# 高数上期末模拟考试

**治学团·文治学辅与发展中心**

姓名__________ 班级__________

学号__________ 序号__________

**成绩** [ ]

一、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{\pi}{4})\sqrt{x^2+1}=$ （　　）

$A.1$　　$B.\dfrac{1}{2}$　　$C.\dfrac{1}{4}$　　$D.2$

2.设奇函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$ 上具有连续导数，则(　)

$(A)\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$是奇函数　　$(B)\int_0^x[\cos f(t)+f'(t)]dt$是偶函数

$(C)\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]dt$是奇函数　　$(D)\int_0^x[\cos f'(t)+f(t)]dt$是偶函数

3. 设函数$f(x)$在区间$(-1,1)$有定义，且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$，则（）

$(A)$当$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$, $f(x)$在$x=0$处可导

$(B)$当$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$, $f(x)$在$x=0$处可导

$(C)$当$f(x)$在$x=0$处可导是,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=0$

$(D)$当$f(x)$在$x=0$处可导时,$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x^2}=0$

4. 下列反常积分发散的是（　　）

A. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sin x}$　　B. $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$　　C. $\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}dx$　　D. $\int_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x\ln^2 x}$

5.设 $y_1$、$y_2$、$y_3$为非齐次线性方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=h(x)$的 3 个特解，则由 $y_1$、$y_2$、$y_3$可以构成方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的通解的充分条件为（ ）

A$(y_1-y_2)(y_1-y_3)'-(y_1-y_2)'(y_1-y_3)=0$

B$(y_2-y_1)(y_2-y_3)'-(y_2-y_1)'(y_2-y_3)\neq0$

C$(y_1-y_3)(y_2-y_3)'+(y_1-y_3)'(y_2-y_3)=0$

D$(y_1-y_2)(y_2-y_3)'+(y_1-y_2)'(y_2-y_3)\neq0$

二、选择题（每小题 3 分，共 12 分）

1. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^p}{n^{p+1}}=$_____$(p>0)$

2.求定积分$\int_0^1\ln\left(\sqrt{t}+1\right)dt$的值__________

3. $yy^{''}-(y^{'})^2=y^2$满足$y(0)=1,y^{'}(0)=0$的特解为________

4. 设函数$y=y(x)$由方程$x^{y^2}+y^2\ln x+4=0$确定，求$y^{'}=$________.

三、计算题与判断题（每题 7 分，共 49 分）

1. 计算$\int\frac{\sin x+\cos x}{1+\sin x\cos x}dx$

2.已知$f(x)=\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt.$

(1)证明: $f(x)$是以$\pi$为周期的周期函数;(2)求函数$f(x)$的值域.

3.设$f(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{\pi - t}dt$，计算$\int_0^{\pi} f(x)dx$.

4.求解线性微分方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x - 7y \\ \frac{dy}{dt} = 5x + 10y + 4z \\ \frac{dz}{dt} = 5y + 2z \end{cases}$$

5. 判断该反常积分$\int_{1}^{+\infty}\frac{\cos(\ln x)}{x+1}dx$是否收敛。

若收敛，请计算该积分的值；若不收敛，请说明原因。



6.求微分方程 $y''-2y'+y=x(1+2e^{x})$ 的通解

7. 求 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_0^x|\cos t|dt}{x}$.

四、综合题

1.（6 分）设函数$f(x)$在$[0,1]$上连续，且$\int_0^1 f(x)dx=0$ ，

证明：存在一点$\xi\in(0,1)$,使$f(1-\xi)+f(\xi)=0$

2.（9 分）$f(x)$在$[0,2]$上二阶连续可导，在$(0,2)$内可导，$3f(0) = f(1) + 2f(2)$

(1).（3 分）求证$\exists\xi \in (0,2)$，使得$f'(\xi) = 0$

(2).（6 分）求证$\exists\eta \in (0,2)$，使得$2f'(\eta) + \eta f''(\eta) = 0$

3.(9分）设函数$f(x)$, $g(x)$在区间$\left[a,b\right]$上连续，且$f(x)$单调增加,$0<g(x)<1$,证明：

$$(1)\ 0\le\int_a^x g(t)dt\le x-a,\ x\in[a,b]$$

$$(2)\ \int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx\le\int_a^b f(x)g(x)dx$$

# 参考解析

## 一、选择题

1.答案：B

解析：先化简 $\arctan\frac{x+1}{x}-\frac{\pi}{4}$

由 $\tan(\arctan\frac{x+1}{x}-\frac{\pi}{4})=\frac{\frac{x+1}{x}-1}{1+\frac{x+1}{x}}=\frac{1}{2x+1}$，并且

$$\arctan\frac{x+1}{x}-\frac{\pi}{4}\in(0,\frac{\pi}{4}),$$

所以 $\arctan\frac{x+1}{x}-\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{2x+1}$.

从而原式 $=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=\frac{1}{2}$.

2. 答案：A

【参考解析】:因为$f(x)$是奇函数，则$f'(x)$是偶函数，又$\cos x$是偶函数，则$\cos f(x)$是偶函数，即$\cos f(x)+f'(x)$是偶函数，所以其积分为奇函数，即正确选项为【A】.

3. 答案：C

【参考答案】：当$f(x)$在$x=0$处可导时，则$f(x)$在$x=0$处连续，则由$\lim\limits_{x\to0}f(x)=0$

得$f(x)=0$.于是

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=f'(0)$$

$$\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{\sqrt{|x|}}=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}\frac{x}{\sqrt{|x|}}=0$$

所以正确选项为【$C$】.

4.答案：A

解析：A.0 为奇点，而 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{\sin x}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$ ,由比较准则可知, $f(x)=\dfrac{1}{\mathrm{x}}$ 和 $g(x)=\dfrac{1}{\sin x}$ 同敛散 即原积分是发散的.

5. 答案：B

解析由 Wronski 行列式不等于 0 可知，应选 B。

二、填空题

1.【答案】: $\dfrac{1}{1+p}$

【参考解析】: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n}k^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{k}{n}\right)^p=\int_0^1 x^p=\dfrac{x^{p+1}}{1+P}\Big|_0^1=\dfrac{1}{1+p}$

2.【答案】：0.5

【参考解析】令 $\sqrt{t}=x$

则原式= $\int_0^1\ln(1+x)dt\ \ =x^2\ln(1+x)_0^1-\int_0^1\dfrac{x^2}{x+1}dx$

$=\ln2-\int_0^1(x-1)+\dfrac{1}{x+1}dx$

$=\ln2+\dfrac{1}{2}-\ln2$

$=\dfrac{1}{2}$

3. 【答案】：$y=e^{\frac{x^2}{2}}$

解析（凑微分法）：

由原方程得 $\frac{yy''-(y')^2}{y^2}=1$，即 $(\frac{y'}{y})'=1$

则 $\frac{y'}{y}=x+C_1$，由初始条件得 $C_1=0$

故 $\frac{y'}{y}=x$，即 $\frac{dy}{y}=xdx$

因而所求特解为 $y=e^{\frac{x^2}{2}}$

4.【答案】：$-\frac{y}{2x\ln x}$

解析：在方程两边对 $x$ 求导，得

$$e^{y^2\ln x}(2yy'\ln x+\frac{y^2}{x})+(2yy'\ln x+\frac{y^2}{x})=0$$

即 $(e^{y^2\ln x}+1)(2yy'\ln x+\frac{y^2}{x})=0$

所以 $2yy'\ln x+\frac{y^2}{x}=0$

所以 $y'=-\frac{y}{2x\ln x}$

三、计算题

1.

$$\int\frac{\cos x+\sin x}{1+\sin x\cos x}dx$$
$$=\int\frac{\cos x+\sin x}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}(\sin^2 x+\cos^2 x-2\sin x\cos x)}dx$$
$$=\int\frac{2(\cos x+\sin x)}{3-(\sin x-\cos x)^2}dx$$
$$=2\int\frac{d(\sin x-\cos x)}{3-(\sin x-\cos x)^2}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\ln\frac{\sqrt{3}+\sin x-\cos x}{\sqrt{3}-\sin x+\cos x}+C$$

2 解： $(1)$对于任意的$x\in(-\infty,+\infty)$,

$$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\pi+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt\overset{令t=\pi+u}{=}\int_{x}^{x+\frac{\pi}{2}}|\sin u|du=f(x).$$

$(2)$对于任意$x\in[0,\pi]$ $\quad f'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|-|\sin x|=|\cos x|-|\sin x|$

$$f'(x)=\begin{cases}\cos x-\sin x, 0\le x<\frac{\pi}{2}\\ -\cos x-\sin x, \frac{\pi}{2}\le x\le\pi\end{cases}\qquad 令f'(x)=0得x=\frac{\pi}{4},\frac{3\pi}{4}.$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt=\sqrt{2}\qquad f\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}+\frac{\pi}{2}}|\sin t|dt=2-\sqrt{2}$$

$f(\pi)=f(0)=1$ 所以函数$f(x)$的值域为$\left[2-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$.

3.【答案】:

$$解:\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi\left(\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}dt\right)dx=\left(x\int_0^x\frac{\sin t}{\pi-t}dt\Big|_0^\pi-\int_0^\pi x\frac{\sin x}{\pi-x}dx\right)$$
$$=\int_0^\pi\pi\frac{\sin t}{\pi-t}dt-\int_0^\pi x\frac{\sin x}{\pi-x}dx=\int_0^\pi(\pi-x)\frac{\sin x}{\pi-x}dx$$
$$=\int_0^\pi\sin xdx=2$$

4. 解:

令 $A=\begin{bmatrix}2 & -7 & 0\\ 5 & 10 & 4\\ 0 & 5 & 2\end{bmatrix}$， $x=\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}$,则原方程可写为:

$$\dot{x}=Ax$$

A 的特征方程 det（A-λI）=（λ-5）（λ-7）（λ-2）=0.因此 A 的特征值为$\lambda_1=2$，$\lambda_2=5$，$\lambda_3=7$。

对应于$\lambda_1=2$ 的特征向量可取$\alpha_1=(4,0,-5)^T$，

对应于$\lambda_2=5$ 的特征向量可取$\alpha_2=(-7,3,5)^T$，

对应于$\lambda_3=7$ 的特征向量可取$\alpha_3=(-7,5,5)^T$，

故所给微分方程组的基解矩阵为 $X(t)=\begin{bmatrix}4e^{2t} & -7e^{5t} & -7e^{7t}\\ 0 & 3e^{5t} & 5e^{7t}\\ -5e^{2t} & 5e^{5t} & 5e^{7t}\end{bmatrix}$

因而通解为 $x=X(t)C$，其中 $C=(C_1,C_2,C_3)^T$ 为任意常数向量。



5. 答案：

解：该反常积分不收

设$\ln x=t$ $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(\ln x)}{x+1}dx=\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{e^t+1}e^t dt=\int_0^{+\infty}\frac{\cos t}{1+e^{-t}}dt$，其与$\int_0^{+\infty}\cos t dt$的敛散性相同

反常积分$\int_0^{+\infty}\cos t dt$不收敛

即$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\ln x)}{x+1}$不收敛

6. 答案：$r^2-2r+1=0$，故$r_{1,2}=1$，对应齐次方程的通解为$Y=(C_1+C_2x)e^x$

显然 $f(x)=x+2xe^{x}=f_1(x)+f_2(x)$.

设 $y''-2y'+y=f_1(x)=x$ 的特解为 $y_1^*=Ax+B$，易得 $A=1$， $B=2$

故 $y_1^*=x+2$，同理易得 $y_2^*=\dfrac{x^3e^x}{3}, y^*=x+2+\dfrac{x^3e^x}{3}$，其通解为

$$y=Y+y^*=(C_1+C_2x+\frac{x^3}{3})e^x+x+2$$

7. 解：对于充分大的$x$存在唯一正整数$n$使得$n\pi\le x\le(n+1)\pi$,

所以$\int_0^x|\cos t|dt=\int_0^{n\pi}|\cos t|dt+\int_{n\pi}^x|\cos t|dt$

$$=n\int_0^{\pi}|\cos t|dt+\int_{n\pi}^x|\cos t|dt=2n+\int_{n\pi}^x|\cos t|dt$$

其中$0\le\int_{n\pi}^x|\cos t|dt\le\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}|\cos t|dt=2$

即$2n\le\int_0^x|\cos t|dt\le2(n+1)$ 所以$\dfrac{2n}{(n+1)\pi}\le\dfrac{\int_0^x|\cos t|dt}{x}\le\dfrac{2(n+1)}{n\pi}$

由于$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2n}{(n+1)\pi}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2(n+1)}{n\pi}=\dfrac{2}{\pi}$ 则$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{S(x)}{x}=\dfrac{2}{\pi}$.

四、综合题

1.解答：

设$F(x)=\int_0^x f(1-\mathrm{t})+f(\mathrm{t})dt$

易有$F(0)=0$

又因$F(1)=\int_0^1 f(1-\mathrm{t})+f(\mathrm{t})dt=2*\int_0^1 f(x)dx=0$

所以：$F(0)=F(1)=0$

由罗尔定理：存在一点$\xi\in(0,1)$,使$F'(\xi)=0$

2. *证：1.*

$$f(x)\text{在}[0,2]\text{上连续}\Rightarrow f(x)\text{在}[1,2]\text{上连续}$$

*而*

$$m\le\frac{f(1)+2f(2)}{3}\le M$$

*式中 m 和 M 分别为[1,2]上 f(x)的最小和最大值*

*根据介值定理，可知*

$$\exists c \in [1,2], 使得 f(c) = \frac{f(1)+2f(2)}{3} = f(0)$$

*根据罗尔定理，可知*

$$\exists \xi \in (0,c) \subseteq (0,2), 使得 f'(\xi) = 0$$

*2.*

*构造函数* $\varphi(x) = x^2 f'(x)$

*则* $\varphi(0) = \varphi(\xi) = 0$

*根据罗尔定理，得到*

$$\exists \eta \in (0,\xi) \subseteq (0,2), 使得 \varphi'(\eta) = 0$$

*而*

$$\varphi'(\eta) = 2\eta f'(\eta) + \eta^2 f''(\eta)$$

*得到*

$$2f'(\eta) + \eta f''(\eta) = 0$$

3.【答案】:

证：(1)因为 $0 < g(x) < 1$，所以 $0 \le \int_a^x g(t)dt \le \int_a^x dt = x - a$

(2)令 $F(x) = \int_a^x f(u)g(u)du - \int_a^{a+\int_a^x g(t)dt} f(u)du$

则 $F(a) = 0$，且 $F'(x) = f(x)g(x) - g(x)f\left(a + \int_a^x g(t)dt\right)$

因为 $0 \le \int_a^x g(t)dt \le x - a$，且 $f(x)$ 单调增加

所以 $f\left(a + \int_a^x g(t)dt\right) \le f(a + x - a) = f(x)$

$$F'(x) = f(x)g(x) - g(x)f\left(a + \int_a^x g(t)dt\right) \ge f(x)g(x) - g(x)f(x) = 0$$

则 $F(x)$ 单调增加，即 $F(b) \ge F(a) = 0$

即 $\int_a^{a+\int_a^b g(t)dt} f(x)dx \le \int_a^b f(x)g(x)dx.$

欢迎大家加入治学团答疑群，一起学习交流，

更有超多有用资料