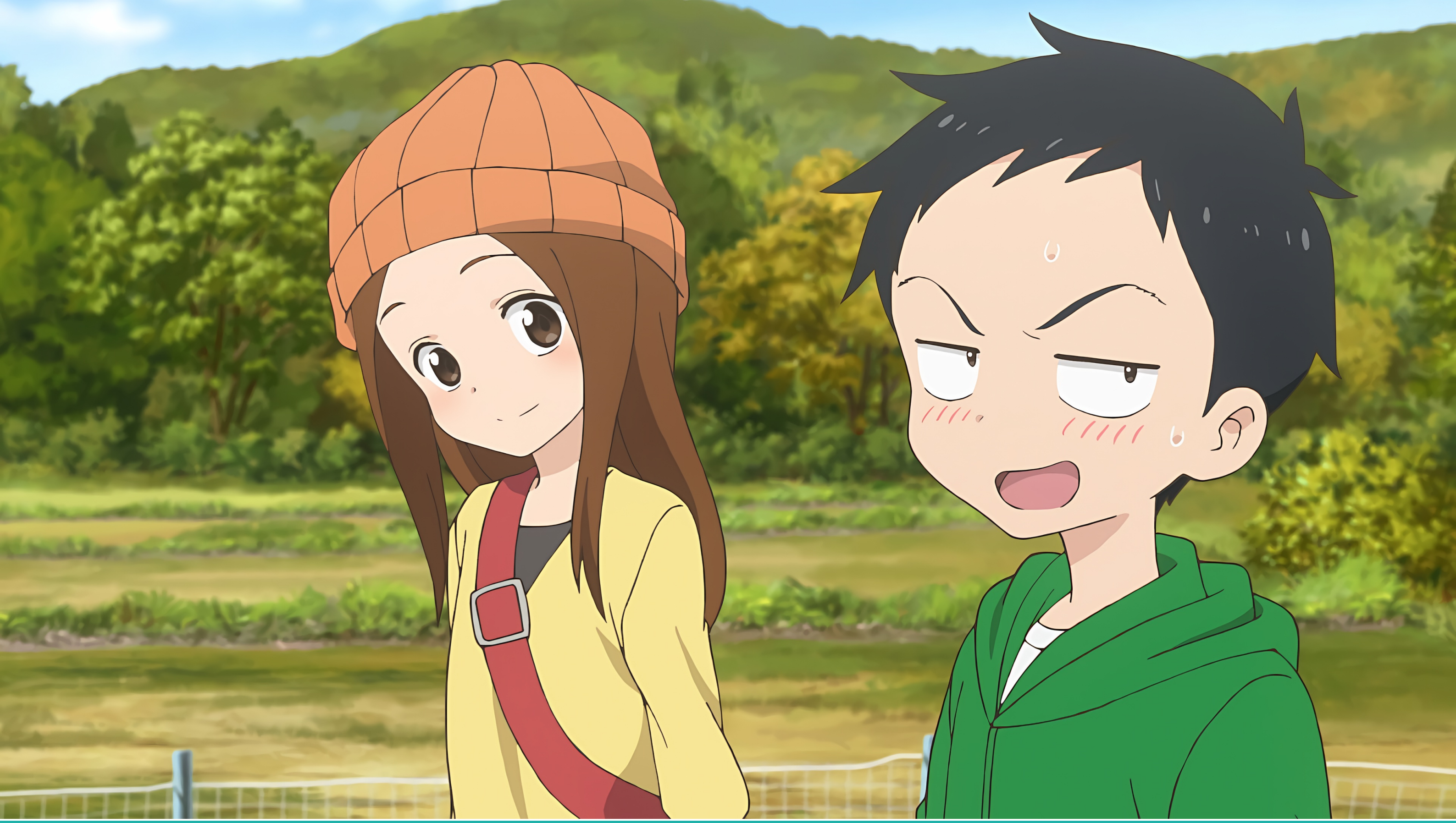


工科数学分析基础

多元函数微分学及重积分复习资料

作者：钱学组, AI 学组, 储能学组, 钱院学辅

组织：Qian Xuesen Honor College, XJTU

时间：April 11, 2025

版本：1.0.1

功崇惟志　业广惟勤

前言

这是工科数学分析（二）期中考前专题复习资料。您在使用本资料中遇到的问题可通过 zimuhan276@gmail.com 邮箱反映。感谢您的宝贵建议！

钱学组，AI 学组
2025 年 4 月

参与编写本资料的志愿者名单如下：

- 钱学组：张云泽
- 储能学组：李泽成
- AI 学组：
  - 伍欢宇
  - 韩子慕
  - 郭泽伟
  - 闫涵

注意

由于编写资料的志愿者众多，且每位志愿者使用数学符号的习惯不同，故本版本 (2024_v.1.0.1) 的符号并未统一，如 $x \to 1^+$ 与 $x \to 1+0$ 等，会同时存在于本资料中，希望读者见谅.

目录

第 1 章 多元函数微分学

本章将讨论非常基本的连续性和可微性问题，在近年考试中也偏向于在头几个选择题考察连续性和可微性相关的问题。另外还会讨论多元泰勒和求极值的话题，套用公式不难，但里面分析和考虑的内容一点不少，不过幸运的是考试中对此要求不高，一般只有少量填空和一道大题。

内容提要

- ❑ 连续性讨论
- ❑ 可微性讨论
- ❑ 多元函数的泰勒公式与极值问题讨论

1.1 连续性讨论

定义

设 $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义在 D 上的多元函数，若 $\mathbf{x_0} \in D$, $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x_0})$, 即称 $f(x)$ 在 $\mathbf{x_0}$ 处连续。若对于 $A \subseteq D, \forall \mathbf{x} \in A, f(x)$ 都在 $\mathbf{x}$ 处连续，则称 $f(x)$ 在 A 上连续；且当 $A = D$ 时称 $f(x)$ 为连续函数。♣

这里涉及了函数极限，我们回顾一下。

定义

设 $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义在 D 上的多元函数，若 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, C \in \mathbb{R}, \mathbf{x_0} \in D$ 使得 $\forall \mathbf{x} \in \mathring{U}(x_0, \delta), |f(\mathbf{x}) - C| < \epsilon$, 称 $f(x)$ 在 $\mathbf{x_0}$ 处极限为 C，记作 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} f(\mathbf{x}) = C$。♣

注 邻域域是一个的开球，上面定义了距离函数，来规定 $\epsilon - \delta$ 语言，除此之外，并没有限制趋近 $\mathbf{x}$ 的方式，所以实际上这个极限的讨论是有难度的，需要多加小心。

以下我们稍微回忆一下函数连续性的各种性质

定理

- 有界性：闭区间 $A \subseteq D$ 上 $\exists M > 0, \forall \mathbf{x} \in A, |f(x)| \leq M$。
- 最大最小值定理：闭区间 $A \subseteq D$ 上必 $\exists \mathbf{c}, \mathbf{d} \in A, \forall f(\mathbf{c}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{d})$。
- 局部保号：若 $f(\mathbf{c}) \neq 0$，那么 $\exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in \mathring{U}(\mathbf{c}, \delta), f(x) \cdot f(\mathbf{c}) > 0$
- 介值性：$f(\mathbf{x})$ 可以取遍 $A \subseteq D$ 中最大值和极小值之间所有数。

♡

这里再简要介绍一下一些有具体要求的连续情况。

定义

- 一致连续：函数 $f: D_f \to \mathbb{R}, A \subseteq D, \forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$, 当 $|\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}| < \delta$, 总有 $|f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_2})| < \epsilon$。
- 李普希兹连续：函数 $f : D_f \to \mathbb{R}, A \subseteq D, \exists C \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$, 总有 $|f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_2})| \leq C \cdot |\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}|$。
- 赫尔德连续：函数 $f : D_f \to \mathbb{R}, A \subseteq D, \exists C \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{x_1}, \mathbf{x_2} \in A$, 总有 $|f(\mathbf{x_1}) - f(\mathbf{x_2})| \leq C \cdot |\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2}|^{\alpha}$, 其中 $\alpha \in (0, 1)$。

♣

注

- 用反证法可以得到在闭集上连续的函数同时也是一致连续的，具体可以参考上册的教科书。考虑到在课后题有做过证伪一致连续的题，下面给出证伪的范式。

  命题

  若 $\exists \epsilon > 0$, 使得 $\exists$ 两个点列 $\mathbf{a_n}, \mathbf{b_n} \in A$, 当满足 $\lim\limits_{n\to\infty} |\mathbf{a_n} - \mathbf{b_n}| = 0$ 时仍有 $|f(\mathbf{a_n}) - f(\mathbf{b_n})| \geq \epsilon$, $\Longrightarrow$ f 在 A 上不一致连续。

  ♠

  根据经验上来讲，应当让这两个点列向着 A 的闭包中特殊的点收敛，f 在附近基本上是激烈震荡或无界的。
- 对于后两个连续，高数暂时没有要求掌握，但是在微分方程和实分析上都会发挥作用，可以稍微了解一下。

练习 1.1 判断以下命题正误:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} \lim\limits_{y\to y_0} f(x,y) \iff \lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$;
2. 任意取 l 的方向，$\dfrac{\partial f}{\partial l}|_{p_0}$ 都存在 $\Longrightarrow$ $f(x,y)$ 在点 p_0 处连续;

解

1. 错误。前者是累次极限，后者是二重极限。两者的是否存在是既不充分也不必要的关系。例如 $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在 $(0,0)$ 处有累次极限为 0, 而使用直线路径 $y = kx$ 趋近可以发现累次极限为 $\dfrac{k}{1+k^2}$ 非定值，故不存在；反之，容易举出 $f(x,y) = x^2 sin(\dfrac{1}{y})$ 的例子，取趋近于 $(0,0)$ 明显在累次极限时对 $y \to 0$ 极限不存在，但是显然具有二重极限收敛于 0.
2. 错误。各个方向导数都存在，意味着在每一个过 z 轴的竖直面可以得到一个在 p_0 点可导的曲线，同时也一定会连续, 但这只能保证按照 $y = kx$ 路径趋近的时候连续，如果按照其他方法趋近则可能发现极限不存在。比如下面这个老师在课堂上举过的例子:
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+y^4}{x^3+y^3}; & x,y \neq 0 \\ 0. & x = y = 0 \end{cases}$$
在 $(0,0)$ 处不连续，但是各个方向方向导数都存在。

更多的题会跟微分一同列出，包括基本上每年必有的大题。

1.2 可微性讨论

依旧先复习一下概念。

定义

设 $f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 定义在 D 上的多元函数，若 ∇f 存在 $\lim\limits_{\mathbf{x}\to\mathbf{x_0}} \dfrac{f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x_0}) - \langle \nabla f, \mathbf{x} - \mathbf{x_0}\rangle}{||\mathbf{x} - \mathbf{x_0}||} = 0$，即称 $f(x)$ 在 $\mathbf{x_0}$ 处可微。若对于 $A \subseteq D, \forall \mathbf{x} \in A, f(x)$ 都在 $\mathbf{x}$ 处可微，则称 $f(x)$ 在 A 上连续；且当 $A = D$ 时称 $f(x)$ 为可微函数。

这个定义足够明显地给出了可微的必要条件：f 是一个连续，可偏导的函数。下面补充一个用的很少的充分条件，但是这个“充分不必要”确是常考的。

定理

$f: D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，若 $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\mathrm{i} = 1, 2, \cdots, \mathrm{n})$ 均存在并且在 $\mathbf{x_0}$ 连续，那么 f 在 $\mathbf{x_0}$ 可微。

可微十分有用，如果确定一个函数是可微的，那么可以自由地求梯度，方向向量，利用全微分的线性主部来研究函数局部的性质，具体可见多元泰勒的讨论。

练习 1.2 函数 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$，则 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处

A. 连续但偏导数不存在；

B. 偏导数存在但不可微；

C. 可微;

D. 偏导数存在且连续。

解 答案是 B，连续是很显然的，偏导数也是很显然存在，而且为零。那么讨论是否可微，考虑极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sqrt{|xy|}}{\sqrt{x^2+y^2}}$，这个时候我们尝试使用经典的 $y = kx$ 路径，得到结果是 $\sqrt{\dfrac{|k|}{1+k^2}}$，可以知道这个极限并不存在，故可知不可微。

下面给出一种取极坐标参数来求极限的方法，有时候更加简便。

命题

当求极限形如 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$ 时，采用 $\begin{cases} x = x_0 + \rho\cos\theta, \\ y = y + 0 + \rho\sin\theta. \end{cases}$，于是极限就转化为 $\lim\limits_{\rho\to 0} f(\rho\cos x, \rho\cos\theta)$。

例题 1.1 讨论 $f(x, y) \begin{cases} \dfrac{\sqrt{|xy|}}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2), & x^2+y^2 \neq 0 \\ 0. & x = y = 0 \end{cases}$ 的连续性与可微性。

解

如果不换元，也可以做。下面展示代换的做法，很直接简单。

代换得：$f(x,y)=g(\rho,\theta)=|\sin\theta cos\theta|\sin(\rho^2)\rho;$

$\lim\limits_{\rho\to0}g(\rho,\theta)=\lim\limits_{\rho\to0}\rho\sin\rho^2\lim\limits_{\rho\to0}|\sin\theta cos\theta|=0,$ 容易看出连续性；

又由：$f(x,0)=f(0,y)=0;$

不难得到：$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial f}{\partial y}=0;$

验证可微性，考虑 $\lim\limits_{\rho\to0}\dfrac{g(\rho,\theta)}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to0}\sin\rho^2\lim\limits_{\rho\to0}|\sin\theta\cos\theta|=0,$

这是一个很显然的无穷小量乘以有界值的极限不难得到可微的结果。

下面将给出一些连续性和可微分兼备的题目。

问题 1.1 设二元函数 f 在点 P_0 的某领域 $U(P_0)$ 内偏导数 f_x,f_y 都有界，证明 f 在 $U(P_0)$ 内连续。

解

$(x_0,y_0)\in U(P_0),$ 考虑极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)-f(x_0,y_0)=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to\mathbf{0}}f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$

$=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to\mathbf{0}}[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)]+[f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)];$

不难发现的是，两个中括号内都可以分别看做两个一元函数 $f(x,y_0+\Delta y)f(x_0,y)$。

而一元函数可导 $\iff$ 可微，又由 f_x,f_y 存在，那么可以直接对一元函数进行微分并取线性主部。

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to\mathbf{0}}f_x(x_0,y_0+\Delta y)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y$。虽然函数 f 的一阶连续性未知，但是其偏导数都是有界函数，而有界变量乘以一个无穷小量，仍然是无穷小量。

$\therefore$ 原式 $=\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to\mathbf{0}}f_x(x_0,y_0+\Delta y)\Delta x+\lim\limits_{(\Delta x,\Delta y)\to\mathbf{0}}f_y(x_0,y_0)\Delta y=0+0=0;$

$\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)-f(x_0,y_0)=0$ 等价于 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0),$ 即按照定义证明了 f 连续。

笔记 不难看出，这类分析问题一般操作基本是添加中间项，使问题简化为一元，再用极限的知识去证明。

问题 1.2 设 $f_x(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 某领域内存在且处连续于该点，又 $f_y(x_0,y_0)$ 存在，证明：$f(x_0,y_0)$ 在点 (x_0,y_0) 处可微。

解

$$\text{考虑极限} \lim_{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$$\overset{\text{由}1.}{=} \lim_{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0} \frac{f_x(x_0,y_0+\Delta y)\Delta x + o(\Delta x) + f_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\Delta y) - f_x(x_0,y_0)\Delta x - f_y(x_0,y_0)\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$$= \lim_{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0} \frac{f_x(x_0,y_0+\Delta y)\Delta x - f_x(x_0,y_0)\Delta x + o(\Delta x) + o(\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}(\text{此时恰好使用极坐标方便更加直接})$$

$$= \lim_{\rho\to 0} \frac{[f_x(x_0,y_0+\Delta y) - f_x(x_0,y_0)]\rho\cos\theta}{\rho} + \lim_{\rho\to 0}\frac{o(\rho\cos\theta)+o(\rho\sin\theta)}{\rho}(\text{后一项收敛于零，绝对值夹逼即可})$$

$$\lim_{\rho\to 0}\cos\theta \lim_{\rho\to 0} f_x(x_0,y_0+\Delta y) - f_x(x_0,y_0)(\cos\theta\ \text{是有界的，而}\ f_x\ \text{是连续的，右侧极限应该是一个无穷小})$$

$= 0$；由可微的定义可知 f 在 (x_0,y_0) 处可微，既证。

再展示一道近年来每年必有一道的讨论分析题。

问题 1.3 讨论函数 $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0 \\ 0. & x=y=0 \end{cases}$ 在 $(0,0)$ 处偏导数存在性，若存在，讨论偏导数的连续性和函数的可微性。

解

$$f_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x^2}) = 0;$$

$$f_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{y\to 0}(y\sin\frac{1}{y^2}) = 0;$$

故 $(0,0)$ 处偏导数存在。得到：$f_x = 2x\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} - \dfrac{2x}{x^2+y^2}\cos\dfrac{1}{x^2+y^2}$;

取路径 $y=kx, \lim\limits_{x\to 0} f_x = \lim\limits_{x\to 0}[2x\sin\dfrac{1}{(1+k^2)x^2} - \dfrac{2}{(1+k^2)x}\cos\dfrac{1}{(1+k^2)x^2}]$

$= 0-\infty$。可知极限不存在。即 f_x 不连续，f_y 同理也不连续，故在 $(0,0)$ 处偏导数不连续。

$$\left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leq \sqrt{x^2+y^2};$$

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0}\frac{|\Delta f - f_x dx - f_y dy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0}\left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right| \leq \lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to 0}\sqrt{x^2+y^2} = 0;$$

$\therefore f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微。

注 连续和微分就暂告一段落。这两个都是分析学里面的基本且重要的内容，以后再面对实分析和复分析的内容时还会反复地讨论。

1.3 多元函数的泰勒公式与极值问题讨论

1.3.1 多元泰勒公式

定理（补充 Schwarz 定理。）

对二元函数 $f(x,y)$ 如果其二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial f}{\partial x},\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 存在且在 (x_0,y_0) 连续，$\implies f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$。♡

证明 具体的证明思路是引入一个 $\Delta(h,k)=f(x_0+h,y_0+k)-f(x_0y_0+k)-f(x_0+h,y_0)+f(x_0,y_0)$。利用连续函数的性质构造两个顺序不同的积分 $\dfrac{1}{hk}\displaystyle\int_{y_0}^{y_0+k}dy\int_{x_0}^{x_0+h}f_{yx}(x,y)dx=\dfrac{\Delta(h,k)}{hk}=\dfrac{1}{hk}\int_{x_0}^{x_0+h}dx\int_{y_0}^{y_0+k}f_{xy}(x,y)dy$ 再利用同时取 $\displaystyle\lim_{(h,k)\to\mathbf{0}}$ 的极限，配合 f_{xy},f_{yx} 在 (x_0,y_0) 处的连续性和积分中值定理，得到 $f_{xy}(x_0,y_0)=\displaystyle\lim_{(h,k)\to\mathbf{0}}\dfrac{\Delta(h,k)}{hk}=f_{yx}(x_0,y_0)$，即可证明。

由此我们可以得到很好的对称的 Hesse 矩阵。下面给出多元泰勒公式的形式。

定理

函数 $f:D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R};f\in C^{(m)},m\geq 2$，有二阶拉格朗日余项的 Taylor 公式：$f(\boldsymbol{x})=f(\boldsymbol{x_0})+\langle\nabla f(\boldsymbol{x_0}),\boldsymbol{\Delta x}\rangle+\dfrac{1}{2!}(\boldsymbol{\Delta x})^T\boldsymbol{H_f}(\boldsymbol{x_0}+\theta\boldsymbol{\Delta x})\boldsymbol{\Delta x}$。其中二阶的 $\boldsymbol{H_f}=\begin{bmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{yx}&f_{yy}\end{bmatrix}$，更高阶的也是类似的混合偏导矩阵。♡

证明

得到的方法很简单，构造 $\Phi(t)=f(t\mathbf{\Delta x}+\mathbf{x_0}),\mathbf{\Delta x}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\mathbf{e_i}$，利用一元函数的麦克劳林公式，展开二阶并保留拉格朗日余项，得到：$\Phi(t)=f(\mathbf{x_0})+(\displaystyle\sum_{i=0}^{n}f_{xi}(\mathbf{x_0})\Delta x_i)t+(\sum_{i,j=1,2,\cdots,n}f_{x_ix_j}(\mathbf{x_0}+\theta t\mathbf{\Delta x})\Delta x_i\Delta x_j)\frac{t^2}{2!}$，不难整理得一个是内积形式，另一个是 ij 的组合，可以写成二次型的形式，即可得到：Taylor 公式：$f(\mathbf{x})=f(\mathbf{x_0})+\langle\nabla f(\mathbf{x_0}),\mathbf{\Delta x}\rangle t+\dfrac{1}{2!}(\mathbf{\Delta x})^TH_f(\mathbf{x_0}+\theta\mathbf{\Delta x})\mathbf{\Delta x}\dfrac{t^2}{2!}$; 令 $t=1$, 即可得到展开。

笔记 由于 $f\in C^{(2)}$，所以以二阶为例，由连续性可得：

$$
\begin{aligned}
&\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to\mathbf{0}}H_f(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)-H_f(x+\Delta x,y+\Delta y)\\
&=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to\mathbf{0}}\begin{bmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{yx}&f_{yy}\end{bmatrix}(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y)-\begin{bmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{yx}&f_{yy}\end{bmatrix}(x+\Delta x,y+\Delta y)\\
&=\begin{bmatrix}o(f_{xx})&o(f_{xy})\\o(f_{yx})&o(f_{yy})\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

二次型归根到底要看系数的大小，而如果一个二次型每一个系数都是一个无穷小量，跟单位矩阵 $I=\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right]$ 相比，容易得到：$\displaystyle\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to\mathbf{0}}\frac{(\Delta x,\Delta y)\begin{bmatrix}o(f_{xx})&o(f_{xy})\\o(f_{yx})&o(f_{yy})\end{bmatrix}(\Delta x,\Delta y)^T}{(\Delta x,\Delta y)I(\Delta x,\Delta y)^T}=0$，即得到拉格朗日余项：$\dfrac{1}{2!}(\mathbf{\Delta x})^TH_f(\mathbf{x_0})\mathbf{\Delta x}+o(||\mathbf{\Delta x}||)^2$.

由之前推导得到亮相的方法不难推知：

定理

$f \in C^{(m)}, m > k$，则泰勒公式的第 k 项形如：

$$\frac{1}{k!}\sum_{(l_1,l_2,\cdots,l_k=1,2,\cdots,n)}(\prod_{(i=l_1,l_2,\cdots,l_k)}\Delta x_i)\frac{\partial^k f}{\partial x_{l_1}\partial x_{l_2}\cdots\partial x_{l_k}} \text{或者看成一个算子左乘 } f\frac{1}{k!}(\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i\frac{\partial}{\partial x_i})^k f$$

1.3.2 极值问题讨论

定义（无约束极值）

设 $f : U(\mathbf{x_0}) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，若 $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x_0})$，均有：$f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x_0})$ 或者 $f(\mathbf{x}) \ge f(\mathbf{x_0})$，则称 f 在 $\mathbf{x_0}$ 处取得无约束极大值，(或无约束极小值)。$f(\mathbf{x_0})$ 称为极大值（或极小值），$\mathbf{x_0}$ 称为极大值点（或极小值点）。

注 对于可微的函数 $\nabla f(\mathbf{x}_0) = 0$，即 $\mathbf{x}_0$ 是驻点是一个取极值的必要条件。但对于不可微的函数则没有如此要求，甚至偏导数可能不存在但是仍然取得极值，所以总体上驻点并不是函数取极值的必要条件。

下面给出当 $f \in C^{(2)}(U(\mathbf{x}_0))$ 的取极值的充分条件。

命题（无约束的极值问题）

由于必要条件有 $\nabla f|p_0 = 0$，考虑 $H_f|p_0$ 矩阵的性质来确定 p_0 极值的存在：

- $det(H_f|p_0) = 0$ 无法通过二阶泰勒展开确定极值点的存在；
- $H_f|p_0$（半）正定，极小值；
- $H_f|p_0$（半）负定，极大值；
- $H_f|p_0$ 既非（半）正定也非（半）负定，故 f 在 p_0 的邻域可以取出更大和更小的值，故 p_0 并不是极值点，取不到极值；

上述方法可以讨论一个开区域上的极值（最值）问题，但是对于一个有边界的闭集，则要考虑约束条件，快使用拉格朗日乘数法。

下面有约束的极值受限制于约束条件，要在约束的点集中考察极值的取得。

命题（有约束的极值问题）

对于函数 $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$，其变量需要满足方程 $\phi(\mathbf{x}) = 0$，其取极值点 $\mathbf{x_0}$ 满足一个必要性的方程：$\begin{cases} \nabla f(\mathbf{x_0}) = \lambda_0 \nabla\phi(\mathbf{x_0}), \\ \phi(\mathbf{x_0}) = 0, \end{cases}$ 实际上这样书写的方程更加直观，与几何联系更加紧密。

下面给出一道简单的考试真题。

例题 1.2 $z = x^2 + y^2 - 12x + 16y, D = \{(x,y)|x^2+y^2 \le 25\}$ 上最大值。

解

$$\text{先求内部点上的极值：}\nabla z = (2x-12, 2y+16y) = 0 : \begin{cases} x = 6, \\ y = -8, \end{cases}$$

$\therefore z$在内部取不到极值点，那么考虑在边界上的情况。取$\phi(x,y) = x^2+y^2-25 = 0$

$$\begin{cases} (2x-12, 2y+16) = \lambda_0(2x, 2y), \\ \phi(x,y) = x^2+y^2-25 = 0, \end{cases} \therefore \text{解得点 } (3,-4), (-3,4)\text{，带入分别得到：-75,125。}$$

考虑到内部无极值点，故最值一定在边界上取到，可以认为 125 即是最大值。

笔记 若有多 $(n-1)$ 个约束条件，则考虑一个线性组合：$\nabla f(\mathbf{x_0}) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \nabla \phi_i(\mathbf{x_0})$ 来代替，透过几何直观很容易感受到其中的合理性，仿效二元利用隐函数和线性方程的知识可轻轻证之。

下面是一道多个约束条件的例题。

例题 1.3 曲面 $S_1 : z = x^2 + y^2$ 与平面 $S_2 : x+y+z = 1$ 的交线到原点的距离的最大值。

解 设 $f(x,y,z) = r^2 = x^2+y^2+z^2$，方便研究距离的最大值。考虑两个约束 $\phi = x^2+y^2-z = 0;$ $\psi = x+y+z-1 = 0$。利用拉格朗日乘数法 $\begin{cases} \nabla f = \mu\nabla\phi + \lambda\nabla\psi, \\ \phi(x,y,z) = 0, \\ \psi(x,y,z) = 0. \end{cases}$ $\therefore$ 即可用 $\begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

解得 $x = y$ 或 $z = -\dfrac{1}{2}$ 再结合约束方程即可得到：$x = y = \dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}, z = 2\pm\sqrt{3}$，得到 $f_{max} = 9+5\sqrt{3}, f_{min} = 9-5\sqrt{3}$。考察后发现该曲线为一空间椭圆，确实有去原点的最大值和最小值，故距离的最大值为 $\sqrt{9+5\sqrt{3}}$。

下面给出极值问题相关的其他题目。

问题 1.4 利用拉格朗日乘数法证明不等式：$a_i > 0$ 时，有：

$$n(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a_i})^{-1} \le (\prod_{i=1}^{n} a_i)^{\frac{1}{n}}$$

解

$\sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i} = \dfrac{1}{a}$, 其中有$a > 0$设多元函数：$z = \prod_{i=1}^{n} a_i$。并设约束条件：$\phi = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{1}{a_i} - \dfrac{1}{a}$。

不难得到：$\dfrac{\partial z}{\partial a_i} = \dfrac{z}{a_i}, \dfrac{\partial \phi}{\partial a_i} = \dfrac{-1}{a_i^2}$; 代入拉格朗日方程：$\lambda_0 = -a_i z \overset{(z\neq 0)}{\Longrightarrow} a_1 = a_2 = \cdots = a_n$。

$\because$ 显然令 $\dfrac{1}{a_1}$ 趋近正无穷小，让其他 a_i 保持有界值，那么显然 $z \to +\infty$，故此时取到应为极（最）小值。

$\therefore z \ge (na)^n$; 故可以得到：$(z)^{\frac{1}{n}} \ge na = n(\sum_{i=1}^{n} a_i)^{-1}$，既证。

问题 1.5 设 u : 有界闭区域$D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$，并且在内部满足 $u_{xx} + u_{yy} + cu = 0, c : Constant < 0,$ 证明：

1. u 无法在 D 内部取得正 D 上的最大值或负最小值；
2. 若 u 在 D 上连续，且在 D 的边界上恒为零，则在 D 上亦恒为零。

解

1. 若函数 u 在内部取得正最大值（一定是极大值），那么一定有：$u_{xx} \le 0, u_{yy} \le 0, cu < 0$，而这显然与题目条件矛盾，故 u 无法在内部取得正极大值，对于负最小值也是同理。
2. 利用连续性：在有界闭区间上 u 一定能取得最大值和最小值，并且也能能取得之间所有的介值。不难发现：若 $\exists u_0 \neq 0$ 则 $u_{min} \le u_0 \le u_{max}$，无论 u_0 出现在零的哪一端，总会导致正最大值或负最小值在 D 内部被取到，与上一问结论矛盾，可知必须 D 上 $u \equiv 0$。

1.4 多元函数微分学

1.4.1 多元向量值函数的导数与微分

一元向量值函数的导数与微分

对于向量值函数，其值域由高维向量构成，在研究函数性态时，和数量值函数有共同点也有一定区别，在此我们通常选择的策略是研究像的某一分量，从而将已有问题转化为数量值函数问题，这种转化的思想在相关问题的研究中相当实用。

利用这种思想，我们首先来完成一元向量值函数的极限与微分等概念的推广。

定义 1.1 (一元向量值函数的极限)

设 $\mathbf{f}(x) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))^{\mathrm{T}}$，在 x_0 的某一去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$ 内有定义，$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)^{\mathrm{T}} \in R^m$

若 $\exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0$，使得当 $\|x - x_0\| < \delta$ 时，

$$\|\mathbf{f}(x) - \mathbf{a}\| = \sqrt{\sum_{m}^{i=1} (f_i(x) - a_i)^2} < \varepsilon$$

则称当 $x \to x_0$ 时，$\mathbf{f}(x)$ 以 $\mathbf{a}$ 为极限

♣

定义 1.2 (一元向量值函数的导数)

设 $f : U(x_0) \subseteq R \to R^m, x_0 + \Delta x \in U(x_0)$，若 $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，则称 f 在 x_0 处可导。并称此极限值为 f 在 x_0 处的导数

♣

定义 1.3

设 $f : U(x_0) \subseteq R \to R^m$ 是一个一元向量值函数，$x + 0 + \Delta x \in U(x_0)$. 若存在一个与 Δx 无关的 m 维列向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_m)^{\mathrm{T}}$，使

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \mathbf{a}\Delta x + o(\rho)$$

则称 f 在 x_0 处可微，并称 $a\Delta x$ 为 f 在 x_0 处的微分，记作 $\mathrm{d}f(x_0)=a\Delta x$ ♣

例题 1.4 试判断下列说法的正确性

1. 向量值函数 $f=(f_1,f_2,\dots,f_m)^{\mathrm{T}}$ 在 x_0 处可导的充分必要条件使 f 的每一个分量都在 x_0 处可导
2. 若向量值函数 $f=(f_1,f_2,\dots,f_m)^{\mathrm{T}}$ 在 x_0 处可导则该函数在该点可微

解

1. 根据一元向量值函数的导数的定义

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\begin{bmatrix}\dfrac{f_1(x_0+\Delta x)-f_1(x_0)}{\Delta x}\\ \vdots\\ \dfrac{f_m(x_0+\Delta x)-f_m(x_0)}{\Delta x}\end{bmatrix}$$

显然可以得到该点导数存在等价于每一个分量的导数存在，因此原命题是真命题

2. 对于一元向量值函数而言可微与可导就是等价的，这一点是不同于我们上学期学过的一元数量值函数的

多元向量值函数的导数与微分

对于多元函数，由于很多情况下向量之间的除法没有意义，因此我们不能直接拓展导数的概念，但是我们发现对于微分的原始定义是可以直接进行迁移的，因此我们给出多元向量值函数微分的形式。

对于 n 元向量值函数 $f:U(x_0)\subseteq R^n\to R^m$，如果 f 的每一分量 f_i 都在 x_0 处可微，则定义 f 在 x_0 处的微分如下：

$$\mathrm{d}f(x_0)=\begin{bmatrix}\mathrm{d}f_1(x_0)\\ \mathrm{d}f_2(x_0)\\ \vdots\\ \mathrm{d}f_m(x_0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{d}x_1\\ \mathrm{d}x_2\\ \vdots\\ \mathrm{d}x_n\end{bmatrix}$$

记矩阵 $J=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n}\\ \dfrac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \dfrac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n}\end{bmatrix}$ 称为 Jacobi 矩阵，作为 f 在 x_0 处的导数，记作 $Df(x_0)$

例题 1.5 试判断下列说法的正确性：

1. 向量值函数 $f(x):U(x_0)\subseteq R^n\to R^m$ 在 x_0 处可微的充分条件是它的所有分量对各个变量的偏导数都存在。

2. 若 $f: R^n \to R^m$ 在 x_0 处可微，则其在 x_0 处所有方向导数均存在

解

1. 错误的。偏导均存在并不表示一定在 x_0 处可导，因此也并不能保证可微。可微的充分条件应该是它的所有分量对每个变量的偏导数都在 x_0 处连续。
2. 该说法是正确的。且方向导数就等于 Jacobi 矩阵与方向向量 $\mathbf{l}$ 的乘积。

微分运算性质

多元向量值函数微分运算的性质与一元数量值函数的性质是类似的，在此不一一列出。其中向量值函数的链式法则较为重要。

其形式为:

$$\mathrm{D}\boldsymbol{w}(\boldsymbol{x_0}) = \mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u_0})|_{\boldsymbol{u_0}=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_0})}\mathrm{D}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_0}) = \mathrm{D}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_0}))\mathrm{D}\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x_0})$$

例题 1.6 已知 $\mathbf{f}(u,v) = \begin{pmatrix} u^2+v^2 \\ uv \end{pmatrix}$，$\mathbf{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \cos x + \sin y + \tan z \\ e^{x+y+z} \end{pmatrix}$，设 $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x,y,z) = \mathbf{f} \circ \mathbf{g}$，求 $\mathrm{D}\mathbf{w}(0,0,0)$

解

$$\mathrm{D}\mathbf{f}(u,v) = \begin{pmatrix} 2u & 2v \\ v & u \end{pmatrix}, \mathrm{D}\mathbf{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} -\sin x & \cos y & \sec^2 x \\ \mathrm{e}^{x+y+z} & \mathrm{e}^{x+y+z} & \mathrm{e}^{x+y+z} \end{pmatrix}$$

当 $(x,y,z) = (0,0,0)$ 时，$(u,v) = (1,1)$

代入可得

$$\mathrm{D}\mathbf{f}(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \mathrm{D}\mathbf{g}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

由链式法则

$$\mathrm{D}\mathbf{w}(0,0,0) = \mathrm{D}\mathbf{f}(1,1) \cdot \mathrm{D}\mathbf{g}(0,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

由方程组确定的隐函数微分法

对于有方程组唯一确定的两个单值且有连续偏导数的二元函数 $u = u(x,y), v = v(x,y)$

$$\begin{cases} F_1(x,y,u,v) = 0 \\ F_2(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$$

若 $F_1, F_2 \in C^{(1)}(U(x_0,y_0,u_0,v_0))$ 且 $J \neq 0$

则有

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)} = -\dfrac{1}{J}\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(x,v)}\right|_{(x_0,y_0,v_0,u_0)}\\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)} = -\dfrac{1}{J}\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,x)}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial u}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)} = -\dfrac{1}{J}\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(y,v)}\right|_{(x_0,y_0,v_0,u_0)}\\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)} = -\dfrac{1}{J}\left.\dfrac{\partial(F_1,F_2)}{\partial(u,y)}\right|_{(x_0,y_0,u_0,v_0)}\end{cases}$$

使用时，该公式直接记忆比较容易出错，可以使用如下所示的方法

例题 1.7 方程组 $\begin{cases}u+v+w=x\\ uv+vw+wu=y\\ uvw=z\end{cases}$ 确定了隐函数组 $\begin{cases}u=u(x,y,z)\\ v=v(x,y,z)\\ w=w(x,y,z)\end{cases}$ 求偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial u}{\partial y},\dfrac{\partial u}{\partial z}$

解

对方程组同时关于 x 求偏导

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial x}\\ u(\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial x})+v(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial w}{\partial x})+w(\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial x})\\ vw\dfrac{\partial u}{\partial x}+uw\dfrac{\partial v}{\partial x}+uv\dfrac{\partial w}{\partial x}\end{cases}$$

由 Cramer 法则可得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{u^2}{(u-v)(u-w)}$
同理分别对 y,z 求导，由 Cramer 法则可得出

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{u}{(u-v)(u-w)},\frac{\partial u}{\partial z}=\frac{1}{(u-v)(u-w)}$$

1.4.2 多元函数微分学在几何中的应用

在线性代数中，我们已经学过了空间曲线与空间曲面的代数化，如果将几何图形上的每一点看作是由原点出发的向量确定的，那么空间曲线与空间曲面可以分别可以表示成 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ 与 $\mathbf{r}=\mathbf{r}uv)$ 的形式，借助我们已有的多元函数微分学的知识，可以帮我们进一步研究空间曲线与平面的性态

求曲线切线与法平面

对于空间曲线 $\Gamma:\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))$，则若 $\mathbf{r}(t)$ 在点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 处可导，且 $\dot{\mathbf{r}}(t_0)\neq(0,0,0)$，则 P_0 点处的切向量为 $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$

特别的给出以下几种常用的特殊情形：

1. 若曲线 Γ 方程是 $\mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{x}),\mathbf{z}=\mathbf{z}(\mathbf{x})$ 两柱面交线的形式

我们已经知道了参数形式切向量的求法，在这里，恰当的选取 x 为参数，即 $\mathbf{r}(x)=(x,y(x),z(x))$。

那么对应点处的切向量即为:

$$\dot{\mathbf{r}}(x) = (1, \dot{y}(x), \dot{z}(x))$$

2. 若曲线 Γ 方程由一般式方程给出

若

$$\begin{cases} F(x,y,z) = 0, \\ G(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

且

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0} \neq 0$$

我们可通过隐函数求导法同样以 x 为参数来确定切向量。经过化简之后，可得到一个更加简练的结果，即 $(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y, \mathrm{d}z)|_{P_0}$ 的任意非零解均可作为该点的一个切向量。

例题 1.8 求曲线 $\mathbf{r} = (\cos(t), \sin(t), \tan(\frac{t}{2}))$ 在点 $(0,1,1)$ 处的切线方程与法平面方程

解

$$\dot{\mathbf{r}}(t)|_{(0,1,1)} = (-\sin(t), \cos(t), \frac{1}{2}\sec^2(\frac{t}{2}))|_{(0,1,1)} = (-1, 0, 1)$$

则该点处的切线方程为

$$\begin{cases} \dfrac{x}{-1} = \dfrac{z-1}{1} \\ y = 1 \end{cases}$$

法平面方程为 $-x + z - 1 = 0$

例题 1.9 已知曲线 $\begin{cases} y = 2x \\ z = x^2 + y^2 - 4 \end{cases}$ 在点 $(1,2,1)$ 出的切向量 $\mathbf{a}$ 与 z 轴正向夹角为锐角，求函数 $f = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 在点 $(1,2,1)$ 处沿向量 $\mathbf{a}$ 的方向导数

解 切向量的求法可以从两个方向来看:

曲线的直接形式是一个一般式方程，对两边全微分可得

$$\begin{cases} \mathrm{d}y = 2\mathrm{d}x \\ \mathrm{d}z = 2x\mathrm{d}x + 2y\mathrm{d}y \end{cases}$$

在点 $(1,2,1)$ 处的一个非零解为 $(1,2,10)$

若对原方程组进行变形可得

$$\begin{cases} y = 2x \\ z = 5x^2 - 4 \end{cases}$$

$\dot{y} = 2, \dot{z} = 10x$，所得切向量仍为 $(1,2,10)$ $\cos\gamma = \dfrac{10}{\sqrt{105}} > 0$, 夹角符合题意

$$\nabla f = (\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}\right|_{(1,2,1)} = \nabla f|_{(1,2,1)} \cdot (1,2,1) = \frac{\sqrt{70}}{14}$$

求曲线切平面与法线

对于曲面 $S:\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v))$，若 $\mathbf{r}$ 在点 (u_0,v_0) 处可微，且 $\mathbf{r}_u(u_0,v_0)\times\mathbf{r}_v(u_0,v_0)\neq\mathbf{0}$。则此时法线的方向向量可表示为

$$(\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v)|_{(u_0,v_0)}$$

特别的，再次给出两个特情况

1. 直角坐标系下的曲面方程 $\mathbf{F(x,y,z)=0}$

将 x,y 看作参数，此时可给出曲面的参数方程

$$\mathbf{r}(x,y)=(x,y,z(x,y))$$

$$\mathbf{r}_x\times\mathbf{r}_y=(\frac{F_x}{F_z},\frac{F_y}{F_z},1)$$

可以取 (F_x,F_y,F_z) 作为平面的法向量

2. 曲面方程 $\mathbf{z=f(x,y)}$

此时的法向量很容易得到是 $(f_x,f_y,-1)$

例题 1.10 求曲面 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}=1$ 的一个切平面，使该切平面在三个坐标轴上的截距之积最大。

解 法向量 $\mathbf{n}=(\frac{1}{2\sqrt{x}},\frac{1}{2\sqrt{y}},\frac{1}{2\sqrt{z}})$

在点 (x_0,y_0,z_0) 处的切平面方程为

$$\frac{x-x_0}{2\sqrt{x_0}}+\frac{y-y_0}{2\sqrt{y_0}}+\frac{z-z_0}{2\sqrt{z_0}}=0$$

截距之积 $F(x_0,y_0,z_0)=\sqrt{x_0,y_0,z_0}$，使用拉格朗日乘数法求极值可得当 $x_0=y_0=z_0=\frac{1}{9}$ 时，可以取到极值

因此切平面方程为 $3x+3y+3z=1$

例题 1.11 在椭球面 $4x^2+y^2+z^2=4$ 的第一卦限部分上求一点，使得过此点的切平面与坐标平面所围成的体积最小。

解 设所求点为 (x_0,y_0,z_0)，则该点处切平面的法向量为 $(4x_0,y_0,z_0)$，所求切平面的方程为

$$4x_0(x-x_0)+y_0(y-y_0)+z_0(z-z_0)=0.$$

即

$$4x_0x+y_0y+z_0z=4$$

$$\text{三棱锥体积}V=\frac{8}{3x_0y_0z_0}(x_0,y_0,z_0>0)$$

为了求 V 的最小值，我们考虑 $x_0y_0z_0$ 的最大值。这里可以直接使用拉格朗日乘数法。但为了简化计算，我们采用不等式的方式来求解。

$$
\begin{aligned}
x_0y_0z_0 &= \frac{1}{2}\cdot 2x_0\cdot y_0\cdot z_0\\
&\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{4x_0^2+y_0^2+z_0^2}{3}\right)^{3/2}\\
&= \frac{4}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

当且仅当 $x_0=\dfrac{1}{\sqrt{3}}, y_0=z_0=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ 时取等

故所求点为 $(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{\sqrt{3}},\dfrac{2}{\sqrt{3}})$

弧长与曲率的计算

这两处知识点并不是我们本章的重点，大多数知识对于同学们知识了解，因此这里给出一些应知应会的计算公式，内容较为简单，考验的是大家的计算功底

定理 1.1

若曲线 $\Gamma:\mathbf{r}(t)$ 在区间 $[\alpha,\beta]$ 的长度 s 是可计算的，则

$$s=\int_\alpha^\beta \|\dot{\mathbf{r}}(t)\|\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta \sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2+[\dot{z}(t)]^2}\mathrm{d}t$$

特别的对于平面曲线有如下两种不同坐标系下的计算方式

1. **平面直角坐标系：**

$$s=\int_a^b\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}x$$

2. **极坐标系：**

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

定理 1.2

设空间曲线 $\Gamma:\mathbf{r}=\mathbf{r}(s)$，$s$ 为自然参数且 $\mathbf{r}(s)$ 二阶可导，则 Γ点$\mathbf{r}(s)$处的曲率为

$$\kappa(s)=\|\mathbf{r}''(s)\|$$

对于一般形式的参数方程而言

$$\kappa(t)=\frac{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\times\ddot{\mathbf{r}}(t)\|}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^3}$$

特别的，平面曲线 $y=y(x)$ 即 $\mathbf{r}=(x,y(x),0)$，易得

$$\kappa=\frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{3/2}}$$

在这一部分，最核心的知识点就是对于空间曲线切向量与曲面切平面法向量的求解，基本上每年

不少于三道题有相关知识的考察，但只要掌握了相关相关方程对应的求解公式，细心计算即可。对于 Frenet 标架与挠率的相关问题这里没有再进一步阐述，由于不是我们考试的重点，大家之后有兴趣可以自行查看课本。

第 1 章 练习

1. 设函数 $u=f(x,y,z)=xy^2z^3$, 又有方程

$$x^2+y^2+z^2-3xyz=0.$$

(1) 当 $z=z(x,y)$ 是由上述方程所确定的隐函数时, 求 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}$;

(2) 当 $y=y(z,x)$ 是由上述方程所确定的隐函数时, 求 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}$;

解

(1) 在原函数 $u=f(x,y,z)=xy^2z^3$ 中, 对 x 求偏导数, 有:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y^2z^3+3xy^2z^2\cdot\frac{\partial z}{\partial x},$$

根据已知方程 $x^2+y^2+z^2-3xyz=0$, 可求得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{2x-3yz}{2z-3xy},$$

故在 $(1,1,1)$ 处, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=-1$, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=-2.$

(2) 同理, 当 $y=y(z,x)$ 为方程确定的隐函数时, 易算得 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{(1,1,1)}=-1.$

2. 求证

$$u_x^2+u_y^2+u_z^2=2(xu_x+yu_y+zu_z),$$

其中, $u=u(x,y,z)$ 是由方程

$$\frac{x^2}{a^2+u}+\frac{y^2}{b^2+u}+\frac{z^2}{c^2+u}=1$$

确定的隐函数.

解 直接计算. 根据所给方程, 可算

$$u_x=-\frac{F_x}{F_u}=\frac{\frac{2x}{a^2+u}}{\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}}=\frac{2x}{t\cdot(a^2+u)},$$

$$u_y=-\frac{F_y}{F_u}=\frac{\frac{2y}{b^2+u}}{\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}}=\frac{2y}{t\cdot(b^2+u)},$$

$$u_z=-\frac{F_z}{F_u}=\frac{\frac{2z}{c^2+u}}{\frac{x^2}{(a^2+u)^2}+\frac{y^2}{(b^2+u)^2}+\frac{z^2}{(c^2+u)^2}}=\frac{2z}{t\cdot(c^2+u)}$$

将上述三式代入原待证明方程, 有:

$$\text{左式} = u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 = \frac{\frac{4x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{4y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{4z^2}{(c^2+u)^2}}{\left(\frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2}\right)^2} = \frac{4}{t},$$

$$\text{右式} = 2(xu_x + yu_y + zu_z) = \frac{\frac{4x^2}{a^2+u} + \frac{4y^2}{b^2+u} + \frac{4z^2}{c^2+u}}{\frac{x^2}{(a^2+u)^2} + \frac{y^2}{(b^2+u)^2} + \frac{z^2}{(c^2+u)^2}} = \frac{4}{t},$$

故 左式 = 右式, 命题得证.

3. 设

$$\begin{cases} x = u\cos\dfrac{v}{u}, \\ y = \sin\dfrac{v}{u}, \end{cases}$$

求反函数组的偏导数 u_x, u_y, v_x, v_y.

解 对等式两边求全微分.

$$\begin{cases} \mathrm{d}x = \cos\dfrac{v}{u}\mathrm{d}u - u\sin\dfrac{v}{u}\dfrac{u\mathrm{d}v - v\mathrm{d}u}{u^2} = \left(\cos\dfrac{v}{u} + \dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u}\right)\mathrm{d}u - \sin\dfrac{v}{u}\mathrm{d}v, \\ \mathrm{d}y = \dfrac{1}{u}\cos\dfrac{v}{u}\mathrm{d}v - \dfrac{v}{u^2}\cos\dfrac{v}{u}\mathrm{d}u, \end{cases}$$

求解方程, 得到 $\mathrm{d}u$ 和 $\mathrm{d}v$:

$$\begin{cases} \mathrm{d}u = \dfrac{\frac{1}{u}\cos\dfrac{v}{u}\mathrm{d}x + \sin\dfrac{v}{u}\mathrm{d}y}{\dfrac{1}{u}\cos^2\dfrac{v}{u}}, \\ \mathrm{d}v = \dfrac{\dfrac{v}{u^2}\cos\dfrac{v}{u}\mathrm{d}x + (\cos\dfrac{v}{u} + \dfrac{v}{u}\sin\dfrac{v}{u})\mathrm{d}y}{\dfrac{1}{u}\cos^2\dfrac{v}{u}}, \end{cases}$$

进一步有:

$$\begin{cases} \mathrm{d}u = \sec\dfrac{v}{u}\mathrm{d}x + u\tan\dfrac{v}{u}\sec\dfrac{v}{u}\mathrm{d}y, \\ \mathrm{d}v = \dfrac{v}{u}\sec\dfrac{v}{u}\mathrm{d}x + (u\sec\dfrac{v}{u} + v\tan\dfrac{v}{u}\sec\dfrac{v}{u})\mathrm{d}y, \end{cases}$$

故

$$u_x = \sec\frac{v}{u}, \quad u_y = u\tan\frac{v}{u}\sec\frac{v}{u}, \quad v_x = \frac{v}{u}\sec\frac{v}{u}, \quad v_y = u\sec\frac{v}{u} + v\tan\frac{v}{u}\sec\frac{v}{u}.$$

4. 设方程组

$$\begin{cases} x = \cos\varphi\cos\theta, \\ y = \cos\varphi\sin\theta, \\ z = \sin\varphi, \end{cases}$$

确定隐函数 $z = z(x,y)$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

解 发现在原方程组满足 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, 因此, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{F_x}{F_z} = -\dfrac{x}{z} = -\dfrac{\cos\varphi\cos\theta}{\sin\varphi}$

5. 设函数 $u=u(x,y)$ 和函数 $v=v(x,y)$ 有连续的一阶偏导数, 又设函数 $x=x(\xi,\eta)$ 和函数 $y=y(\xi,\eta)$ 也有连续一阶偏导数, 并使复合函数 $u=u(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$ 和 $v=v(x(\xi,\eta),y(\xi,\eta))$ 有定义, 证明:

$$\frac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)}=\frac{\mathrm{D}(u,v)}{\mathrm{D}(x,y)}\cdot\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)}.$$

解 直接计算:

$$左式=\begin{vmatrix}u_x x_\xi+u_y y_\xi & v_x x_\xi+v_y y_\xi\\ u_x x_\eta+u_y y_\eta & v_x x_\eta+v_y y_\eta\end{vmatrix}=u_x v_y(x_\xi y_\eta-x_\eta y_\xi)+v_x u_y(x_\eta y_\xi-x_\xi y_\eta)$$

$$右式=\begin{vmatrix}u_x & v_x\\ u_y & v_y\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}x_\xi & y_\xi\\ x_\eta & y_\eta\end{vmatrix}=(u_x v_y-v_x u_y)(x_\xi y_\eta-x_\eta y_\xi)$$

因此, 左式 $=$ 右式 $=(u_x v_y-v_x u_y)(x_\xi y_\eta-x_\eta y_\xi)$

6. 求椭球面 $x^2+y^2+\frac{z^2}{4}=1$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线上的点到原点的最长和最短距离.

解 本题的本质是极值问题. 对于题目中给定椭球面上一点 (x,y,z) 到原点的距离可以表示为 $\sqrt{u}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 而 u 的大小只与根号内 $x^2+y^2+z^2$ 的大小有关, 故下求函数 $u=x^2+y^2+z^2$ 在有约束条件 $x^2+y^2+\frac{1}{4}z^2=1$ 和 $x+y+z=0$ 的情况下的极值:

先构造拉格朗日函数, $L(x,y,z,\lambda,\mu)=u+\lambda(x+y+z)+\mu(x^2+y^2+\frac{1}{4}z^2-1)$, 后根据拉格朗日函数的五个偏导数, 有:

$$\begin{cases}2x+\lambda+2\mu x=0\\ 2y+\lambda+2\mu y=0\\ 2z+\lambda+\frac{1}{2}\mu z=0\\ x+y+z=0\\ x^2+y^2+\frac{1}{4}z^2-1=0\end{cases}$$

由上方程, 解得 $L_1=(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,-1)$, $L_2=(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},-2)$. 经验证, 在 L_1 时 u 取得最小值, 此时最小距离为 1; 在 L_2 时取得最大值, 此时最大距离为 $\sqrt{2}$.

7. 求函数 $f(x,y)=\frac{1}{2}(x^n+y^n)$ 在约束条件 $x+y=A$ 下的最小值, 并由此证明:

$$\frac{1}{2}(x^n+y^n)\geq\left(\frac{x+y}{2}\right)^n.$$

解

(1) 构造拉格朗日函数, $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda(x+y-A)$, 后求出三个偏导数构成的函数:

$$\begin{cases}\frac{n}{2}x^{n-1}+\lambda=0\\ \frac{n}{2}y^{n-1}+\lambda=0\\ x+y-A=0\end{cases}$$

解得 $x=y=\dfrac{A}{2},\lambda=-\dfrac{nA^{n-1}}{2^n}$ 时，原函数取得极值. 经验证，$f(x,y)$ 在该点处取得极小值.

(2) 原函数的极小值 $f_{min}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{A^n}{2^n}+\dfrac{A^n}{2^n}\right)=\left(\dfrac{A}{2}\right)^n=\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$，故证得 $\dfrac{1}{2}(x^n+y^n)\geq\left(\dfrac{x+y}{2}\right)^n$.

第 2 章 多元函数积分学

2.1 二重积分的性质

2.1.1 二重积分的定义

定义 2.1 (二重积分)

设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有定义，将 D 任意分割为 n 个小区域 $\Delta\sigma_i$，在每个小区域上任取一点 (ξ_i,η_i)，作和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$$

当各小区域的最大直径 $\lambda \to 0$ 时，若该和式的极限存在，则称此极限为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的二重积分，记作

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$

♣

定理 2.1 (可积条件)

若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，则 $f(x,y)$ 在 D 上可积。♡

2.1.2 基本性质

性质 二重积分具有以下基本性质：

1. 线性性质：
$$\iint_D [\alpha f(x,y)+\beta g(x,y)]\mathrm{d}\sigma = \alpha\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \beta\iint_D g(x,y)\mathrm{d}\sigma$$
2. 区域可加性：若 $D = D_1\cup D_2$ 且 $D_1\cap D_2 = \varnothing$，则
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma$$
3. 积分中值定理：设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则存在 $(\xi,\eta)\in D$ 使得
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)\cdot A(D)$$
其中 $A(D)$ 表示区域 D 的面积。

2.2 二重积分的计算

2.2.1 直角坐标系下的计算

X 型区域

定义 2.2 (X 型区域)

若区域 D 可表示为

$$D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)\}$$

则称 D 为 X 型区域。♣

定理 2.2 (X 型区域积分)

对于 X 型区域 D，二重积分可化为累次积分：

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) \mathrm{d}y$$

♡

Y 型区域

定义 2.3 (Y 型区域)

若区域 D 可表示为

$$D = \{(x, y) | c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y)\}$$

则称 D 为 Y 型区域。♣

定理 2.3 (Y 型区域积分)

对于 Y 型区域 D，二重积分可化为累次积分：

$$\iint_D f(x, y) \mathrm{d}\sigma = \int_c^d \mathrm{d}y \int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y) \mathrm{d}x$$

♡

2.2.2 极坐标系下的计算

定理 2.4 (极坐标变换)

当积分区域 D 为圆形、扇形或环形时，采用极坐标变换：

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

面积微元 $\mathrm{d}\sigma = r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$，积分公式为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{D'} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

其中 D' 为极坐标下的对应区域。

例题 2.1 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma$，其中 D 为单位圆 $x^2+y^2\leq 1$。

解：采用极坐标变换

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\mathrm{d}\sigma = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 e^{-r^2} r\mathrm{d}r = \pi(1-e^{-1})$$

2.2.3 积分换序

问题 2.1 交换下列积分的积分次序：

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^{2x} f(x,y)\mathrm{d}y$$

解

交换积分次序后：

$$I = \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y/2}^{y} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_{y/2}^{1} f(x,y)\mathrm{d}x$$

问题 2.2 计算：$\int_0^1 t\mathrm{d}t\int_t^1 \exp(\frac{t}{x})^2$

解 交换积分次序，得

$$= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x te^{(\frac{x}{t})^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2e^{(\frac{x}{t})^2}\right)\Big|_0^x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^1 x^3(e-1)\mathrm{d}x = \frac{1}{6}(e-1)$$

问题 2.3 计算积分:$I = \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{x}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\mathrm{d}y$

解 交换积分顺序，然后在做题过程中你会发现有一个函数无法计算，这个时候需要动用一重积分的技巧

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}x = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}(1-y^2)\mathrm{d}y = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}y - \int_0^1 y^2e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}y + \int_0^1 ye^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}\left(-\frac{y^2}{2}\right) = \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}y + \int_0^1 y\mathrm{d}\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right) \\
&= \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}y + \left(ye^{-\frac{x^2}{2}}\right)\Big|_0^1 - \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}}\mathrm{d}y = e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

2.3 二重积分的区域对称性

2.3.1 对称区域分类

定义 2.4 (对称区域)

设平面区域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$：

- 关于 x 轴对称：$(x,y)\in D \Rightarrow (x,-y)\in D$
- 关于 y 轴对称：$(x,y)\in D \Rightarrow (-x,y)\in D$
- 关于原点对称：$(x,y)\in D \Rightarrow (-x,-y)\in D$
- 关于直线 $y=x$ 对称：$(x,y)\in D \Rightarrow (y,x)\in D$

♣

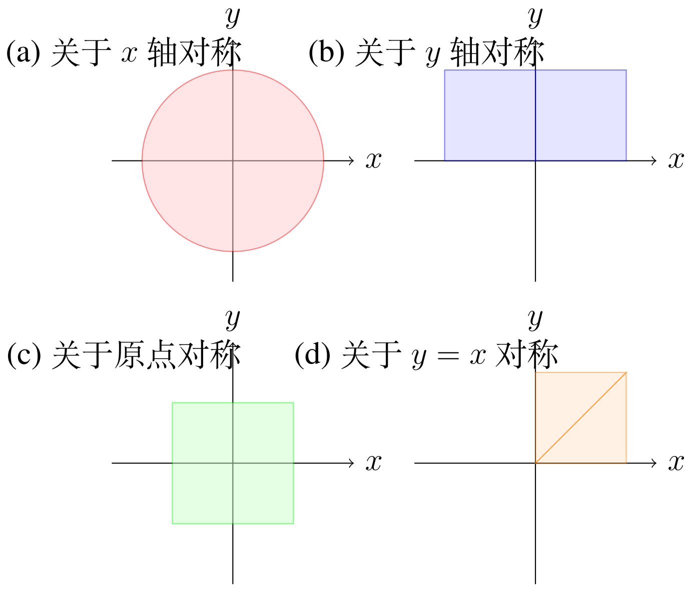


图 2.1: 不同类型的对称区域

当然对称的种类远不止所提的这几种，其余更多的变化还需要就题来灵活运用。

2.3.2 奇偶函数积分性质

定理 2.5 (对称区域积分简化)

设 $f(x,y)$ 在对称区域 D 上可积：

1. 若 D 关于 y 轴对称，则：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 2\displaystyle\iint_{D\cap\{x\geq 0\}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{若 } f(-x,y)=f(x,y) \\ 0, & \text{若 } f(-x,y)=-f(x,y) \end{cases}$$

2. 若 D 关于 x 轴对称，则：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 2\iint_{D\cap\{y\geq 0\}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{若 } f(x,-y)=f(x,y) \\ 0, & \text{若 } f(x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

3. 若 D 关于原点对称，则：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \begin{cases} 2\iint_{D\cap\{x\geq 0\}} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & \text{若 } f(-x,-y)=f(x,y) \\ 0, & \text{若 } f(-x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

证明 以关于 y 轴对称的情况为例：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D^+} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D^-} f(-x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当 f 为偶函数时，两项相等；当 f 为奇函数时，两项相抵消。

2.3.3 典型应用案例

例题 2.2 圆域积分 circle-integral 计算 $\iint_{x^2+y^2\leq 1}(x^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

分析：

- 积分区域关于 x 轴和 y 轴对称
- x^3 关于 x 为奇函数，关于 y 为偶函数
- y^2 关于 x 和 y 均为偶函数

计算：

$$\iint (x^3+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \underbrace{\iint x^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y}_{\text{奇函数，结果为 } 0} + \iint y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\sin^2\theta\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}$$

例题 2.3 矩形区域积分 rectangle-integral 计算 $\iint_{[-1,1]\times[-2,2]} x^2y^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

分析：

- 区域关于 x 轴和 y 轴对称
- x^2 关于 x 和 y 均为偶函数
- y^3 关于 y 为奇函数

结果：被积函数整体关于 y 为奇函数，故积分值为 0。

2.4 二重积分的变量变换

2.4.1 变量变换理论

定理 2.6 (二重积分变量替换)
设 $T:(u,v)\to(x,y)$ 是 C^1 类双射，其雅可比行列式：

$$J(u,v)=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{pmatrix}\neq 0$$

则有：

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{T^{-1}(D)} f(x(u,v),y(u,v))|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

♡

证明 通过微分形式的变换：

$$\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=(x_u\mathrm{d}u+x_v\mathrm{d}v)\wedge(y_u\mathrm{d}u+y_v\mathrm{d}v)=J(u,v)\mathrm{d}u\wedge\mathrm{d}v$$

取绝对值即得面积元变换关系。

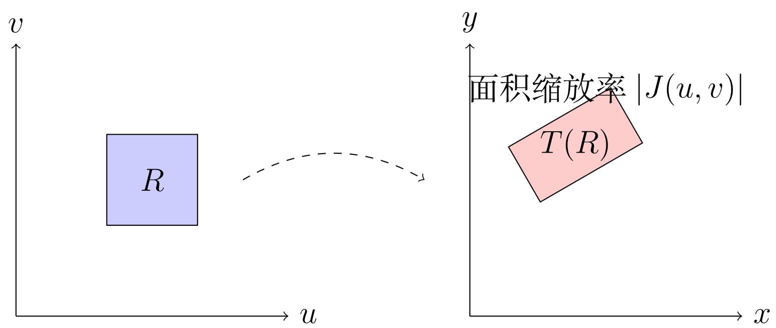


图 2.2: 变量变换的几何意义

2.4.2 常见变量变换

例题 2.4 极坐标变换 polar-coord 极坐标变换 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$ 的雅可比行列式：

$$J(r,\theta)=\det\begin{pmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{pmatrix}=r$$

因此：

$$\mathrm{d}x\mathrm{d}y=r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

典型应用：

$$\iint_{x^2+y^2\leq a^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

例题 2.5 广义坐标变换 general-coord 对于一般变换 $x = au + bv, y = cu + dv$：

$$J(u,v) = \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

当 $ad - bc \neq 0$ 时变换可逆。

2.4.3 雅可比行列式的计算技巧

命题 2.1 (雅可比行列式性质)

1. 链式法则：若 $(u,v) \to (s,t) \to (x,y)$，则

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial s}{\partial u} & \frac{\partial s}{\partial v} \\ \frac{\partial t}{\partial u} & \frac{\partial t}{\partial v} \end{pmatrix}$$

2. 逆变换：

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1}$$

3. 变量替换：

$$(x,y)(u,v) \cdot (u,v)(s,t) = (x,y)(s,t)$$

♠

表 2.1: 常见变换的雅可比行列式

变换类型	变换公式	雅可比行列式
极坐标	$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$	r
球坐标	$x = r\sin\phi\cos\theta, y = r\sin\phi\sin\theta ,z = r\cos\phi$	$r^2\sin\phi$
柱坐标	$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$	r
双极坐标	$x = \dfrac{a\sinh v}{\cosh v - \cos u}, y = \dfrac{a\sin u}{\cosh v - \cos u}$	$\dfrac{a^2}{(\cosh v - \cos u)^2}$
椭圆坐标	$x = au\cos v, y = bu\sin v$	abu

注：球坐标换元和柱坐标换元将在三重积分用到，这里提前给出。

2.4.4 应用实例

问题 2.4 高斯积分 gauss-integral 计算积分：

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

解法：采用极坐标变换

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\infty} e^{-r^2} r\mathrm{d}r \\
&= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} = \pi
\end{aligned}
$$

2.5 三重积分

三重积分相比于二重积分，只是多了一个维度。这带来了球坐标和柱坐标换元的方法（已在二重积分中一并给出）。实际考试中三重积分的考察更侧重于积分的技巧，如球坐标/柱坐标换元、轮换对称性、积分区域对称性等。本章系统性总结这些三重积分的积分技巧，并附上若干练习题。

例题 2.6 用柱坐标和球坐标, 将三重积分

$$
I = \iiint\limits_{\Omega} f(\sqrt{x^2+y^2+z^2}) \mathrm{d}V
$$

表示为累次积分, 其中 Ω 为球体 $x^2+y^2+z^2 \le z$ 在锥面 $z = \sqrt{3x^2+3y^2}$ 上方的部分.

解 本题直接给出答案：

$$
\text{柱坐标变换:} I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{4}} r\mathrm{d}r \int_{\sqrt{3}r}^{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1-4r^2})} f(\sqrt{x^2+z^2}) \mathrm{d}z;
$$

$$
\text{球坐标变换:} I = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\cos\varphi} \rho^2 \sin\varphi \cdot f(\rho) \mathrm{d}\rho.
$$

例题 2.7 计算三重积分：

$$
I = \iiint\limits_{\Omega} \alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 \mathrm{d}V
$$

其中 Ω 为椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \le 1.$

解 利用坐标变换将椭球体转换为单位球。令

$$
x = au, \quad y = bv, \quad z = cw,
$$

则积分区域变为单位球 $u^2+v^2+w^2 \le 1$，体积元变换为 $\mathrm{d}V = abc\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$。被积函数变为：

$$
\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma z^2 = \alpha a^2 u^2 + \beta b^2 v^2 + \gamma c^2 w^2.
$$

根据对称性，单位球内积分满足：

$$
\iiint_{u^2+v^2+w^2 \le 1} u^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \iiint_{u^2+v^2+w^2 \le 1} v^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \iiint_{u^2+v^2+w^2 \le 1} w^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w = \frac{4\pi}{15}.
$$

因此，原积分可拆分为：

$$I = \alpha a^2 \cdot abc \cdot \frac{4\pi}{15} + \beta b^2 \cdot abc \cdot \frac{4\pi}{15} + \gamma c^2 \cdot abc \cdot \frac{4\pi}{15}.$$

提取公因子得：

$$I = \frac{4\pi abc}{15}\left(\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2\right).$$

答案：

$$I = \frac{4}{15}\pi abc\left(\alpha a^2 + \beta b^2 + \gamma c^2\right).$$

笔记 本题意在巩固三维坐标变换的方法. 注意体积元变换时要乘以 $\dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$，将坐标变换到轮换对称的区域之后，利用轮换对称性可以快速解题.（这种技巧考过哦）

例题 2.8 计算三重积分：

$$I = \iiint\limits_{\Omega} (\sqrt{\alpha}x + \sqrt{\beta}y + \sqrt{\gamma}z)^2 \mathrm{d}V$$

其中 Ω 为椭球体 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} \leq 1$.

解 将括号拆开，因为积分区域关于原点对称，可以发现交叉项的积分应当为 0. 因此，本题答案与上题一致。

例题 2.9 计算三重积分：

$$I = \iiint\limits_{\Omega} z \mathrm{d}V$$

其中 Ω 由 $z = 0, z = 1, z = x^2 + y^2, x^2 + y^2 = 1$ 围成.

例题 2.10 (2022) 计算三重积分：

$$I = \iiint\limits_{\Omega} (x + y + z)^2 \mathrm{d}V$$

其中 Ω 由 $z = \sqrt{x^2 + y^2}, z = 1 - \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ 围成.

例题 2.11 计算 $z = 2y$ 与 $z = x^2 + y^2$ 所围的体积.

解 首先联立方程 $z = 2y$ 和 $z = x^2 + y^2$，消去 z 得：

$$2y = x^2 + y^2 \implies x^2 + (y-1)^2 = 1$$

这表明两曲面的交线在 xy-平面上的投影是以 $(0,1)$ 为圆心、半径为 1 的圆。在此圆内部，平面 $z = 2y$ 位于抛物面 $z = x^2 + y^2$ 上方，因此体积可表示为：

$$V = \iint\limits_{D} \left[2y - (x^2 + y^2)\right] dxdy$$

其中积分区域 D 为 $x^2 + (y-1)^2 \leq 1$。令 $v = y - 1$，则积分区域变为单位圆 $x^2 + v^2 \leq 1$，且被积函数

化简为：

$$2(y)-(x^2+y^2)=2(v+1)-\left(x^2+(v+1)^2\right)=1-x^2-v^2$$

体积积分简化为：

$$V=\iint\limits_{x^2+v^2\leq 1}\left(1-x^2-v^2\right)\,dx dv$$

转换为极坐标 $x=r\cos\theta, v=r\sin\theta$，雅可比行列式为 r，积分范围为 $r\in[0,1],\theta\in[0,2\pi]$，被积函数为：

$$1-r^2$$

积分计算如下：

$$V=\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-r^2)\cdot r\,dr d\theta=2\pi\int_0^1(r-r^3)\,dr$$

计算径向积分：

$$\int_0^1(r-r^3)\,dr=\left[\frac{1}{2}r^2-\frac{1}{4}r^4\right]_0^1=\frac{1}{4}$$

最终体积为：

$$V=2\pi\cdot\frac{1}{4}=\frac{\pi}{2}$$

答案：所围体积为 $\boxed{\frac{\pi}{2}}$。

例题 2.12 三重积分在电动力学的应用：计算电四级矩

设电荷密度分布为

$$\rho(r,\theta)=\rho_0\left(\frac{r}{R}\right)^2\cos^2\theta\quad(0\leq r\leq R,\,0\leq\theta\leq\pi),$$

其中 ρ_0 是常数，R 为球的半径。计算该电荷分布的电四极矩 Q，其定义为：

$$Q=\int_\Omega\rho(\mathbf{r})\left(3z^2-r^2\right)\,dV.$$

提示：使用球坐标系，并利用对称性简化积分。

解

1. 转换为球坐标系：在球坐标系中，$z=r\cos\theta$，因此被积函数变为：

$$3z^2-r^2=3r^2\cos^2\theta-r^2=r^2\left(3\cos^2\theta-1\right).$$

电荷密度表达式为：

$$\rho(r,\theta)=\rho_0\left(\frac{r}{R}\right)^2\cos^2\theta.$$

代入电四极矩的定义式，得到：

$$Q=\int_0^R\int_0^\pi\int_0^{2\pi}\rho_0\left(\frac{r}{R}\right)^2\cos^2\theta\cdot r^2\left(3\cos^2\theta-1\right)\cdot r^2\sin\theta\,d\phi\,d\theta\,dr.$$

2. 分离变量积分：由于被积函数与 ϕ 无关，积分可分解为三个独立部分：

$$Q=\rho_0\cdot\frac{1}{R^2}\left(\int_0^R r^6\,dr\right)\left(\int_0^\pi \cos^2\theta\left(3\cos^2\theta-1\right)\sin\theta\,d\theta\right)\left(\int_0^{2\pi}d\phi\right).$$

3. 计算径向积分：

$$\int_0^R r^6\,dr=\frac{R^7}{7}.$$

4. 计算角度积分：令 $u=\cos\theta$，则 $du=-\sin\theta d\theta$，积分变为：

$$\int_{-1}^1 u^2(3u^2-1)\,du=\int_{-1}^1\left(3u^4-u^2\right)du=2\int_0^1\left(3u^4-u^2\right)du.$$

计算得：

$$2\left[\frac{3u^5}{5}-\frac{u^3}{3}\right]_0^1=2\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{15}.$$

5. 计算方位角积分：

$$\int_0^{2\pi}d\phi=2\pi.$$

6. 综合结果：将各部分代入，得到：

$$Q=\rho_0\cdot\frac{1}{R^2}\cdot\frac{R^7}{7}\cdot\frac{8}{15}\cdot 2\pi=\frac{16\pi\rho_0R^5}{105}.$$

最终答案

$$Q=\boxed{\frac{16\pi\rho_0R^5}{105}}$$

笔记 本题意在巩固球坐标换元. 注意 θ,φ 对应的积分范围.

第 2 章 练习

1. 已知函数 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上单调递减的正连续函数, 求证:

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x}\leq\frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.$$

解 与上题类似，本题也用到了分离变量. 不妨将不等号左边的式子中积分变量换为 y, 同时分母交换至分子, 得到需证结论为

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 yf^2(y)\mathrm{d}y\leq\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 yf(y)\mathrm{d}y,$$

我们令函数

$$
\begin{aligned}
F(x,y) &= \int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x\int_0^1 yf(y)\mathrm{d}y - \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x\int_0^1 yf^2(y)\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_D f(x)f(y)y\left(f(x)-f(y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_D f(x)f(y)yg(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

其中 $D=\{x\in(0,1),y\in(0,1)\}$. 此时我们只要证明 $F(x,y)\geq 0$, 也就是原二重积分值大于等于 0 即可.

在区域 D 中, 我们发现 $g(x,y)$ 关于直线 $y=x$ 呈奇函数, 且点 (x,y) 落在直线上时 $F(x,y)=0$; 对于任意两个关于给定直线对称的点 (x_1,y_1) 和 (x_2,y_2), 不妨设前者在直线上方, 后者在直线下方, 易知两点处 $g(x_1,y_1)=-g(x_2.y_2)$, 然而由于 $y_1>y_2$, 故恒有 $y_1g(x_1,y_1)+y_2g(x_2,y_2)>0$, 因此 $F(x,y)\geq 0$, 进而原不等式得证.

2. 设 $a>0$, 令

$$
I(a)=\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x,\quad J(a)=\iint\limits_{D_a}\mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
$$

其中 $D_a=\{(x,y)|x^2+y^2\leq a^2,x\geq 0,y\geq 0\}$. 证明:

$$
J(a)\leq[I(a)]^2\leq J(\sqrt{2}a).
$$

解 先计算 $[I(a)]^2$:

$$
[I(a)]^2=\int_0^a \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_0^a \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,
$$

$D=\{(x,y)|0\leq x\leq a,o\leq y\leq a\}$. 发现 D 是第一象限中边长为 a 的正方形区域, 而 D_a 是第一象限中以 a 为半径的四分之一圆的区域, 易知 D 的面积大于 D_a 的面积, 且 D 中包含 D_a. 由于被积分的函数 $f=\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ 恒大于 0, 故左侧的不等号成立;

同理, $J(\sqrt{2}a)$ 的积分区域为第一象限以 $\sqrt{2}a$ 为半径的四分之一圆的区域, 且该区域包含 D, 故右侧不等号也成立.

3. 求抛物线 $y=ax^2,y=bx^2$ 和直线 $y=\alpha x,y=\beta x$ 所围成的区域的面积 $(0<a<b,0<\alpha<\beta)$.

解 考虑变换 $\xi=\dfrac{y}{x^2},\eta=\dfrac{y}{x}$, 其雅可比行列式

$$
J=\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)}=\begin{vmatrix} -\dfrac{\eta}{\xi^2} & \dfrac{1}{\xi} \\ -\dfrac{\eta^2}{\xi^2} & \dfrac{2\eta}{\xi} \end{vmatrix}=-\frac{\eta^2}{\xi^3}.
$$

故给定区域的面积

$$
S=\int\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int\limits_{D'}|J|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,
$$

其中, $D'=(\xi,\eta)|a\le\xi\le b,\alpha\le\eta\le\beta$. 进一步可解得:

$$S=\int_a^b\mathrm{d}\xi\int_\alpha^\beta\frac{\eta^2}{\xi^3}\mathrm{d}\eta=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)(\beta^3-\alpha^3).$$

4. 设区域 $D=(x,y)|0\le x+y\le 1,0\le x-y\le 1$, 求二重积分

$$I=\iint\limits_D(x+y)^2\mathrm{e}^{x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解 考虑变量代换 $\xi=x+y,\eta=x-y$, 此时区域 D 变成 $D'=\{(\xi,\eta)|0\le\xi\le\ 1,0\le\eta\le 1\}$. 该变换的雅可比行列式

$$J=\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(\xi,\eta)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}.$$

故

$$I=\iint\limits_D(x+y)^2\mathrm{e}^{x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D'}\xi^2\mathrm{e}^{\xi\eta}|J|\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\frac{1}{2}\int_0^1\mathrm{d}\xi\int_0^1\xi^2\mathrm{e}^{\xi\eta}\mathrm{d}\eta=\frac{1}{4}.$$

5. 求圆柱面 $x^2+z^2=R^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 所割部分的面积.

解 由对称性可知, 所求曲面面积是位于第一卦限部分曲面 S_1 面积的 8 倍 (图 1). 这里 S_1 的方程为 $z=\sqrt{R^2-x^2},\quad(0\le x\le R)$, 在 xOy 面上的投影区域为

$$D:x^2+y^2\le R^2,\quad x\ge 0,\quad y\ge 0.$$

由于

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2}},\quad\frac{\partial z}{\partial y}=0,$$

从而有

$$\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}.$$

于是所求曲面面积为:

$$\begin{aligned}S&=8\iint\limits_D\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\mathrm{d}\sigma=8\iint\limits_D\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\\&=8\int_0^R\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{R^2-x^2}}\frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\mathrm{d}y\\&=8\int_0^R R\mathrm{d}x=8R^2.\end{aligned}$$

6. 设 D 是 xOy 平面上以 $(1,1),(-1,1),(-1,-1)$ 为顶点的三角形区域。求

$$\iint_D(xy+\cos x\sin y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

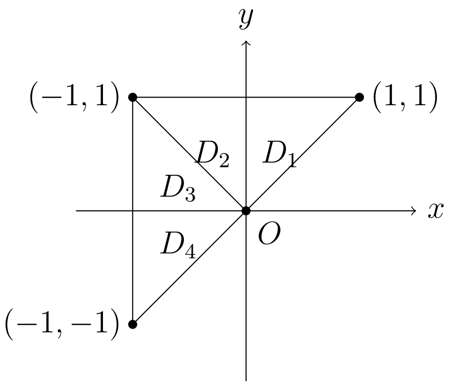
解

将 D 分割为 4 个小区域，如图所示，于是原积分 $=\iint_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D \cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ $=\iint_{D_1+D_2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_3+D_4} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_1+D_2}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_3+D_4}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

因 D_1+D_2 关于 y 轴对称，被积函数 xy 关于 x 是奇函数，由对称奇偶性 $\iint_{D_1+D_2} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。

又因 $\cos x\sin y$ 关于 x 是偶函数，则由对称奇偶性 $\iint_{D_1+D_2}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\iint_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

再由对称奇偶性 $\iint_{D_3+D_4} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，$\iint_{D_3+D_4}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$。从而原积分 $=2\iint_{D_1}\cos x\sin y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\int_0^1\cos x\mathrm{d}x\int_x^1\sin y\mathrm{d}y=1-\dfrac{1}{2}\sin 2$。



7. 计算 $I=\iint_D\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$，其中 $D:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\le 1$

解

取变换 $u=\dfrac{x}{a},v=\dfrac{y}{b}$，它将 D 变为 $D':u^2+v^2\le 1$。变换的雅可比行列式为 $J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=ab$，则

$$I=\iint_{D'}\frac{ab}{\sqrt{1-u^2-v^2}}\mathrm{d}u\mathrm{d}v=ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r=2\pi ab$$

8. 求由抛物线 $y^2=x,y^2=2x$ 及双曲线 $xy=1,xy=4$ 所围区域 D 的面积 $|D|$

解 取变换 $u=\dfrac{y^2}{x},v=xy$，它将 D 的边界都变为 uOv 平面上的直线：$y^2=x\to u=1$，$y^2=2x\to u=2$；$xy=1\to v=1$，$xy=4\to v=4$。它将 D 变为 uOv 平面上的区域 $D':[1,2]\times[1,4]$，变换的雅可比行列式为

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{\begin{vmatrix}-\dfrac{y^2}{x^2} & \dfrac{2y}{x}\\ y & x\end{vmatrix}}=\frac{1}{-\frac{3y^2}{x}}=-\frac{1}{3u}$$

于是

$$|D|=\iint_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}|J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v=\frac{1}{3}\int_1^4\mathrm{d}v\int_1^2\frac{\mathrm{d}u}{u}=\ln 2$$

9. 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=e^{x^2+y^2}+xy\iint_{D_1}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$D_1:0\le x\le 1,0\le y\le 1$。计算积分 $\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D_2:x>0,y>0,x^2+y^2\le 1$。

解 注意 $\iint_{D_1}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 为常数，需先确定此常数再作积分。

令 $\iint_{D_1}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=A$。则 $f(x,y)=e^{x^2+y^2}+Axy$，$xyf(x,y)=xye^{x^2+y^2}+Ax^2y^2$。

两边在区域 D_1 上积分得：

$$\begin{aligned}A=\iint_{D_1}xyf(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\iint_{D_1}xye^{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+A\iint_{D_1}x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\left(\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x\right)^2+A\left(\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\right)^2\\&=\left(\frac{1}{2}(e-1)\right)^2+\frac{1}{9}A\\&=\frac{1}{4}(e-1)^2+\frac{1}{9}A\end{aligned}$$

解得 $A=\frac{9}{32}(e-1)^2$，所以 $f(x,y)=e^{x^2+y^2}+\frac{9}{32}(e-1)^2xy$。

利用极坐标，在 D_2 上作积分，有：

$$\begin{aligned}\iint_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y&=\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 e^{\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho+\frac{9}{32}(e-1)^2\int_0^{\pi/2}\cos\varphi\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\rho^3\mathrm{d}\rho\\&=\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{2}(e-1)+\frac{9}{32}(e-1)^2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{4}\\&=\frac{\pi}{4}(e-1)+\frac{9}{256}(e-1)^2\end{aligned}$$