1}{x^2+x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1+\dfrac{1}{x}}=1$　　$b=\lim\limits_{x\to\infty}(y-kx)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x+1}{x+1}=-1$

3. $(-\infty,2]$

解析：$y''=(x-2)e^{-x}\le0$　　$\therefore x\le2$

4. e

解析：$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{e^x-a}{x(x-1)}$ 极限存在　　$\therefore a=e$

二、选择题

1. B

同 2016 年选择题第 1 题

2. A

同 2016 年选择题第 2 题

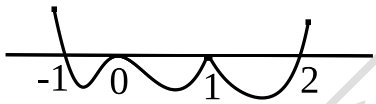
3. C

解析：不妨取 $n=3$， $f''(x)=2f(x)\cdot f'(x)=2f^3(x)$ $\quad f'''(x)=6f^2(x)\cdot f'(x)=6f^4(x)$

归纳法知： $f^n(x)=6f^2(x)\cdot f'(x)=n![f(x)]^{n+1}$

4. B

解析： $f(x)=(x-2)(x+1)\left|x(x-1)(x+1)\right|$ 　　草图：



由图知不可导点为 $x=0$ 和 $x=1$

5. D

解析：同 2016 年选择题第 3 题

三、计算题

1. $e^{-\frac{1}{6}}$

解析： $\lim\limits_{x\to\infty}(x\sin\frac{1}{x})^{x^2}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x^2\ln(x\sin\frac{1}{x})}$ 　令 $t=\frac{1}{x}$，则 $x=\frac{1}{t}$ 　原式 $=\lim\limits_{t\to0}e^{\frac{1}{t^2}\ln\frac{\sin t}{t}}=\lim\limits_{t\to0}e^{\frac{\ln\sin t-\ln t}{t^2}}$

$$\lim_{t\to0}\frac{\ln\sin t-\ln t}{t^2}=\lim_{t\to0}\frac{\frac{\cos t}{\sin t}-\frac{1}{t}}{2t}=\lim_{t\to0}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^2\sin t}=\lim_{t\to0}\frac{t\cos t-\sin t}{2t^3}=\lim_{t\to0}\frac{-t\sin t}{6t^2}=-\frac{1}{6}$$

2. $-3(\arcsin\frac{1}{x})^2\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ 　$(x>1或x<-1)$

解析： $y'=3(\arcsin\frac{1}{x})^2\frac{-\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}=-3(\arcsin\frac{1}{x})^2\frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$ 　$(x>1或x<-1)$

3. $y=\frac{e}{2}(x-3)+1$

解析： $t=0$ 时 $x=3,y=1$ 　$\dot{x}|_{t=0}=6t+2=2$ 　$\dot{y}e^y\sin t+e^y\cos t-\dot{y}=0$ 　$\dot{y}|_{t=0}=e$

$\therefore\frac{dy}{dx}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{e}{2}$ 　　切线方程为 $y=\frac{e}{2}(x-3)+1$

4. $\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$

解析： $\frac{1}{1+(\frac{y}{x})^2}\cdot\frac{y'x-y}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}$ 　$\frac{y'x-y}{x^2+y^2}=\frac{x+yy'}{x^2+y^2}$ 　$y'x-y=x+yy'\Rightarrow y'=\frac{x+y}{x-y}$

$$y'+y''x-y'=1+y'^2+yy''\Rightarrow y''=\frac{y'^2+1}{x-y}=\frac{(\frac{x+y}{x-y})^2+1}{x-y}=\frac{2(x^2+y^2)}{(x-y)^3}$$

5. （1） $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$ ，定义域 $(-\infty,0]$ 　（2） $-\frac{1}{4\sqrt{\ln2}}$

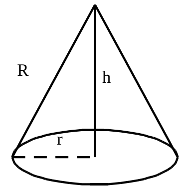
解析：（1） $f[\varphi(x)]=e^{\varphi^2(x)}=1-x$ 　又 $\varphi(x)\geq0$ 　$\therefore\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$ 　定义域 $(-\infty,0]$

（2） $\varphi'(x)=\frac{1}{2\sqrt{\ln(1-x)}}\cdot\frac{-1}{1-x}$ 　$\therefore\varphi'(-1)=-\frac{1}{4\sqrt{\ln2}}$

6. $(2-\frac{2\sqrt{6}}{3})\pi$

解析：$\begin{cases} 2\pi r = R\theta \\ h=\sqrt{R^2-r^2} \end{cases}$ $\quad V=\dfrac{\pi}{3}r^2h=\dfrac{\pi}{3}(\dfrac{R\theta}{2\pi})^2\sqrt{R^2-(\dfrac{R\theta}{2\pi})^2}=\dfrac{R^3}{24\pi^2}\theta^2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}$

$V'=\dfrac{R^3}{24\pi^2}\left(2\theta\sqrt{4\pi^2-\theta^2}+\dfrac{-2\theta\cdot\theta^2}{2\sqrt{4\pi^2-\theta^2}}\right)=0 \quad \theta=0$ 或 $\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\pi \quad \therefore \varphi=2\pi-\theta=(2-\dfrac{2\sqrt{6}}{3})\pi$ 时容积最大



7. （1）假设存在 x_0，使 $g(x_0)=0$，$(a<x_0<b)$，则 $g(a)=g(x_0)=g(b)=0$

由罗尔定理知：存在 x_1,x_2 使 $g'(x_1)=g'(x_2)=0$，$(a<x_1<x_0, x_0<x_2<b)$

$\therefore$ 存在 x_3，使 $g''(x_3)=0$，$(x_1<x_3<x_2)$ 与 $g''(x)\neq 0$ 矛盾

$\therefore$ 假设不成立　　　故在 (a,b) 内 $g(x)\neq 0$.

（2）令 $F(x)=f(x)g'(x)-g(x)f'(x)$，则 $F(a)=F(b)=0$

由罗尔定理知：存在 $\xi\in(a,b)$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f(\xi)g''(\xi)-g(\xi)f''(\xi)=0$

又 $g(x)\neq 0$，$g''(x)\neq 0$　　　$\therefore \dfrac{f(\xi)}{g(\xi)}=\dfrac{f''(\xi)}{g''(\xi)}$

8. $\because f''(x)<0 \quad \therefore x>0$ 时 $f'(x)$ 为减函数　　又 $f'(a)<0 \ \therefore f'(x)<0 \ \therefore f(x)$ 在 $(a.+\infty)$ 上单调递减

当 $x_0=a+\dfrac{f(a)}{|f'(a)|}$ 时，存在 $a<x_1<x_0$ 使 $f'(x_1)=\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}$　又 $f'(x)$ 为减函数　　$\therefore f'(x_1)<f'(a)$

即 $\dfrac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}<f'(a) \qquad \dfrac{f(x_0)-f(a)}{\dfrac{f(a)}{|f'(a)|}}<f'(a) \qquad f(x_0)-f(a)<f'(a)\cdot\dfrac{f(a)}{|f'(a)|}$

$f(x_0)-f(a)<f'(a)\cdot\dfrac{f(a)}{-f'(a)}$　　　$\therefore f(x_0)<0$ 又 $f(a)>0$，故在 (a,x) 中必有一实根

2014 年高数上期中试题答案

一、填空题

1. $\dfrac{5}{2}$

解析：原式$=\lim\limits_{n\to\infty}(2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2^n}}+\dfrac{(n-\sqrt{n^2-n})(n+\sqrt{n^2-n})}{n+\sqrt{n^2-n}})=\lim\limits_{n\to\infty}(2^{1-\frac{1}{2^n}}+\dfrac{n}{n+\sqrt{n^2-n}})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}2^{1-\frac{1}{2^n}}+\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}} \quad =\dfrac{5}{2}$

2. 0 或 1

解析：$x(e^{\frac{1}{x}}-e)=0\Rightarrow x=0$ 或 $x=1$

3. $-2014!$

解析：$y=\dfrac{1}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{1}{x+1})$　　　$\because \left(\dfrac{1}{x}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{x^{n+1}}$

$\therefore \left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{(x-1)^{n+1}}$　　　$\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{(n)}=(-1)^n\dfrac{n!}{(x+1)^{n+1}}$

$y^{(n)}=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{1}{x-1}\right)^{(n)}-\left(\dfrac{1}{x+1}\right)^{(n)}\right]$　　　$\therefore y^{(2014)}(0)=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{2014!}{-1}-\dfrac{2014!}{1}\right]=-2014!$

4. $\dfrac{\pi}{2}dx$

解析：令 $z=2x-1$，则 $\begin{cases} y=f(z) \\ z=2x-1 \end{cases}$

$x=0$ 时 $z=-1$ $\quad dy\big|_{x=0}=\arctan z^2dz\big|_{z=-1}=\frac{\pi}{4}dz=\frac{\pi}{4}d(2x-1)=\frac{\pi}{2}dx$

二、选择题

1. D

解析：例如：若 $a_n=\sin\frac{n\pi}{2}$，$b_n=\frac{1}{n\sin\frac{\pi}{2}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n,\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 均不存在，但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nb_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

2. C

解析：若取 $x=\frac{1}{n\pi}$，则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}n\pi\sin n\pi=0$

若取 $x=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}$ 则 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}(2n\pi+\frac{\pi}{2})\sin(2n\pi+\frac{\pi}{2})=\infty$ $\quad\therefore f(x)$ 无界但不是无穷大

3. C

解析：$\ln\left(\cos x+2x^2-1+1\right)\sim\cos x+2x^2-1\sim kx^2$

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x+2x^2-1}{kx^2}=\lim_{x\to0}\frac{-\sin x+4x}{2kx}=\lim_{x\to0}\frac{-\cos x+4}{2kx}=\frac{3}{2k}$$

4. B

解析：$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)}{x}>0$ $\quad\therefore$ 当 $x>0$ 时，$f(x)>0$

5. A

解析：若 $f''(x)+\left[f'(x)\right]^3=\frac{1-\cos x}{x^2}$，则 $f''(0)+\left[f'(0)\right]^3=\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x^2}=\frac{1}{2}$

$\therefore f''(0)=\frac{1}{2}>0$ $\quad$ 又 $f'(0)=0$ $\quad\therefore x=0$ 为极小值点

三、判断题

1. ×

解析：例如：$y=\frac{1}{x}$，$a=0$，$b=1$ 时，在 $\left[\delta,\ 1-\delta\right]$ 上一致连续，而在 $(0,1)$ 上不一致连续.

2. √

解析：设 $x\in\left[x_1,\ x_2\right]$，由凸函数定义可知：$f(x)\le\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$ 其中 $\lambda=\frac{x_2-x}{x_2-x_1}$

带入上式：$(x_2-x_1)f(x)\le(x_2-x)f(x_1)+(x-x_1)f(x_2)$ $\quad$ 化简得：$\frac{f(x)-f(x_1)}{x-x_1}\ge\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}$

令 $x_1=a$，$x_2=a+\Delta x$，则 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\ge\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{x+\Delta x-x}$

当 $\Delta x\to0$ 时：$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}<f'(a)$ $\quad\therefore f(x)\ge(x-a)f'(a)+f(a)$

四、计算题

1. $\frac{1}{L}$

解析：由数学归纳法，假设 $x_k=\frac{2^{2^{k-1}}-1}{2^{2^{k-1}}L}$，带入 $x_{n+1}=x_n(2-Lx_n)$，得 $x_{k+1}=\frac{2^{2^k}-1}{2^{2^k}L}$

又 $x_1=\dfrac{1}{2L}$成立　　$\therefore x_n=\dfrac{2^{2^{n-1}}-1}{2^{2^{n-1}}L}$　　故 $\lim\limits_{x_n\to\infty}x_n=\lim\limits_{x_n\to\infty}\dfrac{1}{L}-\dfrac{1}{2^{2^{n-1}}L}=\dfrac{1}{L}$

2.　2 ；5

解析：$e^{xy}+\sin x-y=0$　　当 $x=0$ 时，$y=1$　　$(y+xy')e^{xy}+\cos x-y'=0$　　当 $x=0$ 时，$y'=2$

$(y'+y'+xy')e^{xy}+(y+xy')^2e^{xy}-\sin x-y''=0$　　当 $x=0$ 时，$y''=5$

3.　$a=-\dfrac{4}{3}$，$b=\dfrac{1}{3}$

解析：$\begin{cases}\lim\limits_{x\to0}1+a\cos2x+b\cos4x=1+a+b=0\\ \lim\limits_{x\to0}\left(1+a\cos2x+b\cos4x\right)''=-4a-16b=0\end{cases}$　　$\therefore a=-\dfrac{4}{3},b=\dfrac{1}{3}$

五、证明题

1. 证明：令 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x},x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$　　$f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$　　令 $g(x)=x\cos x-\sin x$

则 $g'(x)=\cos x-x\sin x-\cos x=-x\sin x<0$　　$\therefore g(x)$ 单调递减　　又 $g(0)=0$

$\therefore g(x)<0$ 即 $f'(x)<0$　　$\therefore f(x)$ 单调递减

又 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$　$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}f(x)=\dfrac{2}{\pi}$　　$\therefore\dfrac{2}{\pi}<f(x)<1$　　即 $\dfrac{2}{\pi}<\dfrac{\sin x}{x}<1$

2. （1）令 $F(x)=f(x)-x$　　$\because F(\dfrac{1}{2})=f(\dfrac{1}{2})-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}>0$　　$F(1)=f(1)-1=-1<0$

又 $F(\dfrac{1}{2})$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导　　$\therefore\exists\xi\in(\dfrac{1}{2},1)$，使 $F(\xi)=0$ 即 $f(\xi)=\xi$

（2）令 $G'(x)=[f'(x)-\lambda f(x)+\lambda x-1]e^{-\lambda x}$　　则 $G(x)=e^{-\lambda x}[f(x)-x]$

又 $G(0)=f(0)=0$　　$G(\xi)=e^{-\lambda\xi}[f(\xi)-\xi]=0$

由罗尔定理知：$\exists\eta\in(0,\xi)$，使 $G'(x)=0$ 即 $f'(\eta)-\lambda[f(\eta)-\eta]=1$

3. （使用闭区间套定理或 weierstrass 定理证明）

反证法：假设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有无穷多个零点，对 $[0,1]$ 进行二分，则在 $[0,\dfrac{1}{2}]$ 与 $[\dfrac{1}{2},1]$ 中至少有一个区间内有无穷多个零点。对有无穷多个零点的区间在进行二分，不断二分后总有一个区间内有无穷多个零点。当区间长度小于 Δx 时，取区间内任意两零点 x_0，$x_0+\Delta x'$，且 $|\Delta x'|<|\Delta x_0|$，则

$f'(x_0)=\dfrac{f(x_0+\Delta x')-f(x_0)}{\Delta x'}=0$，与 $f'(x_0)\neq0$ 矛盾。

故假设不成立，$f(x)$ 在 $[0,1]$ 上只有有限个零点。

2013 年高数上期中试题答案

一、填空题

1. $\ln3$

解析：$\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x+a}{x-a})^x=\lim\limits_{x\to\infty}e^{x\ln(1+\frac{2a}{x-a})}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{2a}{x-a}x}=e^{2a}=9$　　$a=\dfrac{\ln9}{2}=\ln3$

2. e^{-2}；$e^{-2}-1$

解析：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}(1-2x)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}\ln(1-2x)}=\lim\limits_{x\to0^-}e^{\frac{1}{x}\cdot(-2x)}=e^{-2}$，$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin ax}{x}=a$

$\therefore\begin{cases}a=b+1\\e^{-2}=b+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=e^{-2}\\b=e^{-2}-1\end{cases}$

3.　0;1

解析：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}\sin x}{-x}=-e$　　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\frac{1}{1-x}}\sin x}{-x}=e$　　$\therefore x=0$ 为跳跃间断点

$\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}e^{\frac{1}{1-x}}\sin1=0$ $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}e^{\frac{1}{1-x}}\sin1=\infty$ $\therefore x=1$ 为无穷大间断点

4. 1

解析：$\ln(1+ax)\sim ax,\sin x\sim x$ $\therefore a=1$

5. $\dfrac{\cos+x}{x\cos x\ln a}dx$

解析：$y'=\dfrac{\sec x+\tan x+x(\dfrac{\sin x}{\cos^2 x}+\dfrac{1}{\cos^2 x})}{x(\sec x+\tan x)\ln a}=\dfrac{\cos x+\sin x\cos x+x\sin x+x}{x(\cos x+\sin x\cos x)\ln a}=\dfrac{\cos x+x}{x\cos x\ln a}$

6. 2

解析：原式$=\lim\limits_{n\to0}(2-\dfrac{1}{2^n})\cdot\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n^2}}}{1+\dfrac{1}{n}}=2$

7. $\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

解析：$y'=1-2\sin x=0\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{6}$ $y''=-2\cos x<0$ $\therefore x=\dfrac{\pi}{6}$ 为极大值点

故 $y_{\max}=y|_{x=\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\pi}{6}+2\cos\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}$

二、计算题

1. $\dfrac{1}{2}$

解析：原式$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^4}{x^4}=\dfrac{1}{2}$

2. 2A

解析：$\sqrt{1+x}-1\sim\dfrac{1}{2}x$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+f(x)\sin x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}f(x)\sin x}{x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to0}f(x)=\mathrm{A}\Rightarrow\lim\limits_{x\to0}f(x)=2\mathrm{A}$

3. 定义法：$x_{n+1}=\dfrac{x_n+2}{x_n+1}>1\ \left|x_n-\sqrt{2}\right|=\left|\dfrac{x_{n-1}+2}{x_{n-1}+1}-\sqrt{2}\right|=\left|1-\sqrt{2}+\dfrac{1}{x_{n-1}+1}\right|$

$\left|\dfrac{(1-\sqrt{2})\ x_{n-1}+2-\sqrt{2}}{x_{n-1}+1}\right|=\dfrac{\sqrt{2}-1}{x_{n-1}+1}\left|x_{n-1}-\sqrt{2}\right|<\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}\left|x_{n-1}-\sqrt{2}\right|<(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2})^2\left|x_{n-1}-\sqrt{2}\right|<\cdots<$

$(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2})^{n-2}\left|x_2-\sqrt{2}\right|=(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2})^{n-1}\left|\dfrac{3}{2}-\sqrt{2}\right|<(\dfrac{\sqrt{2}-1}{2})^{n-1}<\varepsilon$

$\forall\varepsilon>0,\exists N=\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\dfrac{\sqrt{2}-1}{2}}+1\right]$，当 $n>N$ 时，$\left|x_n-\sqrt{2}\right|<\varepsilon$ $\therefore\lim\limits_{x\to\infty}x_n=\sqrt{2}$

4. $\tan t;\dfrac{1}{at\cos^3 t}$

解析：$\dot{x}=a(t\cos t)$ $\ddot{x}=a(\cos t-t\sin t)$ $\dot{y}=a(t\sin t)$ $\ddot{y}=a(\sin t+t\cos t)$

$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\dot{y}}{\dot{x}}=\tan t$ $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=\dfrac{1}{at\cos^3 t}$

5. $f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{e^{-y^2}}{\frac{1}{y}}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{y}{e^{y^2}}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{1}{2ye^{y^2}}=0 \therefore f'(x)=\begin{cases}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}} & x\neq0\\ 0 & x=0\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{2y^3}{e^{y^2}}=\lim\limits_{y\to\infty}\frac{6y^3}{2ye^{y^2}}=\lim\limits_{y\to0}\frac{3y}{e^{y^2}}=0=f'(0)$ $\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续

5. 设 $f(x)=\sin x-\frac{2}{\pi}x$， $f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$， $f''(x)=-\sin x<0$ $\therefore f'(x)$ 单调递减

又 $f'(0)=1-\frac{2}{\pi}>0$ $f'(\frac{\pi}{2})=-\frac{2}{\pi}<0$， $\therefore f(x)$ 先增后减

又 $f(0)=0$ $f(\frac{\pi}{2})=0 \therefore f(x)>0$，即 $\sin x>\frac{2}{\pi}x$

7. $f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2$ $\begin{cases}f(0)=f(c)-cf'(c)+\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2 & \xi_1\in(0,c)\\ f(1)=f(c)-(1-c)f'(c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c^2) & \xi_2\in(c,1)\end{cases}$

$\therefore f(1)-f(0)=f'(c)+\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c^2)-\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2$

$|f'(c)|=\left|f(1)-f(0)+\frac{f''(\xi_1)}{2}c^2-\frac{f''(\xi_2)}{2}(1-c^2)\right|\leq|f(1)|+|f(0)|+\frac{1}{2}|f''(\xi_1)|c^2+\frac{1}{2}|f''(\xi_2)|(1-c^2)$

$\leq 2a+\frac{b}{2}\left[c^2+(1-c^2)\right]\leq 2a+\frac{b}{2}$

8. $\frac{1}{2}f''(0)$

解析： $\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x-\ln(1+x)}=f'(\xi)$ $\ln(1+x)<\xi<x$， 原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(\xi)\left[x-\ln(1+x)\right]}{x^3}$

$=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{x}\cdot\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{f'(\xi)-f'(0)}{x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=f''(0)\cdot\lim\limits_{x\to0}\cdot\frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}=f''(0)\cdot\lim\limits_{x\to0}\cdot\frac{1}{2(1+x)}$

$=\frac{1}{2}f''(0)$

9.设 $F(x)=\frac{f(x)}{1+x^2}$， $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{1+x^2}=0$， $\lim\limits_{x\to\infty}F'(x)=\frac{(1+x^2)f'(x)-2xf(x)}{(1+x^2)^2}$， $\because$ 有 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=$

$\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$，又 $F(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，由罗尔定理可知：$\exists\xi\in R$，使 $F'(\xi)=0$，即 $f'(\xi)(1+\xi^2)=2\xi f(\xi)$ 成立.

2012 年高数上期中试题答案

一、填空题

1. 1

解析： $\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}<\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$ $\because\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=1\therefore$ 原式成立.

2. $\frac{2-\ln x}{x^2}\sin\frac{2-2\ln x}{x}$

解析： $y'=-2\cos(\frac{1-\ln x}{x})\sin(\frac{1-\ln x}{x})\frac{-1-(1-\ln x)}{x^2}=\frac{2-\ln x}{x^2}\sin\frac{2-2\ln x}{x}$

3. 1 ； −1

解析：$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1-\cos x}{(x+1)x^2}\infty$　　$\lim\limits_{x\to1}f(x)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{2x+1}=\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{1-\cos x}{x^2(x+1)}=\dfrac{1}{2}=f(0)$　$\therefore$在处 $x=0$ 连续

4. -3 ；-2

解析：$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}=-2$　　$\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\sin bx}{x}=b$　　$\therefore\begin{cases}-2=a+1\\b=a+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=-2\end{cases}$

5. 等价无穷小

解析：$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)+g(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}+1\right]=1$

6. e^4

解析：原式$=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{4}{x-1}\right)^{\frac{x-1}{4}}\right]^{\frac{4(x+1)}{x-1}}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{4(x+1)}{x-1}}=e^4$

二、计算题

1. $\dfrac{5}{2}$

解析 $y'=\dfrac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}-\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x^2}{4}}+\dfrac{2}{\sqrt{1-4x^2}}$　$\therefore y'(0)=\dfrac{5}{2}$

2. $\{\cos xf'(\sin x)\cdot\sin[f(\sin x)]+f(\sin x)\cos[f(x)]f'(x)\}dy$

解析：$y'=\cos xf'(\sin x)\cdot\sin[f(\sin x)]+f(\sin x)\cos[f(x)]f'(x)$

3. $\dfrac{1}{f''(t)}$

解析：$\dot{x}=f''(t)$　$\ddot{x}=f'''(t)$　　$\dot{y}=f'(t)+tf''(t)-f'(t)=tf''(t)$　$\ddot{y}=f''(t)+tf'''(t)$

$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=\dfrac{f''(t)[f''(t)+tf'''(t)]-f'''(t)tf''(t)}{[f''(t)]^3}=\dfrac{1}{f''(t)}$

4.设 $f(x)=\arctan x-\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{2x}{1+x^2}$　　$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{1}{2}\dfrac{\dfrac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{2x}{1+x^2}\right)^2}}=0$　又 $f(1)=\dfrac{\pi}{4}$　$\therefore f(x)=\dfrac{\pi}{4}$

5. 由中值定理：$\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=f'(s),0<\xi<x$　　设 $f(x_0)=0$，则 $f(x_0)=x_0f'(\xi)+f(0)=0$

$x_0=-\dfrac{f(0)}{f'(\xi)}>0$ $\therefore$ $f'(x)$在$(0,+\infty)$上单调递增，故有唯一零点.

6. 极大值：0 ；极小值 $-\dfrac{3}{5}\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2}{3}}$

解析：$f'(x)=\dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}-\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\neq0$　　$\therefore$增区间：$(\dfrac{2}{5},+\infty),(-\infty,0)$ 减区间：$(0,\dfrac{2}{5})$，故极大值为 $f(0)=0$ ，

极小值为 $f(\dfrac{2}{5})=-\dfrac{3}{5}(\dfrac{2}{5})^{\frac{2}{3}}$

7. $3\ln2$

解析：$\because \lim\limits_{x\to\infty}\sin e^x$ 有界 $\quad \therefore \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin e^x}{2^x}=0 \qquad \lim\limits_{x\to\infty}\left[\ln(1+2^x)\right]\cdot\ln(1+\dfrac{3}{x})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\ln(1+2^x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\dfrac{2^x\ln 2}{1+2^x}}{1}$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3\ln 2}{\dfrac{1}{2^x}+1}=3\ln 2 \quad \therefore$ 原式$=3\ln 2$

8. $\sqrt[3]{20000}$

解析：设燃料费用 $Q=kv^3$ 则 $40=k20^3 \Rightarrow k=\dfrac{1}{200}$，总费用 $w=(\dfrac{v^3}{200}+200)\dfrac{s}{v}=(\dfrac{v^2}{200}+\dfrac{200}{v})s$

$w'=(\dfrac{v}{100}+\dfrac{200}{v^2})s=0\Rightarrow v=\sqrt[3]{20000}$

9. 同 2013 年计算题第 5 题

10. $\ln x=\ln 3+\dfrac{(x-3)}{3}-\dfrac{(x-3)^2}{3^2\cdot 2}+\cdots+(-1)^{n+2}\dfrac{(x-3)^{n+1}}{3^{n+1}(n+1)}$，当 $x<3$ 时，$\xi\in(3,3)$；当 $x>3$ 时，$\xi\in(3,x)$

11. $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=0\Rightarrow f(0)=0,\ f_+'(0)=0 \qquad \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{f(x)}{x-1}=1\Rightarrow f(1)=0,\ f_-'(1)=1$

由达布定理：f 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 上可导，所以导函数能取到 $f'(0)\sim f'(1)$ 上的所有值.

$\therefore\exists\xi\in(0,1)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{1}{e}$，即 $ef'(\xi)=1$.

2011 年高数上期中试题答案

一、填空题

1. -3 ； -2

解析：$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\ln(1-2x)}{x}=-2 \qquad \lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin bx}{x}=b \qquad \therefore\begin{cases}-2=a+1\\ b=a+1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\ b=-2\end{cases}$

2. $\dfrac{2-\ln x}{x^2}\sin\dfrac{2-2\ln x}{x}$

解析：$y'=-2\cos(\dfrac{1-\ln x}{x})\sin(\dfrac{1-\ln x}{x})\dfrac{-1-(1-\ln x)}{x^2}=\dfrac{2-\ln x}{x^2}\sin\dfrac{2-2\ln x}{x}$

3. 1 ； -1

解析：$\lim\limits_{x\to -1}f(x)=\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-\cos x}{(x+1)x^2}\infty \qquad \lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^2+x-2}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1}{2x+1}=\dfrac{1}{3}$

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1-\cos x}{x^2(x+1)}=\dfrac{1}{2}=f(0) \quad \therefore$ 在处 $x=0$ 连续

4. $-\dfrac{3}{2}$ ； $-\dfrac{9}{2}$

解析：$y''=6ax+2b \qquad \begin{cases}3=a+b\\ 0=6a+2b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-\dfrac{3}{2}\\ b=\dfrac{9}{2}\end{cases}$

5. $(2x+1)e^{2x}$

解析：$f(x)=\lim\limits_{t\to\infty}x\left[\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t\right]^{2x}=xe^{2x} \qquad \therefore f'(x)=e^{2x}+2xe^{2x}$

6. $5,-1$ ； 0 ； $\dfrac{1}{2}$ ； $\left(\dfrac{9}{2}\right)^2\cdot\left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

解析：　$y'=2(x-5)(x+1)^{\frac{2}{3}}+(x-5)^2\frac{2}{3}(x+1)^{-\frac{1}{3}}=\frac{2(x-5)}{(x+1)^{\frac{1}{3}}}\left[(x+1)+\frac{(x-5)}{3}\right]=\frac{4(x-5)(2x-1)}{3(x+1)^{\frac{1}{3}}}$

$\therefore$ 增区间：$\left(-1,\frac{1}{2}\right),(5,+\infty)$　　减区间：$(-\infty,-1),\left(\frac{1}{2},5\right)$　　　$x\to-1$ 时，$y'\to\infty$

$\therefore$ 极小值为 $y(-1)=0$，$y(5)=0$，极大值为 $y(\frac{1}{2})=\left(\frac{9}{2}\right)^2\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$

二、计算题

1. $\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$

解析 $y'=\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{1+x^2-1}-\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}-\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}\ln x}{x^2-1}=\frac{x\ln x}{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}$

2. 2

解析：原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x\sin x-x^3-x}{\frac{1}{2}x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{(\sin x+\cos x)e^x-3x^2-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\cos xe^x-6x}{1}=2$

3. $\frac{1}{f''(t)}$

解析：　$\dot{x}=f''(t)$　$\ddot{x}=f'''(t)$　　　$\dot{y}=f'(t)+tf''(t)-f'(t)=tf''(t)$　$\ddot{y}=f''(t)+tf'''(t)$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}=\frac{f''(t)\left[f''(t)+tf'''(t)\right]-f'''(t)tf''(t)}{\left[f''(t)\right]^3}=\frac{1}{f''(t)}$

4. 极大值

解析：设 $g(x)=\frac{1-e^x}{x}$　　　$g'(x)=\frac{(1-x)e^x-1}{x^2}$；　设 $h(x)=(1-x)e^x-1$　$h'(x)=-xe^x<0$　$\therefore h(x)$ 单调减，又 $h(0)=0$　　$\therefore x>0$ 时，$g'(x)<0$；$\therefore x<0$ 时，$g'(x)>0$　　又 $\lim\limits_{x\to0}g(x)=-1$　$\therefore g(x)<0$，即 $x<0$ 时 $g(x)$ 单调增，$x>0$ 时 $g(x)$ 单调减.取 $x=\tau$，则 $f'(\tau)=0$，即 $\tau f''(\tau)=1-e^\tau\Rightarrow f''(\tau)=\frac{1-e^\tau}{\tau}<0\ \therefore f(\tau)$ 为极大值，$x=0$ 时 $y=e$

5. $e(1-e)$

解析：$(y+xy')\cos(xy)-\frac{1}{x+1}+\frac{y'}{y}=0$　　$e-1+\frac{y'}{e}=0$　$y'=e(1-e)$

6.　(1)　$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-\cos x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{g'(x)+\sin x}{1}=g'(0)$　$\therefore a=g'(0)$

(2)　$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{g'(x)-\cos x}{x}-a}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-\cos x-ax}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{g''(x)+\cos x}{2}$

$=\frac{g''(0)+1}{2}$，当 $x\neq0$ 时　$f'(x)=\frac{\left[g'(x)+\sin x\right]x-\left[g(x)-\cos x\right]}{x^2}$

$$\therefore\ f'(x)=\begin{cases}\frac{\left[g'(x)+\sin x\right]x-g(x)+\cos x}{x^2} & x\neq0\\ \frac{g''(0)+1}{2} & x=0\end{cases}$$

(3) $\lim_{x\to 0} f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{[g'(x)+\sin x]x-[g(x)-\cos x]}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{g'(x)+\sin x+[g''(x)+\cos x]x-g'(x)-\sin x}{2x}$

$=\lim_{x\to 0}\frac{g''(x)+\cos x}{2}=\frac{g''(0)+1}{2}=f'(0)$，$\therefore f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续.

7. $10^3\sqrt{3}$ km/h ； 720元/h

解析：参考 2012 年计算题第 8 题

三、证明题

1. （1） 设 $f(x)=\arctan x-\frac{1}{2}\arccos\frac{2x}{1+x^2}$　　$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\frac{\frac{2(1+x^2)-4x^2}{(1+x^2)}}{\sqrt{1-\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)^2}}=0$

又 $f(1)=\frac{\pi}{4}$　　$\therefore f(x)=\frac{\pi}{4}$

（2） 设 $f(x)=\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}$,$0<x<1$　　$f'(x)=\frac{-\frac{1}{x+1}}{\ln^2(1+x)}+\frac{1}{x^2}=\frac{(1+x)\ln^2(1+x)-x^2}{(1+x)[x\ln(1+x)]^2}$

设 $g(x)=(1+x)\ln^2(1+x)-x^2$　　$g'(x)=\ln^2(1+x)+2\ln(1+x)-2x$

$g''(x)=\frac{2\ln(1+x)}{1+x}+\frac{2}{1+x}-2=\frac{2[\ln(1+x)-x]}{1+x}$　　设 $h(x)=\ln(1+x)-x$，则 $h'(x)=-\frac{x}{1+x}<0$

$\therefore h(x)$ 单调减　　又 $h(0)=0$　　$\therefore g''(x)<0$　　又 $g'(0)=0$　$\therefore g'(x)<0$　$\therefore h(x)<0$

又 $g(0)=0$　$\therefore g(0)=0$　$\therefore f'(x)<0$　　故 $f(x)$ 单调减

又 $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x-\ln(x+1)}{x^2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{2x}=\frac{1}{2}$

$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\frac{1}{\ln 2}-1$　　$\therefore \frac{1}{\ln 2}-1<f(x)<\frac{1}{2}$

2. 设 $f(a)=1$， $f(b)=0$　　$\because f(x)$ 的最值在 $(0,1)$ 内取到　　$\therefore x=a,x=b$ 必为极值点

由费马定理可知： $f'(a)=0, f'(b)=0$　　$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(\xi)}{2}(x-x_0)^2$

令 $x=a,x_0=b$，则 $f(a)=f(b)+f'(b)(a-b)+\frac{f''(\xi)}{2}(a-b)^2$　　$\therefore 1=\frac{f''(\xi)(a-b)^2}{2}$

$\because a-b\in(0,1)$ 且 $a\neq b$　　$\therefore (a-b)^2\in(0,1)$　　故 $f''(\xi)=\frac{2}{(a-b)^2>2}$

2010 年高数上期中试题答案

一、填空题

1. e

解析： $\lim_{x\to 1}\frac{e^x-a}{x(x-1)}$ 极限存在　　$\therefore a=e$

2. $(-1,-\frac{1}{e^2})$

解析： $y''=4(x+1)e^{2x}=0$， $x=-1$　$y=-e^{-2}$

3. -2

解析： $\lim_{x\to 0} f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x+e^{2ax}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cos 2x+2ae^{2ax}}{1}=2+2a$　　$\therefore 2+2a=a$　　$a=-2$

4. $y=-\frac{2}{9}x$

解析：$t=0$时，$x=0,y=0$ $\therefore$切点为$(0,0)$ $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{\dot{y}}{\dot{x}}=\frac{2t-2}{3t^2+9}=-\frac{2}{9}$ $\therefore y=-\frac{2}{9}x$.

5. $y=x+\frac{1}{e}$

解析：设渐近线为$y=kx+b$，则$k=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x\ln(e+\frac{1}{x})}{x}=1$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}[x\ln(e+\frac{1}{x})-x]=\lim_{x\to\infty}x\ln(1+\frac{1}{ex})=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e}\ln(1+\frac{1}{ex})^{ex}=\frac{1}{e}$$

二、选择题

1. C

解析：$\lim\limits_{x\to2^+}\arctan\frac{1}{2-x}=-1$ $\lim\limits_{x\to2^-}\arctan\frac{1}{2-x}=1$ $\therefore$为跳跃间断点.

2. D

解析：$\because f(0)=0$ $\lim\limits_{x\to0^-}x^2g(0)=0$ $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{\sqrt{x}}=0$ $f'_-(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\frac{x^2g(x)-f(0)}{x}=0$

$$f'_+(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\frac{1}{2}x^2}{x\sqrt{x}}=0$$

3. C

解析：$f'(x)>0$单调增，$f''(x)<0$为凸函数.

4. A

解析：$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=-1$

三、计算题

1. $\frac{3}{2}$

解析：原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)x-(1-e^{-x})}{x(1-e^{-x})}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2+x-1+e^{-x}}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2x+1-e^{-x}}{2x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2+e^{-x}}{2}=\frac{3}{2}$

2. $\cos3$

解析：原式$=\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)x-(1-e^{-x})}{x(1-e^{-x})}=(\cos3)\lim\limits_{x\to3^+}\frac{\ln(x-3)}{\ln(e^x-e^3)}=(\cos3)\lim\limits_{x\to3^+}\frac{\frac{1}{x-3}}{\frac{e^x}{e^x-e^3}}=(\cos3)\lim\limits_{x\to3^+}\frac{1-e^{3-x}}{x-3}$

$$=(\cos3)\lim_{x\to3^+}\frac{e^{3-x}}{1}=\cos3$$

3. $\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$

解析：$y=\ln\frac{2x}{(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})^2}=\ln(2x)-2\ln(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})$ $y'=\frac{1}{x}-2\frac{\frac{1}{2\sqrt{1+x}}-\frac{1}{2\sqrt{1-x}}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$

$$=\frac{1}{x}+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}+1-x^2}=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$$

4. $\frac{2e^2-3e}{4}$

解析： $t=0$时，$\dot{x}=6t+2=2$ $\ddot{x}=6$ $t=0$时， $y=1$

$\dot{y}e^y\sin t+e^y\cos t-\dot{y}=0$ $\dot{y}=e$

$(\ddot{y}e^y+\dot{y}^2e^y)\sin t+\dot{y}e^y\cos t+\dot{y}e^y\cos t-e^y\sin t-\ddot{y}=0$ $\ddot{y}=2e^2$

$$\therefore \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=\left.\frac{\dot{x}\ddot{y}-\ddot{x}\dot{y}}{\dot{x}^3}\right|_{t=0}=\frac{2\times 2e^2-6e}{2^3}=\frac{2e^2-3e}{4}$$

5. $\ln x=\ln 2+\frac{(x-2)}{2}-\frac{(x-2)^2}{2\cdot 2^2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(x-2)^n}{n\cdot 2^n}+o((x-2)^n)$

四、解答题

1. (1) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{1}=f'(a)$ $\therefore$ A=$f'(a)$

(2) $g'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{\frac{f(x)}{x-a}-g(a)}{x-a}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-(x-a)f'(a)}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)-f'(a)}{2(x-a)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{2}=\frac{f''(a)}{2}$

$$\therefore g'(x)=\begin{cases}\dfrac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2} & x\neq a\\ \dfrac{f''(a)}{2} & x=a\end{cases}$$

(3) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)(x-a)-f(x)}{(x-a)^2}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)(x-a)+f'(x)-f'(x)}{2(x-a)}=\frac{f''(a)}{2}$ $\therefore g'(x)$在$x=a$处连续.

2. (1) $x\in[-2,0]$ $x+2\in[0,2]$ $f(x)=kf(x+2)=k(x+2)\left[(x+2)^2-4\right]=k(x+2)(x+4)x$

(2) $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x(x^2-4)-f(0)}{x}=-4$ $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{k(x+2)(x+4)x-f(0)}{x}=8k$ $8k=-4\Rightarrow k=-\frac{1}{2}$

3. 令$T(x)=f(x)-2x$，则$T(1)=3$ $T(5)=-9$ $T(6)=0$ $\because T(x)$在$[1,5]$上连续

$\therefore\exists\delta\in(1,5)$，使$T(\delta)=0$ 令$F(x)=[f(x)-2x]e^{g(x)}$，则$F(\delta)=0$ $F(6)=0$

由罗尔定理可知：$\exists\xi\in(\delta,6)$，使$F'(\delta)=0$，即

$[f'(\xi)-2+f(\xi)g'(\xi)-2\xi g'(\xi)]e^{g(x)}=0$ $\therefore\exists a\in(1,6)$，使$f'(a)+g'(a)[f(a)-2a]=2$

本试题集答案由彭康学导团制作，如有错误，请在学习群里反馈给我们。试题集适合学习高数 1、高数 2、工科数学分析的机类、电类等专业使用，学习高数 3、高数 4 的专业仅供参考。如有打印店以此盈利，请勿购买。

彭康学导团 QQ 学习群请扫描左侧二维码：491330131

搜索微信公众号“彭康书院学导团”或扫描右侧二维码关注我们，了解更多学业动态，掌握更新学习资料。