## 高数上期末模拟考试

治学团•文治学辅与发展中心

姓名	班级_
学号	序号_

成绩

一、选择题(每小题 3 分,共 15 分)

1. 
$$\lim_{x \to +\infty} (\arctan \frac{x+1}{x} - \frac{\pi}{4}) \sqrt{x^2 + 1} =$$
A.1  $B \cdot \frac{1}{2}$   $C \cdot \frac{1}{4}$   $D \cdot 2$ 

2.设奇函数 f(x)在( $-\infty$ ,+ $\infty$ ) 上具有连续导数,则()

$$(A)\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)]dt$$
是奇函数 
$$(B)\int_0^x [\cos f(t) + f'(t)]dt$$
是偶函数 
$$(C)\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)]dt$$
是奇函数 
$$(D)\int_0^x [\cos f'(t) + f(t)]dt$$
是偶函数

3. 设函数f(x)在区间(-1, 1)有定义,且  $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ ,则()

$$(A)$$
当 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0, f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

$$(B)$$
当 $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0, f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导

$$(C)$$
当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导是, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = 0$ 

$$(D)$$
当 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导时, $\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2} = 0$ 

4. 下列反常积分发散的是()

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sin x}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sin x} \qquad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^{2}}} \qquad \int_{0}^{+\infty} e^{-x^{2}} dx \qquad \int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{2} x}$$

$$\int_{2}^{+\infty} \frac{dx}{x \ln^{2} x}$$

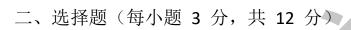
5.设 y<sub>1</sub>、y<sub>2</sub>、y<sub>3</sub>为非齐次线性方程 y"+p(x)y'+q(x)y=h(x)的 3 个特解,则由 y<sub>1</sub>、y<sub>2</sub>、y<sub>3</sub>可以 构成方程 y''+p(x)y'+q(x)y=0 的通解的充分条件为( )

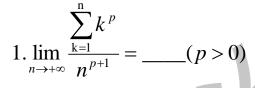
$$A(y_1-y_2)(y_1-y_3)'-(y_1-y_2)'(y_1-y_3)=0$$

$$B(y_2-y_1)(y_2-y_3)'-(y_2-y_1)'(y_2-y_3)\neq 0$$

$$C(y_1-y_3)(y_2-y_3)'+(y_1-y_3)'(y_2-y_3)=0$$

$$D(y_1-y_2)(y_2-y_3)'+(y_1-y_2)'(y_2-y_3) \neq 0$$





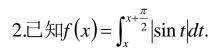
$$\int_0^1 \ln(\sqrt{t}+1) dt$$
 的值

3. 
$$yy'' - (y')^2 = y^2$$
 满足  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 0$  的特解为\_\_\_\_\_

4. 设函数 
$$y = y(x)$$
 由方程  $x^{y^2} + y^2 \ln x + 4 = 0$  确定,求  $y' = \underline{\qquad}$ .

三、计算题与判断题(每题7分,共49分)

1. 计算 
$$\int \frac{\sin x + \cos x}{1 + \sin x \cos x} dx$$



(1)证明: f(x)是以 $\pi$ 为周期的周期函数:(2)求函数f(x)的值域.

3.设
$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt$$
,计算 $\int_0^\pi f(x) dx$ .

#### 4.求解线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 7y^{2} \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 10y + 4z^{2} \\ \frac{dz}{dt} = 5y + 2z^{2} \end{cases}$$

5. 判断该反常积分  $\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos(\ln x)}{x+1} dx$  是否收敛。

若收敛,请计算该积分的值;若不收敛,请说明原因。



6.求微分方程  $y'' - 2y' + y = x(1 + 2e^x)$  的通解

$$7. \quad \Re \lim_{x \to +\infty} \frac{\int_0^x \left| \cos t \right| dt}{x}.$$



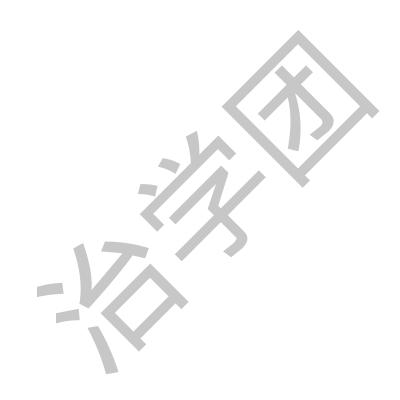
1. (6分)设函数f(x)在[0,1]上连续,且 $\int_0^1 f(x)dx = 0$ ,

证明: 存在一点 $\xi \in (0,1)$ ,使 $f(1-\xi) + f(\xi) = 0$ 

2. (9分) f(x)在[0,2]上二阶连续可导,在(0,2)内可导,3f(0) = f(1) + 2f(2)

(1). (3 分) 求证 $\exists \xi \in (0,2)$ ,使得 $f'(\xi) = 0$ 

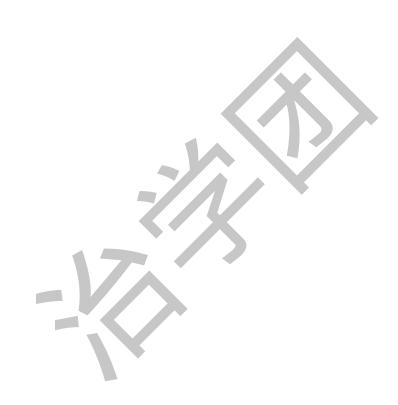
(2). (6 分) 求证 $\exists \eta \in (0,2)$ ,使得 $2f'(\eta) + \eta f''(\eta) = 0$ 



3.(9分) 设函数 f(x), g(x)在区间  $\left[a,b\right]$ 上连续,且 f(x)单调增加,0 < g(x) < 1,证明:

$$(1)0 \le \int_a^x g(t)dt \le x - a, x \in [a,b]$$

$$(2)\int_{a}^{a+\int_{a}^{b}g(t)dt}f(x)dx \le \int_{a}^{b}f(x)g(x)dx$$



### 参考解析

一、选择题

1.答案: B

解析: 先化简  $\arctan \frac{x+1}{x} - \frac{\pi}{4}$ 

曲 tan (arctan 
$$\frac{x+1}{x} - \frac{\pi}{4}$$
) =  $\frac{\frac{x+1}{x} - 1}{1 + \frac{x+1}{x}} = \frac{1}{2x+1}$ , 并且.

$$\arctan\frac{x+1}{x} - \frac{\pi}{4} \in (0, \frac{\pi}{4}),$$

所以 
$$\arctan \frac{x+1}{x} - \frac{\pi}{4} = \arctan \frac{1}{2x+1}$$
.

从而原式 = 
$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\arctan\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}} = \frac{1}{2}$$
.

2. 答案: A

【参考解析】:因为f(x)是奇函数,则f'(x)是偶函数,又 $\cos x$ 是偶函数,则 $\cos f(x)$ 是偶函数,即 $\cos f(x)+f'(x)$ 是偶函数,所以其积分为奇函数,即正确选项为【A】.

3. 答案: C

【参考答案】: 当f(x)在x = 0处可导时,则f(x)在x = 0处连续,则由  $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$ 

得f(x)=0.于是

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} = f'(0)$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{\sqrt{|x|}} = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \frac{x}{\sqrt{|x|}} = 0$$

所以正确选项为【C】

4.答案: A

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$
  
解析: A.0 为奇点,而  $\frac{1}{x}$  ,由比较准则可知, $f(x) = \frac{1}{x}$  和 $g(x) = \frac{1}{\sin x}$  同敛散即原积分是发

散的.

#### 5. 答案: B

解析由 Wronski 行列式不等于 0 可知,应选 B。

#### 二、填空题

【参考解析】: 
$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} k^{p}}{n^{p+1}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^{p} = \int_{0}^{1} x^{p} = \frac{x^{p+1}}{1+P} \Big|_{0}^{1} = \frac{1}{1+P}$$

#### 2.【答案】: 0.5

$$\diamondsuit \sqrt{t} = x$$

# $\diamondsuit \sqrt{t} = x$ 【参考解析】

则原式= 
$$\int_0^1 \ln(1+x)dt = x^2 \ln(1+x)_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$$
  
=  $\ln 2 - \int_0^1 (x-1) + \frac{1}{x+1}dx$   
=  $\ln 2 + \frac{1}{2} - \ln 2$   
=  $\frac{1}{2}$ 

3. 【答案】: 
$$y = e^{\frac{x^2}{2}}$$
解析 (凑微分法):

解析 (凑微分法):

由原方程得
$$\frac{yy''-(y')^2}{y^2}=1$$
, 即 $(\frac{y'}{y})'=1$ 

则 
$$\frac{y}{y} = x + C_1$$
, 由初始条件得  $C_1 = 0$ 

故
$$\frac{y}{y} = x$$
,即 $\frac{dy}{y} = xdx$ 

因而所求特解为  $y = e^{\frac{x^2}{2}}$ 

## 4.【答案】: $-\frac{y}{2x \ln x}$

解析: 在方程两边对x求导,得

$$e^{y^2 \ln x} (2yy \ln x + \frac{y^2}{x}) + (2yy \ln x + \frac{y^2}{x}) = 0$$

$$\mathbb{E}[(e^{y^2 \ln x} + 1)(2yy^2 \ln x + \frac{y^2}{x})] = 0$$

所以 
$$2yy' \ln x + \frac{y^2}{x} = 0$$

所以
$$y' = -\frac{y}{2x \ln x}$$

1.

$$\int \frac{\cos x + \sin x}{1 + \sin x \cos x} dx$$

$$= \int \frac{\cos x + \sin x}{\frac{3}{2} - \frac{1}{2} (\sin^2 x + \cos^2 x - 2\sin x \cos x)} dx$$

$$= \int \frac{2(\cos x + \sin x)}{3 - (\sin x - \cos x)^2} dx$$

$$= 2\int \frac{d(\sin x - \cos x)}{3 - (\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \ln \frac{\sqrt{3} + \sin x - \cos x}{\sqrt{3} - \sin x + \cos x} + C$$

2解: (1)对于任意
$$(-\infty,+\infty)$$
,

$$f(x+\pi) = \int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}} |\mathbf{s} \, \mathbf{i} \, \mathbf{n}| dt \stackrel{\diamond_{t=\pi+u}}{=} \int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}} |\mathbf{s} \, \mathbf{i} \, \mathbf{n}u| du = f(x).$$

$$(2) \forall \exists \mathbf{E} \in [0,\pi] \quad f'(x) = \left| \mathbf{s} \, \mathbf{i} \, \left( \mathbf{n} + \frac{\pi}{2} \right) \right| - \left| \mathbf{s} \, \mathbf{i} \, \mathbf{n} \mathbf{n} \right| = \left| \mathbf{c} \, \mathbf{o} \, \mathbf{s} \right| - \left| \mathbf{s} \, \mathbf{i} \, \mathbf{n} \mathbf{n} \right|$$

$$f'(x) = \begin{cases} c \circ x - s i \operatorname{nx}, 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ -c \circ x - s i \operatorname{nx}, \frac{\pi}{2} \le x \le \pi \end{cases} \Leftrightarrow f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}} |\mathbf{s} \, \mathbf{i} \, \mathbf{n} t| dt = \sqrt{2} \qquad f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2}} |\mathbf{s} \, \mathbf{i} \, \mathbf{n} t| dt = 2 - \sqrt{2}$$

$$f(\pi) = f(0) = 1$$
 所以函数(x)的值域  $[\pi - \sqrt{2}, \sqrt{2}]$ 

#### 3.【答案】:

解: 
$$\int_0^{\pi} f(x)dx = \int_0^{\pi} \left( \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt \right) dx = \left( x \int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t} dt \Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} x \frac{\sin x}{\pi - x} dx \right)$$

$$= \int_0^{\pi} \pi \frac{\sin t}{\pi - t} dt - \int_0^{\pi} x \frac{\sin x}{\pi - x} dx = \int_0^{\pi} (\pi - x) \frac{\sin x}{\pi - x} dx$$

$$= \int_0^{\pi} \sin x dx = 2$$

4. 解: 
$$\begin{bmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 5 & 10 & 4 \\ 0 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$
,  $x = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ ,则原方程可写为:  $\dot{x} = Ax$ 

A 的特征方程 det (A-λI) = (λ-5) (λ-7) (λ-2) = 0.因此 A 的特征值为 $\lambda_1$ =2,  $\lambda_2$ =5,  $\lambda_3$ =7。

对应于 $\lambda_1$ =2 的特征向量可取 $\alpha_1$ = (4,0,-5)

对应于 $\lambda_2$ =5 的特征向量可取 $\alpha_2$ = (-7,3,5)

对应于 $λ_3$ =7的特征向量可取 $α_3$ = (-7,5,5)

故所给微分方程组的基解矩阵为 $X(t) = \begin{bmatrix} 4e^{-7}e^{$ 

因而通解为 x=X (t) C, 其中  $C=(C_1,C_2,C_3)$  <sup>T</sup> 为任意常数向量。

#### 5. 答案:

解: 该反常积分不收

设 
$$\ln x = t$$
 
$$\int_{1}^{+\infty} \frac{\cos(\ln x)}{x+1} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos t}{e^{t}+1} e^{t} dt = \int_{0}^{+\infty} \frac{\cos t}{1+e^{-t}} dt, \quad 其与 \int_{0}^{+\infty} \cos t dt$$
的 敛散性相同

反常积分 $\int_0^{+\infty} \cos t dt$ 不收敛

即
$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\ln x)}{x+1}$$
不收敛

6. 答案:  $r^2 - 2r + 1 = 0$ , 故  $r_{1,2} = 1$ , 对应齐次方程的通解为  $Y = (C_1 + C_2 x)e^x$ 

显然 
$$f(x) = x + 2xe^x = f_1(x) + f_2(x)$$
.

设
$$y''-2y'+y=f_1(x)=x$$
的特解为 $y_1^*=Ax+B$ ,易得 $A=1$ , $B=2$ 

故 
$$y_1^* = x + 2$$
, 同理易得  $y_2^* = \frac{x^3 e^x}{3}$ ,  $y^* = x + 2 + \frac{x^3 e^x}{3}$ , 其通解为

$$y = Y + y^* = (C_1 + C_2 x + \frac{x^3}{3})e^x + x + 2$$

7. 解:对于充分大的x存在唯一正整数n使得 $n\pi \le x \le (n+1)\pi$ ,

所以
$$\int_0^x |\cos t| dt = \int_0^{n\pi} |\cos t| dt + \int_{n\pi}^x |\cos t| dt$$

$$= n \int_0^{\pi} |\cos t| dt + \int_{n\pi}^x |\cos t| dt = 2n + \int_{n\pi}^x |\cos t| dt$$
其中 $0 \le \int_0^x |\cos t| dt \le \int_0^{(n+1)\pi} |\cos t| dt = 2$ 

即
$$2n \le \int_0^x |c \circ t| dt \le 2(n+1)$$
 所以 $\frac{2n}{(n+1)\pi} \le \frac{\int_0^x |cost| dt}{x} \le \frac{2(n+1)}{n\pi}$ 

#### 四、综合题

#### 1.解答:

设
$$F(x) = \int_0^x f(1-t) + f(t)dt$$

易有
$$F(0) = 0$$

又因
$$F(1) = \int_0^1 f(1-t) + f(t)dt = 2 * \int_0^1 f(x)dx = 0$$

所以: 
$$F(0) = F(1) = 0$$

由罗尔定理:存在一点
$$\xi \in (0,1)$$
,使 $F'(\xi) = 0$ 

#### 2. *iII*: 1.

$$f(x)$$
在[0,2]上连续  $\Rightarrow$   $f(x)$ 在[1,2]上连续

圃

$$m \le \frac{f(1) + 2f(2)}{3} \le M$$

式中m 和M 分别为[1,2]上 f(x)的最小和最大值根据介值定理,可知

$$\exists c \in [1,2], 使得 f(c) = \frac{f(1) + 2f(2)}{3} = f(0)$$

根据罗尔定理,可知

$$\exists \xi \in (0,c) \subseteq (0,2),$$
 *使得f*  $'(\xi) = 0$ 

2.

构造函数 $\varphi(x) = x^2 f'(x)$ 则 $\varphi(0) = \varphi(\xi) = 0$ 根据罗尔定理,得到

$$\exists \eta \in (0,\xi) \subseteq (0,2),$$
 使得 $\varphi'(\eta) = 0$ 

៣

$$\varphi'(\eta) = 2\eta f'(\eta) + \eta^2 f''(\eta)$$
$$2f'(\eta) + \eta f''(\eta) = 0$$

#### 3. 【答案】:

证: (1)因为
$$0 < g(x) < 1$$
,所以 $0 \le \int_a^x g(t)dt \le \int_a^x dt = x - a$ 

$$(2) \diamondsuit F(x) = \int_a^x f(u)g(u)du - \int_a^{a+\int_a^x g(t)dt} f(u)du$$
则 $F(a) = 0$ ,且 $F'(x) = f(x)g(x) - g(x)f(a + \int_a^x g(t)dt)$ 
因为 $0 \le \int_a^x g(t)dt \le x - a$ ,且 $f(x)$ 单调增集
所以 $f(a + \int_a^x g(t)dt) \le f(a + x - a) = f(x)$ 

$$F'(x) = f(x)g(x) - g(x)f(a + \int_a^x g(t)dt) \ge f(x)g(x) - g(x)f(x) = 0$$
则 $F(x)$ 单调增加, $F(b) \ge F(a) = 0$ 

 $\mathbb{E} \int_{a}^{a+\int_{a}^{b}g(t)dt} f(x)dx \leq \int_{a}^{b} f(x)g(x)dx.$ 

## 欢迎大家加入治学团答疑群,一起学习交流, 更有超多有用资料



扫一扫二维码,加入群聊。