



工科数学分析基础（下）

速通版复习资料 (可能有用)

作者：2025 级 AI 学组

时间：2026/03-2026/06

版本：期中 ver.



本资料中大部分内容来源于授课幻灯片和课本

目录

第一章 多元函数微分学及其应用	1	1.5.3 n 元向量值函数	22
1.1 $\mathbb{R}^n$ 中点集的基本知识 (★)	1	1.5.4 隐函数微分法 (方程组)	24
1.1.1 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$	1	1.6 多元函数微分学的几何应用 (★★★)	28
1.1.2 $\mathbb{R}^n$ 点列的极限	1	1.6.1 空间曲线的切线和法平面	28
1.1.3 开集和闭集	2	1.6.2 弧长	30
1.1.4 紧集、连通集和区域	4	1.6.3 空间曲面的切平面和法线	32
1.2 多元函数的极限和连续性 (★★)	5	1.7 空间曲线的性态研究 (*)	36
1.2.1 多元数量值函数	5	1.7.1 Frenet 标架	36
1.2.2 多元向量值函数	6	1.7.2 曲率	37
1.2.3 多元函数的极限与连续性	6	1.7.3 挠率	39
1.3 多元数量值函数的导数和微分 (★★★)	8	第一章 练习	39
1.3.1 偏导数	8	第二章 多元函数积分学及其性质	46
1.3.2 全微分	9	2.1 多元数量值函数积分的基本概念 (★)	46
1.3.3 方向导数	10	2.2 二重积分的计算 (★★★)	48
1.3.4 梯度	11	2.2.1 二重积分的几何意义	48
1.3.5 高阶偏导数和高阶全微分	13	2.2.2 直角坐标系下的计算	48
1.3.6 多元复合函数的偏导数和全微分	14	2.2.3 极坐标系下的计算	52
1.3.7 隐函数微分法 (单个方程)	16	2.2.4 一般曲线坐标下的计算	53
1.4 多元函数的 Taylor 展开和极值问题 (★★★)	18	2.3 三重积分的计算 (★★★)	57
1.4.1 多元函数的 Taylor 公式	18	2.3.1 直角坐标下的累次积分法	57
1.4.2 无约束极值与最值	19	2.3.2 一般曲线坐标下的三重积分	59
1.4.3 有约束极值与 Lagrange 乘数法	20	2.3.2.1 一般曲线坐标	59
1.5 多元向量值函数的导数和微分 (★★)	21	2.3.2.2 柱面坐标	60
1.5.1 一元向量值函数	21	2.3.2.3 球面坐标	61
1.5.2 二元向量值函数	22		

第一章 多元函数微分学及其应用

内容提要

- $\mathbb{R}^n$ 点集
- 多元函数的极限和连续性
- 数量值函数的导数和微分
- 多元函数的极值
- 向量值函数的导数和微分
- 空间曲线的切线和法平面
- 弧长
- 空间曲面的切平面和法线
- 空间曲线的性态研究

1.1 $\mathbb{R}^n$ 中点集的基本知识 (★)

1.1.1 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$

在《线性代数与解析几何》课程中, 我们已初步了解 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 的相关概念。称 n 元有序数组

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n)$$

为一个 n 维实向量, 而所有 n 维实向量的集合为 $\mathbb{R}^n$ 。规定 $\mathbb{R}^n$ 中的常规加法、数乘和内积运算便得到一个 n 维 Euclid 空间。 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中的向量也称为点, 向量 $\mathbf{x}$ 的第 i 个分量 x_i 也称为点 $\mathbf{x}$ 的第 i 个坐标。 $\mathbb{R}^n$ 中的点 (向量) 常用小写黑体英文字母 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{a}, \mathbf{b}$ 等表示, 有时也用大写英文字母 P, Q 等来表示 $\mathbb{R}^n$ 中的点。

$\mathbb{R}^n$ 中向量 $\mathbf{x}$ 的长度 (范数) 定义为

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \quad (1.1)$$

$\mathbb{R}^n$ 中两点 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{y}$ 的距离定义为

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2} \quad (1.2)$$

1.1.2 $\mathbb{R}^n$ 点列的极限

定义 1.1 ($\mathbb{R}^n$ 点列的极限)

设 $\{\mathbf{x}_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点列, 其中 $\mathbf{x}_k = (x_{k,1}, x_{k,2}, \dots, x_{k,n})$, 又设 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一固定点, 若当 $k \rightarrow \infty$ 时, $\rho(\mathbf{x}_k, \mathbf{a}) \rightarrow 0$, 即

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{ 使得 } \forall k > N, \text{ 恒有 } \|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}\| < \varepsilon$$

则称点列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 的极限存在, 且称 $\mathbf{a}$ 为它的极限, 记作

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a} \quad \text{或} \quad \mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a} \quad (k \rightarrow \infty)$$

这时也称点列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 收敛于 $\mathbf{a}$ 。

 **笔记** 根据定义不难证明, $\mathbb{R}^n$ 中点列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 收敛于 $\mathbf{a}$ 等价于该点列的各个坐标所构成的数列 $\{x_{k,i}\}$ 分别收敛于点 $\mathbf{a}$ 的相应坐标 a_i 。从而, 它把研究 $\mathbb{R}^n$ 中点列的收敛问题转化为实数列 (即一维空间 $\mathbb{R}$ 中的点列) 的收敛问题。

性质 依据上述, $\mathbb{R}^n$ 点列极限所具有的性质可以类比数列极限的性质。

1. $\{\mathbf{x}_k\}$ 的极限是唯一的
2. $\{\mathbf{x}_k\}$ 是有界点列, 即 $\exists M \in \mathbb{R} > 0$, 使得 $\forall k \in \mathbb{N}^*$, 恒有 $\|\mathbf{x}_k\| \leq M$
3. 若 $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a}, \mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{b}$, 则 $\mathbf{x}_k \pm \mathbf{y}_k \rightarrow \mathbf{a} \pm \mathbf{b}, \alpha \mathbf{x}_k \rightarrow \alpha \mathbf{a}, \langle \mathbf{x}_k, \mathbf{y}_k \rangle \rightarrow \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$, 其中 $\alpha \in \mathbb{R}$
4. 若 $\{\mathbf{x}_k\}$ 收敛于 $\mathbf{a}$, 则它的任一子点列也收敛于 $\mathbf{a}$
5. (Bolzano-Weierstrass 定理) $\mathbb{R}^n$ 中的有界点列必有收敛子列。

设 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的点列, 若

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \text{使得 } \forall k > N \text{ 及 } p \in \mathbb{N}^*, \text{恒有 } \|x_{k+p} - x_k\| < \varepsilon$$

则称 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的基本点列或 Cauchy 点列。不难证明 $\{x_k\}$ 是 Cauchy 点列的充要条件是 $\forall i = 1, 2, \dots, n, \{x_{k,i}\}$ 都是 Cauchy 数列。再根据数列的 Cauchy 收敛原理, 立即可以得到 $\mathbb{R}^n$ 中点列的 Cauchy 收敛原理。

定理 1.1 (Cauchy 收敛原理)

$\mathbb{R}^n$ 中点列 $\{x_k\}$ 收敛于 $\mathbb{R}^n$ 中的点的充要条件为 $\{x_k\}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的 Cauchy 点列。

1.1.3 开集和闭集

为了讨论多元函数的极限与连续性, 本段简要地介绍 $\mathbb{R}^n$ 中点集的基本知识, 包括开集、闭集等。下面将要介绍大量的新定义和概念, 建议在平面 $\mathbb{R}^2$ 中去理解它们。(如果理解不能, 就去感受)

定义 1.2 (聚点、导集、闭包、孤立点和闭集)

设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点集, $a \in \mathbb{R}^n$ 。若存在 A 中的点列 $\{x_k\}, x_k \neq a (k = 1, 2, \dots)$, 使得 $x_k \rightarrow a (k \rightarrow \infty)$, 则称 a 是 A 的一个聚点; A 的所有聚点构成的集合称为 A 的导集, 记作 A' ; 集合 $\bar{A} = A \cup A'$ 称为 A 的闭包; 若 $a \in A$, 但 $a \notin A'$, 则称 a 为 A 的孤立点; 若 $A' \subseteq A$, 则称 A 为闭集。

 **笔记** 设 $A = \left\{ \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k} \right) \mid k \in \mathbb{N}^* \right\}$ 是一平面点集, 则点 $P(0,0)$ 是 A 的唯一聚点, A 的导集 $A' = \{(0,0)\}$, 闭包 $\bar{A} = A \cup \{(0,0)\}$, 而 A 中的所有点都是它的孤立点。因为 $A' \not\subseteq A$, 因此 A 不是闭集, 但 $\bar{A} = A \cup \{(0,0)\}$ 是闭集。

定义 1.3 (δ 邻域)

设 $a \in \mathbb{R}^n, \delta > 0$, 称点集

$$U(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < \delta\} \quad (1.3)$$

为以 a 为中心, δ 为半径的开球或点 a 的 δ 邻域, 又称

$$\overset{\circ}{U}(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid 0 < \|x - a\| < \delta\} \quad (1.4)$$

为点 a 的去心 δ 邻域。特别地, 下面的式子记作 a 为中心, δ 为半径的闭球

$$\bar{U}(a, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \leq \delta\}$$

根据邻域的定义可以重新表述聚点的含义。设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点集, $a \in \mathbb{R}^n$, 则 $a \in A'$ 的充要条件为 $\forall \varepsilon > 0, \overset{\circ}{U}(a, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ 。也就是说, a 为 A 的聚点当且仅当 a 的任何去心 ε 邻域中都含有 A 中的点。这不难理解, 因为聚点就是 A 中点列不断逼近的结果。

定义 1.4 (点与其集的关系)

设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$, 点 $a \in \mathbb{R}^n$ 。

- 若存在 $\delta > 0$, 使 $U(a, \delta) \subseteq A$, 则称 a 是 A 的内点。由 A 的所有内点构成的集称为 A 的内部, 记作 A° 或 $\text{int } A$;
- 若存在 $\delta > 0$, 使 $U(a, \delta) \cap A = \emptyset$, 则称 a 是 A 的外点。 A 的所有外点构成的集称为 A 的外部, 记作 $\text{ext } A$;
- 若对任何 $\delta > 0, U(a, \delta)$ 中既含有 A 中的点, 也含有 A^c 中的点, 则称 a 为集 A 的边界点。 A 的所有边界点构成的集称为 A 的边界, 记作 ∂A 。

$\mathbb{R}^n$ 中的任一点是且仅是 A 的内点、外点与边界点中的一种, 亦即

$$\mathbb{R}^n = A^\circ \cup \partial A \cup \text{ext } A \quad (1.5)$$

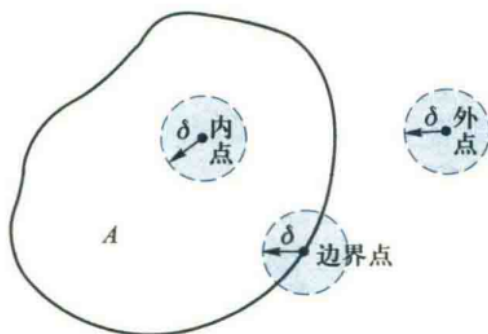
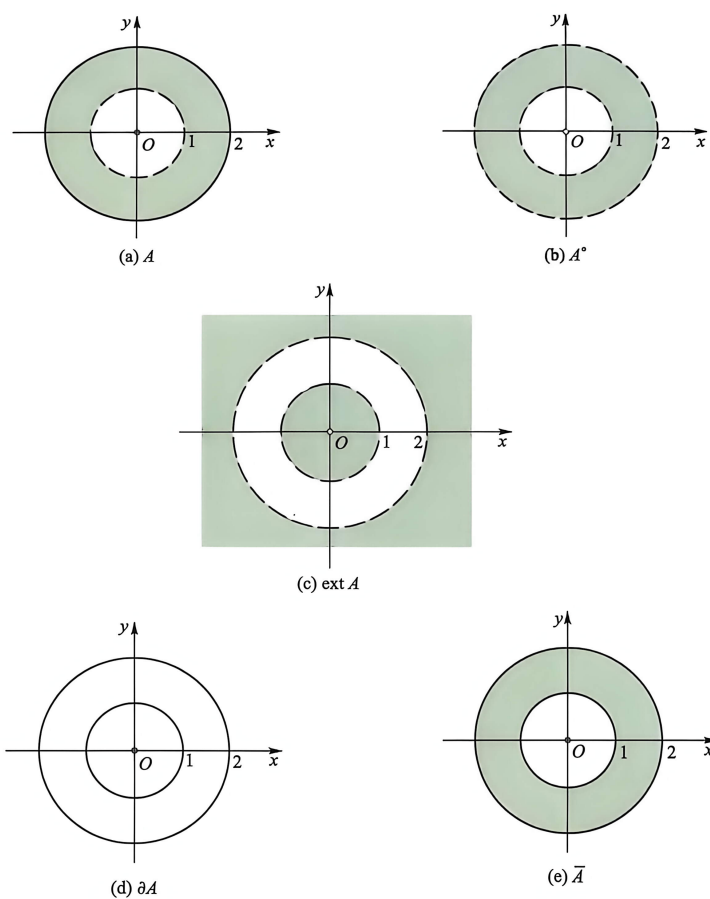


图 1.1: 内点、外点与边界点

由定义易见, 对于 $\mathbb{R}^n$ 中的任一点集 A , 必有 $\bar{A} = A \cup \partial A$.

例题 1.1 设 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 0, 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$, 分别画出 $A, A^\circ, \text{ext } A, \partial A$ 及 $\bar{A}$.

解 见下图 (a)(b)(c)(d)(e)。

图 1.2: $A, A^\circ, \text{ext } A, \partial A$ 及 $\bar{A}$

定义 1.5 (开集)

设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$, 若 $A \subseteq A^\circ$, 即 A 中的点全是 A 的内点, 则称 A 为开集。

不难证明, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是开集的充要条件为 A^c 是闭集。

性质 在 n 维 Euclid 空间 $\mathbb{R}^n$ 中, 开集有如下性质:

1. 空集 $\emptyset$ 与全空间 $\mathbb{R}^n$ 是开集
2. 任意多个开集的并是开集
3. 有限多个开集的交是开集

1.1.4 紧集、连通集和区域

先来定义点集的有界性。设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点集, 如果存在一个常数 $M > 0$, 使得 $\forall \mathbf{x} \in A$, 都有 $\|\mathbf{x}\| \leq M$, 则称 A 是**有界集**, 否则称为**无界集**。显然, 有界集的几何含义是它能包含在 $\mathbb{R}^n$ 中一个以原点 $\mathbf{0}$ 为中心、 M 为半径的闭球 $\overline{U}(\mathbf{0}, M)$ 中。

定义 1.6 (紧集、连通集和区域)

设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个点集, 若 A 是有界闭集, 则称 A 为**紧集**; 如果 A 中的任意两点 $\mathbf{x}$ 与 $\mathbf{y}$ 都能用完全属于 A 的有限个线段联结起来, 则称 A 是**连通集**。连通的开集称为**区域**, 而区域与它的边界之并称为**闭区域**。

注 定义 1.6 中对于连通集的规定中, 设 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个不同点, 称下述点集为 $\mathbb{R}^n$ 中联结点 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 的**线段**。

$$\{t\mathbf{a} + (1-t)\mathbf{b} \mid t \in \mathbb{R}, 0 \leq t \leq 1\} \quad (1.6)$$

图 1.3 中, (a) 是一个区域, 而 (b) 不是一个区域。

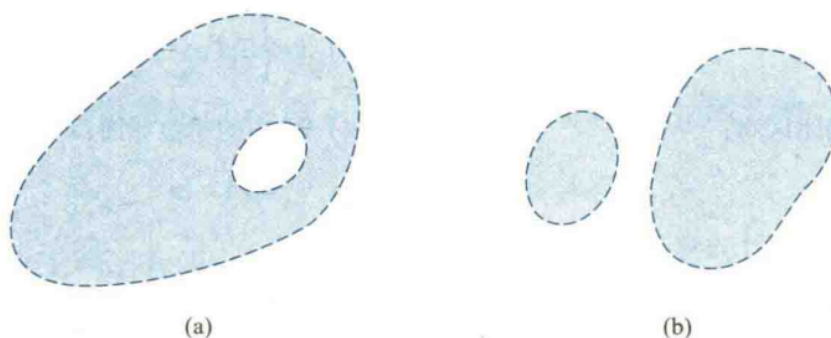


图 1.3: 区域的举例

若联结 A 中任意两点的线段都属于 A , 即若 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in A$, 则 $\forall t \in [0, 1]$, $t\mathbf{x}_1 + (1-t)\mathbf{x}_2 \in A$, 则称 A 是 $\mathbb{R}^n$ 中的**凸集**。由定义 1.6 得知, 任何凸集都是连通的, 因而任何凸开集都是区域。

例题 1.2 证明有限点集是紧集。

证明 只需要证明有限点集都是有界闭集即可。设点集 $K \subseteq \mathbb{R}^n$ 含有 m 个点 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ 。

- 有界性: 设 $D = \max_{1 \leq j \leq m} \|\mathbf{x}_j\|$, 取 $M = D + 1$, 则 $K \subseteq \overline{U}(\mathbf{0}, M)$ 。
- 闭集: 只需要证明 K^c 是开集即可。 $\forall \mathbf{y} \in K^c$, 设 $d = \min_{1 \leq j \leq m} \|\mathbf{y} - \mathbf{x}_j\|$, 则可以说明 $U(\mathbf{y}, \frac{d}{2}) \cap K = \emptyset$ 。因此存在 $\delta = \frac{d}{2}$, 使 $U(\mathbf{y}, \delta) \subseteq K^c$, 因此 $\mathbf{y}$ 是 K^c 的内点, 不难有 $\text{int } K^c = K^c$ 。故 K^c 是开集, K 是闭集。

1.2 多元函数的极限和连续性 (★★)

1.2.1 多元数量值函数

在实际科学问题中常常要考虑某个变量和若干个变量之间的关系，这就要引入多元数量值函数的定义。

定义 1.7 (多元数量值函数)

设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个点集，称映射 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 是定义在 A 上的一个 n 元数量值函数，简称 n 元函数或记作

$$w = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ 称为自变量， $D(f) = A$ 称为 f 的定义域， w 称为因变量，与给定的 $\mathbf{x} \in D(f)$ 所对应的 w 称为函数 f 在点 $\mathbf{x}$ 处的值， $R(f) = \{w \mid w = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D(f)\}$ 称为 f 的值域。

习惯上，二元函数常记成 $z = f(x, y)$, $(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$ 。三元函数常记成

$$u = f(x, y, z), \quad (x, y, z) \in A \subseteq \mathbb{R}^3$$

类似于一元函数，多元数量值函数也可以用几何表示，这里介绍两种常用的方法。

1. 图像表示法

二元函数 $z = f(x, y)$ ($(x, y) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$) 的图像

$$\text{Gr } f = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in A, z = f(x, y)\}$$

是 $\mathbb{R}^3$ 中的点集，且通常是 $\mathbb{R}^3$ 中的一张曲面，这个曲面在 xOy 坐标面的投影区域就是函数 f 的定义域 $A = D(f)$ 。一般地， n 元函数 $w = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in A \subseteq \mathbb{R}^n$ 的图像 $\text{Gr } f$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的点集。

2. 等值线表示法

另一种图示函数 $z = f(x, y)$ 的方法是利用它的所谓等值线 $f(x, y) = C$ (其中 C 为常数)，它表示 xOy 平面上使函数 $z = f(x, y)$ 取相同函数值 C 的点 (x, y) 构成的集合。

容易看出，等值线 $f(x, y) = C$ 实际上就是曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $z = C$ 的交线在 xOy 坐标平面上的投影 (右图)。因此，对于不同的 C ，就得到不同的等值线，一个函数的所有等值线构成 xOy 平面上的一个曲线族。

地图中的等高线就是等值线的一种例子。用水平平面 $z = C$ 截小山表面，其截线在 xOy 平面上的投影就是表示这个小山表面形状的函数 $z = f(x, y)$ 的等高线 $f(x, y) = C$ 。这一系列等高线就形成了此山体的地形图 (鸟瞰图)。

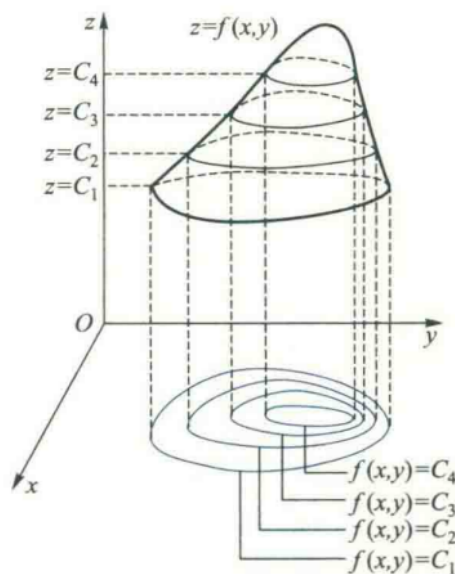


图 1.4: $z = f(x, y)$ 的等值线表示

对于三元函数 $u = f(x, y, z)$ ，它的图像不可能在四维空间中呈现，但可以在三维空间 $Oxyz$ 中用曲面 $f(x, y, z) = C$ 来显示此三元函数的特征。 $f(x, y, z) = C$ 称为函数 $u = f(x, y, z)$ 的等值面，其中 C 为常数。

1.2.2 多元向量值函数

定义 1.8 (多元向量值函数)

设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是一个点集, 称映射 $f: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m \geq 2$) 为定义在 A 上的一个 n 元向量值函数, 也记作 $\mathbf{y} = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in A$ 。其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in A$ 是自变量, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$ 是因变量, 且映射 $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)$ 。

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(\mathbf{x}) \\ f_2(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ f_m(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

例如, 空间 $\mathbb{R}^3$ 中曲线的参数方程为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad t \in [\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$$

它可以看成是从 $[\alpha, \beta]$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的一个映射, 即一元向量值函数 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t), t \in [\alpha, \beta]$ 。

1.2.3 多元函数的极限与连续性

多元函数同样可以从极限和连续性开始讨论他的一些性质。为此, 先介绍二元数量值函数的极限定义。

定义 1.9 (二重极限)

设 $f: A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 是一个二元数量值函数, (x_0, y_0) 是 A 的一个聚点。若存在常数 $a \in \mathbb{R}$ 使得 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $(x, y) \in \dot{U}((x_0, y_0), \delta) \cap A$ 时, 恒有

$$|f(x, y) - a| < \varepsilon \quad (1.8)$$

则称当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时 $f(x, y)$ 有极限, 且称 a 为当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时 $f(x, y)$ 的极限, 记作:

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = a \quad \text{或} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = a$$

这个极限也称为二重极限, 否则称当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时 $f(x, y)$ 没有极限。

注 二重极限的一些性质同样可以类比一元函数极限的相关性质, 并予以推广。然而, 在二重极限的定义中, 有几点需要特别注意:

1. 定义中, 点 (x, y) 必须在点集 A 中, 因此要求逼近时 $(x, y) \in \dot{U}((x_0, y_0), \delta) \cap A$;
2. 二重极限中, 从点 (x, y) 趋向 (x_0, y_0) 的方法可以有无数种, 也就是有无数个方向和多种姿态的逼近方式。因此, 只有 $(x, y) \in A$ 以各种方式逼近 (x_0, y_0) 时函数值都趋于一个常数 a 时, 才说二重极限存在;
3. 求二重极限时, 若已断言该极限存在, 那么只需要按照一条便于计算的逼近路线求极限即可。若要证明二重极限不存在, 只需要验证不同逼近方式的极限结果不同。

 **笔记** 我们对注意点 3 加以案例解释。求二重极限可以借助直接代入法、等价无穷小法和极坐标法, 这里对后两种方法简要介绍。

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{e^{xy} - 1}{\sqrt{xy + 4} - 2} &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{2 \left(\sqrt{\frac{xy}{4} + 1} - 1 \right)} \\ &= \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy}{2 \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{xy}{4} \right)} \\ &= 4, \quad (\text{等价无穷小法}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0^+ \\ \forall \theta}} \frac{(\rho \cos \theta)(\rho \sin \theta)}{\sqrt{(\rho \cos \theta)^2 + (\rho \sin \theta)^2}} \quad (x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta) \\
&= \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0^+ \\ \forall \theta}} \frac{\rho^2 \cos \theta \sin \theta}{\rho} \\
&= \lim_{\substack{\rho \rightarrow 0^+ \\ \forall \theta}} \rho \cos \theta \sin \theta \\
&= 0, \quad (\text{极坐标法, 最后一步用到了“无穷小} \times \text{有界量} = \text{无穷小”})
\end{aligned}$$

证明二重极限不存在只需要构造不同的逼近方式并验证极限不同。设 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, 现在讨论二重极限 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ 是否存在。当点 (x, y) 沿着直线 $y = kx$ 趋于 $(0, 0)$ 时有

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ y = kx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{(1 + k^2)x^2} = \frac{k}{1 + k^2}$$

上式说明, 若 k 取不同值, 即当 (x, y) 沿着不同的直线 $y = kx$ 趋于 $(0, 0)$ 时, $f(x, y)$ 趋于不同的常数, 因此 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ 不存在。

明白了二元函数极限的概念, 就不难讨论二元函数的连续性问题。与一元函数的连续性类似, 可以定义二元函数连续性如下。

定义 1.10 (二元函数的连续性)

设二元数量值函数 $f(x, y)$ 定义在点 (x_0, y_0) 的某一邻域 $U(x_0, y_0)$ 内, 若

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0) \quad (1.9)$$

则称函数 f 在点 (x_0, y_0) 处连续, 否则, 称 f 在点 (x_0, y_0) 处间断。若 f 在区域 D 中的每一点处连续, 则称 f 在区域 D 内连续。此时称 f 是 D 内的连续函数。

多元函数的极限和连续性也就可以类比定义 1.9 和 1.10。二元函数不连续的点也被称作间断点, 而如果一条曲线上的点都是间断点, 称该曲线为间断线。例如对于下面定义在平面 $\mathbb{R}^2$ 上的二元函数

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$$

由于 $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ 不存在 (上已证), 因此点 $(0, 0)$ 是 f 的间断点。除此之外, 它在平面 $\mathbb{R}^2$ 上处处连续。

性质 设 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 是有界闭区域, $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ 是 A 上的连续函数, 则

1. (有界性) f 在 A 上有界
2. (最大最小值定理) f 在 A 上能取得它的最大值与最小值
3. (介值定理) 设 m 与 M 分别是 f 在 A 上的最小值与最大值。如果常数 μ 是 m 与 M 之间的任一数, 亦即 $m \leq \mu \leq M$, 则必 $\exists x_0 \in A$, 使 $f(x_0) = \mu$
4. f 在 A 上一致连续, 即

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$, 使得 $\forall x_1, x_2 \in A$, 当 $\|x_1 - x_2\| < \delta$ 时, 恒有

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

1.3 多元数量值函数的导数和微分(★★★)

1.3.1 偏导数

一元函数的导数可以用来描述函数增长的情况和趋势,但多元函数的因变量受多个自变量的共同作用,因而需要引入偏导数的定义区别描述某个自变量对函数增长情况的影响。

定义 1.11 (二元函数在某点的偏导数)

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域 $U(x_0, y_0)$ 内有定义,当自变量 y 固定在 $y = y_0$, 而 x 在 x_0 处有改变量 Δx , 且 $(x_0 + \Delta x, y_0) \in U(x_0, y_0)$ 时,相应地,函数 f 有改变量 $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$ 。如果极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$ 存在,则称此极限值为函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数,记作

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = f_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \quad z_x(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(x_0, y_0)} \quad (1.10)$$

类似地,可定义函数 $z = f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处对 y 的偏导数,记作

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = f_y(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}, \quad z_y(x_0, y_0) \quad \text{或} \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0)} \quad (1.11)$$

如果二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 与对 y 的偏导数均存在,那么称 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处可偏导。

注 在上述定义中偏导数有四种等价写法,其中部分写法通常借助下标区分求偏导的变量。

与一元函数类似,若 f 在区域 $D \subseteq \mathbb{R}^2$ 内有定义,可以规定 f 在区域 D 内对 x 及对 y 的偏导函数分别为

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \end{aligned}$$

其中 $(x, y) \in D, (x + \Delta x, y) \in D, (x, y + \Delta y) \in D$ 。函数 $z = f(x, y)$ 对 x, y 的偏导函数可以有四种记法,例如对 x 的偏导可以记作

$$f_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad z_x \quad \text{或} \quad \frac{\partial z}{\partial x}$$

根据定义,二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 就是一元函数 $z = f(x, y_0)$ 在 x_0 处的导数,而二元函数 $z = f(x, y)$ 在几何上表示空间的一个曲面,函数 $z = f(x, y_0)$ 在几何上就表示曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $y = y_0$ 的交线

$$C_x : \begin{cases} z = f(x, y) \\ y = y_0 \end{cases}$$

于是由一元函数导数的几何意义立即可知 $f_x(x_0, y_0)$ 就是曲线 C_x 在点 $M(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 处切线 T_x 的斜率(右图),即

$$f_x(x_0, y_0) = \tan \alpha \quad (1.12)$$

同理知 $f_y(x_0, y_0)$ 就是曲线 $C_y : \begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_0 \end{cases}$

在点 M 处切线 T_y 的斜率,即

$$f_y(x_0, y_0) = \tan \beta \quad (1.13)$$

一般地, n 元函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 在 $\mathbf{x}_0(x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n})$ 处对变量 $x_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 的偏导数也定义为

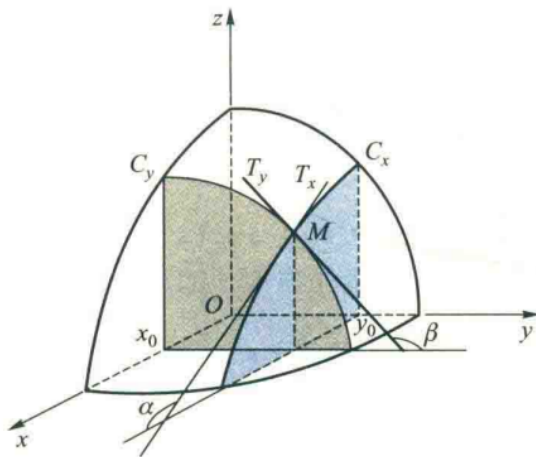


图 1.5: 偏导数的几何意义

将其余变量 x_j ($j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$) 固定时, 关于 x_i 的一元函数 $f(x_0, 1, \dots, x_{0,i-1}, x_i, x_{0,i+1}, \dots, x_{0,n})$ 在 $x_{0,i}$ 处的导数, 即

$$\frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} = \frac{d}{dx_i} f(x_{0,1}, \dots, x_{0,i-1}, x_i, x_{0,i+1}, \dots, x_{0,n}) \Big|_{x_i=x_{0,i}} \quad (1.14)$$

 **笔记** 在求对某个变量的偏导数时, 只需把其他变量看做常量, 再利用一元求导法则即可。

例题 1.3 设三元函数 $u(x, y, z) = \sqrt{\frac{y}{x}}$, 求 u 对各个自变量的偏导数及 $\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,2,1)}$ 。

解 分别把 x, y, z 中的任意两个变量看做常量, 并对剩下的那个变量求导得到三个偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{z} \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{1}{z}-1} \left(-\frac{y}{x^2} \right), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{1}{z}-1} \frac{1}{x}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{1}{z}} \ln \left(\frac{y}{x} \right) \left(-\frac{1}{z^2} \right)$$

直接把 $(x, y, z) = (1, 2, 1)$ 代入 u 对 x 的偏导数中得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,2,1)} = \frac{1}{z} \left(\frac{y}{x} \right)^{\frac{1}{z}-1} \left(-\frac{y}{x^2} \right) \Big|_{(1,2,1)} = -2$$

也可以看做是下面的求法

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(1,2,1)} = \frac{d}{dx} u(x, 2, 1) \Big|_{x=1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{2}{x} \right) \Big|_{x=1} = -\frac{2}{x^2} \Big|_{x=1} = -2$$

1.3.2 全微分

一元函数的微分可以看做是对函数变化量线性逼近的结果, 而多元函数的微分该如何考虑呢?

定义 1.12 (二元函数的全微分)

设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域 $U(x_0, y_0)$ 内有定义。如果对于 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(x_0, y_0)$, 函数 f 在 (x_0, y_0) 处的改变量可以表示为

$$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = a_1 \Delta x + a_2 \Delta y + o(\rho)$$

其中, a_1, a_2 是与 $\Delta x, \Delta y$ 无关的两个常数(但一般与点 (x_0, y_0) 有关), $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$, $o(\rho)$ 是当 $\rho \rightarrow 0$ (即 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$) 时关于 ρ 的高阶无穷小, 则称函数 f 在点 (x_0, y_0) 处可微, 并称 $a_1 \Delta x + a_2 \Delta y$ 为函数 f 在点 (x_0, y_0) 处的全微分, 记作 $dz|_{(x_0, y_0)}$ 或 $df(x_0, y_0)$ 。

习惯上, 将自变量的改变量 Δx 与 Δy 分别写成 dx 与 dy , 并分别称为自变量 x 与 y 的微分, 所以函数 f 的全微分也常写成

$$dz|_{(x_0, y_0)} = a_1 dx + a_2 dy \quad (1.15)$$

由上述定义可见, 当 ρ 充分小且 a_1 与 a_2 不全为零时, 全微分 $dz|_{(x_0, y_0)}$ 就是函数 f 在 (x_0, y_0) 处改变量的线性主部。为了进一步了解全微分的性质并计算全微分, 需要给出下面的必要条件和充分条件。

定理 1.2 (可微的必要条件)

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 则

- f 在 (x_0, y_0) 处连续;
- f 在 (x_0, y_0) 处的两个偏导数均存在, 且有 $a_1 = f_x(x_0, y_0), a_2 = f_y(x_0, y_0)$, 即

$$df(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy \quad (1.16)$$

 **笔记 1.16** 式给出了全微分的计算公式。由此可见, 与一元函数的微分类似, 二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的全微分不仅与 f 在点 (x_0, y_0) 处的各个偏导数有关, 还与 $\Delta x, \Delta y$ 有关。如果 $z = f(x, y)$ 在区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 的每一点处都可微, 则称 f 是 Ω 内的可微函数, 此时点 (x, y) 处的全微分可简记成 df 或 dz , 且有

$$dz = f_x dx + f_y dy \quad (1.17)$$

例题 1.4 已知函数 $z = \int_x^y e^{-t^2} dt$, 求 $dz|_{(0,1)}$

解 计算 $z_x|_{(0,1)} = -e^{-x^2}|_{(0,1)} = -1$, $z_y|_{(0,1)} = e^{-y^2}|_{(0,1)} = e^{-1}$, 根据定理 1.2 得

$$dz = -dx + \frac{1}{e} dy$$

定理 1.2 只是描述了函数可微的一个必要条件, 但函数的偏导数均存在时, 仍不能保证在该点可微。下面就给出函数可微的一个充分条件。

定理 1.3 (可微的充分条件)

设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义, 若 $f(x, y)$ 的两个偏导数均在点 (x_0, y_0) 处连续, 则该函数在点 (x_0, y_0) 处可微。

同样的, 定理 1.3 只是描述了函数可微的一个充分条件, 但函数可微时, 其偏导数未必连续。

二元函数全微分的概念可直接推广到 n 元函数。设 n 元函数 $u = f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_n)$ 在点 $\mathbf{x}_0 = (x_{0,1}, \dots, x_{0,n}) \in \mathbb{R}^n$ 的邻域 $U(\mathbf{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^n$ 内有定义, 如果 $\forall \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$, 存在一组与 $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)$ 无关的常数 $a_1, \dots, a_n$, 使得函数 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处的改变量 $\Delta u = f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)$ 可表示为

$$\Delta u = a_1 \Delta x_1 + \dots + a_n \Delta x_n + o(\rho)$$

其中 $o(\rho)$ 是当 $\rho = \|\Delta \mathbf{x}\| \rightarrow 0$ 时关于 ρ 的高阶无穷小, 则称 f 在点 $\mathbf{x}_0$ 处可微, 于是 f 的全微分也常写成

$$df(\mathbf{x}_0) = \sum_{i=1}^n a_i dx_i \quad (1.18)$$

n 元函数的全微分性质可类比定理 1.2 和 1.3。

1.3.3 方向导数

二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数, 实际上是刻画函数 f 在点 (x_0, y_0) 处沿与 x 轴和 y 轴平行的方向的变化率。然而在许多实际问题中, 仅仅研究函数沿这两个特殊方向的变化率还远远不够, 还需要研究函数在点 (x_0, y_0) 处沿各个不同方向的变化率。这需要引入方向导数的定义。

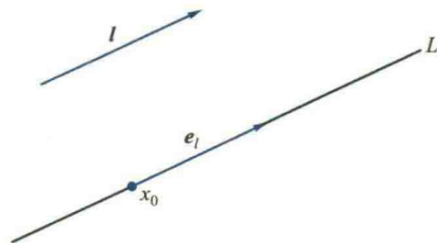


图 1.6: 沿向量 l 方向的变化率研究

定义 1.13 (方向导数)

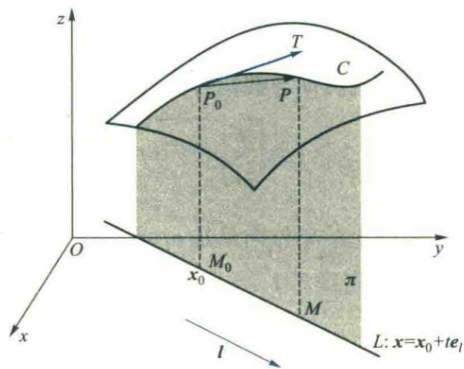
设点 $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^2$, l 是平面上一向量, 与 l 同向的单位向量为 e_l , 二元函数 f 定义在 $\mathbf{x}_0$ 的邻域 $U(\mathbf{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^2$ 内, 在 $U(\mathbf{x}_0)$ 内让自变量 $\mathbf{x}$ 由 $\mathbf{x}_0$ 沿与 e_l 平行的直线变到 $\mathbf{x}_0 + te_l$, 从而函数值有对应的改变量 $f(\mathbf{x}_0 + te_l) - f(\mathbf{x}_0)$ 。若极限

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + te_l) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

存在, 则称此极限值为 f 在点 $\mathbf{x}_0$ 处沿 l 方向的方向导数, 记作

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{\mathbf{x}_0} = \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial l} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + te_l) - f(\mathbf{x}_0)}{t} \quad (1.19)$$

注 方向导数实际上是函数 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处沿 l 方向关于距离的变化率, 它表示当 $\mathbf{x}$ 在 $\mathbf{x}_0$ 邻近沿 l 方向变化 (无论 $t > 0$ 还是 $t < 0$) 时, 函数 $f(\mathbf{x})$ 变化的快慢程度。若方向导数 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{\mathbf{x}_0} > 0$ (< 0), 则 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处沿 l 方向增加 (减少)。而且, 方向导数的绝对值愈大, 则表明 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处沿 l 方向增加 (减少) 得愈快。

图 1.7: 沿向量 l 的方向导数的几何意义

方向导数也具有几何意义。过直线 $L: x = x_0 + te_l$ 作平行于 z 轴的平面 π , 它与曲面 $z = f(x, y)$ 所交的曲线记作 C 。不难说明曲线 C 在点 P_0 仅有唯一的切线 T , 它关于 l 方向的斜率就是方向导数 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{x_0}$ 。

且由方向导数的定义容易看出

$$\left. \frac{\partial f}{\partial(-l)} \right|_{x_0} = - \left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{x_0} \quad (1.20)$$

即 f 在 x_0 处沿 l 方向的方向导数与沿 $-l$ 方向的方向导数只差一个符号。

用定义去判定一个函数的方向导数是否存在或计算方向导数的值, 通常都是不方便的。下面定理给出方向导数存在的一个充分条件, 以及方向导数的计算公式。

定理 1.4 (方向导数的判定与计算)

若 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微, 则函数 f 在点 (x_0, y_0) 沿任意 l 方向的方向导数均存在, 且

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta$$

其中 l 方向上的单位向量是 $e_l = (\cos \alpha, \cos \beta)$, 亦可以视 $\cos \alpha, \cos \beta$ 为方向余弦。

该定理将于下一小节进一步说明。

1.3.4 梯度

实际应用中常常需要考虑函数在某点处时, 哪个方向的变化率最大, 也就是求出何时方向导数最大。这就需要引入梯度 (gradient) 的概念。

定义 1.14 (梯度)

设二元函数 $z = f(x, y)$ 定义在点 (x_0, y_0) 的邻域中, 如果存在一个向量, 其方向为该函数在此点取得方向导数最大值的方向, 其模等于该函数在此点的方向导数的最大值, 则称该向量为函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的梯度, 记作 $\text{grad } f(x_0, y_0)$ 。

利用方向导数的计算公式 1.19 和梯度的定义, 容易得到梯度存在的一个充分条件和梯度的计算公式。

定理 1.5 (梯度的计算公式)

设二元函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 则 f 在该点的梯度一定存在, 并且

$$\text{grad } f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0) \mathbf{i} + f_y(x_0, y_0) \mathbf{j} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \quad (1.21)$$

证明 设 l 为任一向量, 由于函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微, 根据定理 1.4, f 在点 (x_0, y_0) 处沿 $e_l = (\cos \alpha, \cos \beta)$ 的方向导数必定存在, 且

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = f_x(x_0, y_0) \cos \alpha + f_y(x_0, y_0) \cos \beta$$

作向量 $g = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))$, 下面证明 g 就是 f 在点 (x_0, y_0) 处的梯度。事实上, 由于

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \langle g, e_l \rangle = \|g\| \cos(g, e_l) \leq \|g\|$$

所以, 当 $\cos(\mathbf{g}, \mathbf{e}_l) = 1$ 时 (即 $\mathbf{g}$ 和 $\mathbf{e}_l$ 同向时), $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \|\mathbf{g}\|$. 也就是说, 向量 $\mathbf{g}$ 的方向是函数 f 在点 (x_0, y_0) 处取得方向导数最大值的方向, $\mathbf{g}$ 的模 $\|\mathbf{g}\|$ 就是 f 在此点方向导数的最大值. 故

$$\mathbf{g} = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j} = \mathbf{grad} f(x_0, y_0)$$

 **笔记** 函数 f 在 (x_0, y_0) 处的梯度也可以用 nabla 算符 ∇ 来表示, 记作 $\nabla f(x_0, y_0)$, 其中符号 $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right)$, 它本身并无意义, 仅当将 ∇ 作用于函数 f 后表示如下向量

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} \right) = \mathbf{grad} f(x_0, y_0) \quad (1.22)$$

同时, 定理 1.5 的证明过程中指出了利用梯度求方向导数的方法。

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(x_0, y_0)} = \langle \mathbf{g}, \mathbf{e}_l \rangle = \|\mathbf{g}\| \cos(\mathbf{g}, \mathbf{e}_l) \quad (1.23)$$

例题 1.5 求二元函数 $u = x^2 - xy + y^2$ 在点 $P(-1, 1)$ 处沿方向 $\mathbf{e}_l = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ 的方向导数. 并指出 u 在该点沿哪个方向的方向导数最大? 这个最大的方向导数值是多少? u 沿哪个方向减小得最快? 沿哪个方向 u 的值不变?

解 解此题的关键是求函数 u 在 $(-1, 1)$ 点处的梯度. 由于

$$\nabla u \Big|_{(-1, 1)} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Big|_{(-1, 1)} = (2x - y, 2y - x) \Big|_{(-1, 1)} = (-3, 3)$$

所以沿方向 $\mathbf{e}_l = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ 的方向导数

$$\frac{\partial u(-1, 1)}{\partial l} = \langle \nabla u|_{(-1, 1)}, \mathbf{e}_l \rangle = \frac{1}{\sqrt{5}}(-6 + 3) = \frac{-3}{\sqrt{5}}$$

方向导数取得最大值的方向即梯度方向, 其单位向量为 $\frac{1}{\sqrt{2}}(-1, 1)$, 方向导数的最大值即 $\|\nabla u|_{(-1, 1)}\| = 3\sqrt{2}$;

u 沿梯度的负向, 即 $\frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ 的方向减小得最快. 为求使 u 的值不变的方向, 就是求使 u 的变化率为零的方向, 令 $\mathbf{e}_l = (\cos \theta, \sin \theta)$, 则

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{(-1, 1)} = \langle \nabla u|_{(-1, 1)}, \mathbf{e}_l \rangle = -3 \cos \theta + 3 \sin \theta = 3\sqrt{2} \sin \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right)$$

令 $\frac{\partial u}{\partial l} = 0$, 得 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 或 $\pi + \frac{\pi}{4}$, 故在点 $(-1, 1)$ 处沿 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $\pi + \frac{\pi}{4}$ 的方向, 函数 u 的值不变. 从等值线图可以看出, 该点所在等值线的切线方向就是函数变化率为零的方向.

方向导数与梯度的概念均可直接推广到 n 元函数. 设 $\mathbf{x}_0$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个点, f 为定义在 $\mathbf{x}_0$ 的邻域 $U(\mathbf{x}_0)$ 内一个 n 元函数, $\mathbf{e}_l$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中一个单位向量, 则 n 元函数 $f(\mathbf{x})$ 在点 $\mathbf{x}_0$ 沿 $\mathbf{e}_l$ 方向的方向导数定义为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{\mathbf{x}_0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{e}_l) - f(\mathbf{x}_0)}{t}$$

当 f 在点 $\mathbf{x}_0$ 可微时, f 在点 $\mathbf{x}_0$ 沿任意 l 方向的方向导数都存在, 并且有如下的计算公式:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{\mathbf{x}_0} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_k} \cos \alpha_k \quad (1.24)$$

其中 $\cos \alpha_1, \cos \alpha_2, \dots, \cos \alpha_n$ 为向量 l 的方向余弦. 当 f 在点 $\mathbf{x}_0$ 处可微时, f 在 $\mathbf{x}_0$ 处的梯度也存在并有

$$\mathbf{grad} f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)_{\mathbf{x}_0} \quad (1.25)$$

性质 设函数 u, v 及 f 均可微, 其中的 C_1, C_2 为任意常数, 则有

1. $\nabla(C_1 u + C_2 v) = C_1 \nabla u + C_2 \nabla v$
2. $\nabla(uv) = u \nabla v + v \nabla u$
3. $\nabla \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{1}{v^2} [v \nabla u - u \nabla v], \quad (v \neq 0)$
4. $\nabla f(u) = f'(u) \nabla u$

1.3.5 高阶偏导数和高阶全微分

以二元函数为例, 我们先来介绍高阶偏导数的概念。

定义 1.15 (二阶偏导数)

若 $z = f(x, y)$ 在区域 D 内的两个偏导函数

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x} = f_x(x, y), \quad z_y = \frac{\partial z}{\partial y} = f_y(x, y)$$

在 D 内某点 x 处的偏导数仍存在, 则这两个函数 $f_x(x, y)$ 与 $f_y(x, y)$ 的偏导数称为函数 $f(x, y)$ 的二阶偏导数。按照求导次序的不同, 二元函数 z 有以下四种不同的二阶偏导数, 并分别记作

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z_{xx} = f_{xx}(x, y), & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z_{xy} = f_{xy}(x, y) \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{yx} = f_{yx}(x, y), & \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) &= \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z_{yy} = f_{yy}(x, y) \end{aligned}$$

并称 f_{xy} 和 f_{yx} 为二阶混合偏导数。

例题 1.6 求二元函数 $z = x^y (x > 0)$ 的所有二阶偏导数。

解 由 $\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}$ 及 $\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x$, 再分别关于变量 x, y 求偏导数得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = y(y-1)x^{y-2} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = x^{y-1} + yx^{y-1} \ln x \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = yx^{y-1} \ln x + x^{y-1} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = x^y (\ln x)^2 \end{aligned}$$

类似地, 可定义 $n (n \geq 3)$ 阶偏导数。二阶及二阶以上的偏导数统称为**高阶偏导数**。下面给出一个重要命题, 其阐述了不同求导顺序下混合偏导数的关系。

命题 1.1 (混合偏导数的关系)

当 f_{xy} 和 f_{yx} 都在点 P 处连续时, 则在点 P 处有 $f_{xy} = f_{yx}$ 一定成立。

对于 n 元函数, 如果所有的 m 阶偏导数在点 P 处连续, 则在点 P 处的 m 阶偏导数与求导次序无关。

利用命题 1.1 可以求解一些多元函数的待定系数问题。

例题 1.7 已知 $(axy^3 - y^2 \cos x)dx + (1 + by \sin x + 3x^2 y^2)dy$ 是某个函数 $f(x, y)$ 的全微分, 求 a, b 的值。

解 根据题意可以列出全微分

$$df = f_x dx + f_y dy$$

计算一阶偏导数 $f_x = axy^3 - y^2 \cos x, f_y = 1 + by \sin x + 3x^2 y^2$ 。根据命题 1.1 可知函数在 (x, y) 连续, 因而二阶混合偏导数相同, 即列出等式

$$\begin{aligned} f_{xy} &= f_{yx} \\ 3axy^2 - 2y \cos x &= by \cos x + 6xy^2 \end{aligned}$$

对比系数解得 $a = 2, b = -2$ 。

笔记

高阶全微分(要求掌握二阶全微分)

当二元函数 $u = f(x, y)$ 在区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 内每一点均可微时, 则在 Ω 内 u 的全微分为(自行斟酌式1.26的由来)

$$du = \langle \nabla f, (\Delta x, \Delta y) \rangle = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \quad (1.26)$$

如果把 dx, dy 看作固定不变, 那么 du 就是 (x, y) 的函数。如果函数 du 仍在 Ω 内可微, 那么把这个函数 du 再求全微分, 其结果就称为 u 的二阶全微分并记作 $d^2u = d(du)$ 。

设 f 的各阶偏导数都存在且连续, 对 $du = f_x dx + f_y dy$ 再求全微分可得

$$\begin{aligned} d^2u &= d(du) = \frac{\partial}{\partial x}(f_x dx + f_y dy)dx + \frac{\partial}{\partial y}(f_x dx + f_y dy)dy \\ &= f_{xx}dx^2 + 2f_{xy}dxdy + f_{yy}dy^2 \end{aligned}$$

引进算符运算记号

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2}{\partial y^2}dy^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2$$

上式左端相当于将右端按二项式公式形式展开, 则二阶全微分也可简洁地写成

$$d^2u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 f \quad (1.27)$$

类似地可以定义

$$d^3u = d(d^2u), \quad d^n u = d(d^{n-1}u)$$

而且可以验证

$$d^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f \quad (1.28)$$

其中 $\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f$ 表示将算符 $\left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)$ 自乘 n 次后再作用到 f 上。

1.3.6 多元复合函数的偏导数和全微分

多元复合函数的偏导数遵循链式法则, 先给出下面的例子。

设 $u = u(x, y)$ 和 $v = v(x, y)$ 在 (x, y) 可微, 且 $z = f(u, v)$ 在对应 (u, v) 可微。则复合函数

$$z = f[y(x, y), v(x, y)]$$

可微, 其全微分形式为

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y}\right) dy \quad (1.29)$$

也可以据此写出 z 关于 x, y 的偏导数

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} \quad (1.31)$$

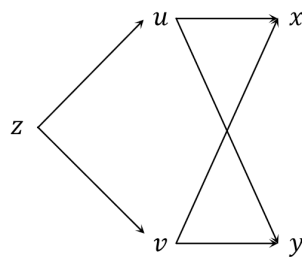


图 1.8: 复合函数链式法则 I

笔记 公式1.30和1.31式的结构有如下特征: 复合函数 f 含有自变量 x (或 y) 的中间变量有几个, 则 f 对自变量 x (或 y) 的偏导数公式中就有几项之和, 而且每一项的构成与一元函数的链式法则类似, 即“函数对中间变量的导数再乘中间变量对自变量的导数”。

从这个例子中可以归纳出多元函数偏导数的链式法则。

定理 1.6 (链式法则)

设有 m 元函数 $y = f(u_1, u_2, \dots, u_m)$ 及 n 元函数 $u_i = u_i(x_1, x_2, \dots, x_n) (i = 1, 2, \dots, m)$ 都可微, 则复合函数 $y = f(u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x))$ 也可微, 其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, 且有

$$dy = \frac{\partial y}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial y}{\partial x_2} dx_2 + \dots + \frac{\partial y}{\partial x_n} dx_n \quad (1.32)$$

其中

$$\frac{\partial y}{\partial x_j} = \frac{\partial y}{\partial u_1} \frac{\partial u_1}{\partial x_j} + \frac{\partial y}{\partial u_2} \frac{\partial u_2}{\partial x_j} + \dots + \frac{\partial y}{\partial u_m} \frac{\partial u_m}{\partial x_j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (1.33)$$

下面介绍两种特殊情况。

设 $z = f(u, v)$, $u = \varphi(x)$, $v = \psi(x)$ 均可微, 则复合函数 $z = f[\varphi(x), \psi(x)]$ 是 x 的一元函数, 根据链式法则有

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx} \quad (1.34)$$

它称为复合函数 z 对 x 的**全导数**。由于 $u = \varphi(x)$ 和 $v = \psi(x)$ 都是关于 x 的一元函数, 因此在链式法则中, 需要用符号 d 表示 u, v 对 x 的导数; 而 z 对 u, v 的偏导数需要用符号 ∂ 表示。

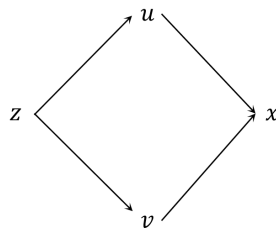


图 1.9: 复合函数链式法则 II (全导数法则)

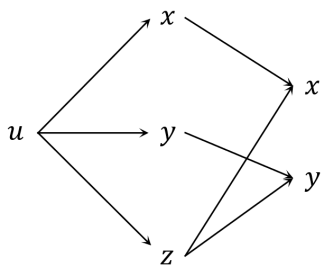


图 1.10: 复合函数链式法则 III

注 在求导公式中, 左端的 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 表示复合后的二元函数 u 对 x 的偏导数; 而右端的 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 表示复合前的三元函数 u 对其第一个变量 x 的偏导数, 记号 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 的含义不同, 不可混为一谈! 类似, $\frac{\partial u}{\partial y}$ 与 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 含义也不同。

下面介绍另一种复合函数中表示偏导数的方法。设 $z = f(u, x, y)$, 其中 f 具有对各变量的连续二阶偏导数, 且 $u = xe^y$, 现欲求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。根据函数的复合结构 (自己画个图) 及复合函数的链式法则得

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x} = f_1 e^y + f_2$$

其中规定 f_{ij} 表示 f 先对其第 i 个变量求导、再对其第 j 个变量求导的二阶偏导数; 当省略下标 j 时, 表示 f 对第 i 个变量求导。注意到 f_1 和 f_2 都是 u, x, y 的三元函数, 再由复合函数的链式法则得

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial f_1}{\partial y} e^y + f_1 e^y + \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ &= (f_{11} x e^y + f_{13}) e^y + f_1 e^y + f_{21} x e^y + f_{23} \end{aligned}$$

同样, 这里不可以把 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 等混为一谈。

例 1.8 设 $z = f(x + y, x - y, xy)$, 其中 f 具有二阶连续偏导数, 求 dz 以及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 。

解 根据链式法则先求 z 对 x, y 的偏导。

$$\frac{\partial z}{\partial x} = f_1 + f_2 + yf_3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = f_1 - f_2 + xf_3$$

因此 z 关于 x, y 的全微分表示为

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ &= (f_1 + f_2 + yf_3)dx + (f_1 - f_2 + xf_3)dy \end{aligned}$$

注意到 f_1, f_2, f_3 都是关于 x, y 的函数, 再次应用链式法则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= (f_{11} - f_{12} + xf_{13}) + (f_{21} - f_{22} + xf_{23}) + [f_3 + y(f_{31} - f_{32} + xf_{33})] \\ &= f_{11} + (x+y)f_{13} - f_{22} + (x-y)f_{23} + xyf_{33} + f_3 \end{aligned}$$

最后来介绍一阶全微分的形式不变性。

定理 1.7 (一阶全微分的形式不变性)

设有函数 $z = f(u, v)$ 与 $u = \varphi(x, y), v = \psi(x, y)$ 复合。若 φ, ψ 在 (x, y) 处可微, 且 f 在与 (x, y) 相应的 (u, v) 处可微, 则复合函数的全微分为

$$\begin{aligned} dz &= \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy \\ &= \frac{\partial z}{\partial u} du + \frac{\partial z}{\partial v} dv \end{aligned} \quad (1.36)$$

可以看出, 对于二元函数 $z = f(u, v)$ 来说, 无论 u, v 是自变量还是中间变量, 它的一阶全微分 (若存在的话) 均可写成 1.36 式的后半形式。这一性质在后续求隐函数偏导数中有重要作用。

性质 全微分的有理运算法则满足:

1. $d(u \pm v) = du \pm dv$
2. $d(uv) = vdu + u dv$
3. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{v^2}(vdu - u dv), \quad v \neq 0$

例题 1.9 设 $f(u, v)$ 可微, 求 $z = f\left(\frac{x}{y}, \frac{y}{x}\right)$ 的偏导数。

解 利用一阶全微分形式不变性得

$$\begin{aligned} dz &= f_1 d\left(\frac{x}{y}\right) + f_2 d\left(\frac{y}{x}\right) \\ &= f_1 \frac{ydx - xdy}{y^2} + f_2 \frac{xdy - ydx}{x^2} \\ &= \left(\frac{1}{y}f_1 - \frac{y}{x^2}f_2\right)dx + \left(-\frac{x}{y^2}f_1 + \frac{1}{x}f_2\right)dy \end{aligned}$$

从而有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{y}f_1 - \frac{y}{x^2}f_2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x}{y^2}f_1 + \frac{1}{x}f_2$$

1.3.7 隐函数微分法 (单个方程)

一般地, 设有方程

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = 0 \quad (1.37)$$

如果存在一个 n 元函数 $y = \varphi(\mathbf{x}), \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n$, 使得将 $y = \varphi(\mathbf{x})$ 代入 1.37 后下述恒等式

$$F(x_1, \dots, x_n, \varphi(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0 \quad (1.38)$$

恒成立, 则称 $y = \varphi(\mathbf{x})$ 是由方程 1.37 所确定的隐函数。上学期我们已经学会不显化隐函数而直接求导的方法, 现在进一步借助偏导数介绍一些性质。

定理 1.8 (隐函数存在定理 I)

如果二元函数 $F(x, y)$ 满足:

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. 在点 (x_0, y_0) 的某邻域中有连续的偏导数
3. $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

则方程 $F(x, y) = 0$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域中唯一确定了一个具有连续导数的函数 $y = f(x)$, 它满足 $y_0 = f(x_0)$ 及 $F(x, f(x)) \equiv 0$, 并且

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \quad (1.39)$$



隐函数的求导方法可以推广到多元函数。若一个三元方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定了一个二元函数 $z = f(x, y)$, 则将 $z = f(x, y)$ 代入原方程得

$$F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$$

应用链式法则, 将上式两端分别对 x 和 y 求导得

$$F_x + F_z \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad F_y + F_z \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

从而在 $F_z \neq 0$ 处有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \quad (1.40)$$

注 在实际应用中, 必须构造一个恒为 0 的函数 F 才能应用定理 1.8。

例题 1.10 设 $\varphi(u, v)$ 具有连续的一阶偏导数, 方程 $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$ 确定了函数 $z = z(x, y)$, 求 $az_x + bz_y$, 其中 a, b, c 均为常数。

解 这里提供两种解法。

- 解法一 (隐函数求导法) 令 $F(x, y, z) = \varphi(cx - az, cy - bz)$, 显然复合函数 $F(x, y, z)$ 有对 x, y, z 的连续一阶偏导数。由隐函数求导公式 1.40 得

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z} = -\frac{c\varphi_1}{-a\varphi_1 - b\varphi_2} = \frac{c\varphi_1}{a\varphi_1 + b\varphi_2}$$

$$z_y = -\frac{F_y}{F_z} = -\frac{c\varphi_2}{-a\varphi_1 - b\varphi_2} = \frac{c\varphi_2}{a\varphi_1 + b\varphi_2}$$

故代入有 $az_x + bz_y = c$ 。

- 解法二 (全微分法) 利用一阶全微分形式不变性, 对给定方程两端求全微分得

$$\varphi_1(cdx - adz) + \varphi_2(cdy - bdz) = 0$$

分离出 dz , 可以解得

$$dz = \frac{c\varphi_1 dx + c\varphi_2 dy}{a\varphi_1 + b\varphi_2}$$

所以, 对比全微分中 dx, dy 的系数有

$$z_x = \frac{c\varphi_1}{a\varphi_1 + b\varphi_2}, \quad z_y = \frac{c\varphi_2}{a\varphi_1 + b\varphi_2}$$

从而得 $az_x + bz_y = c$ 。

诸如此类的题目均可以按照上例的两种方法求解。而对于偏导数求解复杂的情况而言更推荐第二种方法。

1.4 多元函数的 Taylor 展开和极值问题 (★★★)

1.4.1 多元函数的 Taylor 公式

一元函数的 Taylor 公式在上学期已经介绍过, 本小节来简要介绍以二元函数为主的多元函数 Taylor 公式。

定理 1.9 (二元函数带 Lagrange 余项的 Taylor 公式)

设二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域 $U(x_0, y_0)$ 内有连续的二阶偏导数, 且 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(x_0, y_0)$, 则存在 $\theta \in (0, 1)$ 使得

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + R_1 \quad (1.41)$$

其中

$$R_1 = \frac{1}{2!}(f_{xx}\Delta x^2 + 2f_{xy}\Delta x\Delta y + f_{yy}\Delta y^2) \Big|_{(x_0+\theta\Delta x, y_0+\theta\Delta y)} \quad (1.42)$$

 **笔记** 令 $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)^T$, $\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x} = (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)^T$ 。定义函数 f 在 $\mathbf{x}_0 + \theta\Delta \mathbf{x}$ 处的 Hesse 矩阵

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} \Big|_{\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}} \quad (1.43)$$

这样, 我们就可把定理 1.9 的 Taylor 公式写成如下的矩阵形式。

$$f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \Delta \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2!}(\Delta \mathbf{x})^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0 + \theta\Delta \mathbf{x})\Delta \mathbf{x} \quad (1.44)$$

由于 $\mathbf{H}_f$ 的元素由 f 的二阶偏导数构成, 而 f 的所有二阶偏导数均连续, 可以得到 $f(x)$ 在 x_0 处带有 Peano 余项的二阶 Taylor 公式。

$$f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \Delta \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2!}(\Delta \mathbf{x})^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)\Delta \mathbf{x} + o(\|\Delta \mathbf{x}\|^2) \quad (1.45)$$

为了进一步介绍 n 元函数的 Taylor 公式, 做以下记号规定。设 $f(\mathbf{x})$ 是定义在区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ 内的 n 元函数, 若 f 在 Ω 内连续, 则称 f 是 Ω 上的 $C^{(0)}$ 类函数, 记为 $f \in C^{(0)}(\Omega)$, 或 $C(\Omega)$; 若 f 在 Ω 内具有连续的 m ($m \geq 1$, 为正整数) 阶偏导数, 则称 f 是 Ω 上的 $C^{(m)}$ 类函数, 记作 $f \in C^{(m)}(\Omega)$ 。

定理 1.10 (n 元函数带 Lagrange 余项的 Taylor 公式)

设 n 元函数 $f \in C^{(2)}(U(\mathbf{x}_0))$, $\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$, 其中 $\mathbf{x}_0 = (x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,n})^T \in \mathbb{R}^n$, $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n)^T$ 。则存在 $\theta \in (0, 1)$, 使得

$$f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial f(\mathbf{x}_0)}{\partial x_i} \Delta x_i + R_1$$

其中

$$R_1 = \frac{1}{2!} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}_0 + \theta\Delta \mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j} \Delta x_i \Delta x_j$$

称为 Lagrange 余项的一阶形式。

上述定理也可写成如下的矩阵形式:

$$f(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0) + \langle \nabla f(\mathbf{x}_0), \Delta \mathbf{x} \rangle + \frac{1}{2!}(\Delta \mathbf{x})^T \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0 + \theta\Delta \mathbf{x})\Delta \mathbf{x} \quad (1.46)$$

其中实对称矩阵 (下式) 是函数 f 在点 $\mathbf{x}_0 + \theta\Delta \mathbf{x}$ 的 Hesse 矩阵。

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0 + \theta\Delta \mathbf{x}) = \begin{bmatrix} f_{x_1 x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_1 x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{x_1 x_n}(\mathbf{x}) \\ f_{x_2 x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_2 x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{x_2 x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_n x_1}(\mathbf{x}) & f_{x_n x_2}(\mathbf{x}) & \cdots & f_{x_n x_n}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}_{\mathbf{x}_0 + \theta\Delta \mathbf{x}} \quad (1.47)$$

1.4.2 无约束极值与最值

多元函数往往需要讨论局部的最大值(最小值)情况。类比于一元函数的极值,对多元函数的无约束极值做如下表述。设 $f: U(\mathbf{x}_0) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $\forall \mathbf{x} \in U(\mathbf{x}_0)$, 恒成立不等式

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0) \quad (f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0))$$

则称 f 在点 $\mathbf{x}_0$ 取得无约束极大值(无约束极小值) $f(\mathbf{x}_0)$, 简称为极大值(极小值) $f(\mathbf{x}_0)$; 点 $\mathbf{x}_0$ 称为 f 的极大值点(极小值点)。极大值与极小值统称为极值, 极大值点与极小值点统称为极值点。为了求得多元函数的极值点, 分别介绍下面取极值的必要条件和充分条件。

定理 1.11 (极值的必要条件)

设 n 元函数 f 在点 $\mathbf{x}_0$ 可微, 且 $\mathbf{x}_0$ 为 f 的极值点, 则必有 $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ 。

注 我们称满足 $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ 的点 $\mathbf{x}_0$ 为 f 的驻点。定理 1.11 也就可以说成: 可微函数 f 的极值点必是 f 的驻点, 但是驻点未必都是极值点。

定理 1.12 (极值的充分条件)

设 n 元函数 $f \in C^{(2)}(U(\mathbf{x}_0))$, $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$, $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 为 f 在点 $\mathbf{x}_0$ 的 Hesse 矩阵。若 $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$ 正定(负定), 则 $f(\mathbf{x}_0)$ 为 f 的极小值(极大值)。

笔记 考虑到读者对线性代数的知识记忆 ≈ 0 (笑), 下面用另一种形式叙述该定理。对于二元函数 $z = f(x, y)$, 若点 $P_0(x_0, y_0)$ 为 f 的驻点, 记

$$f_{xx}(P_0) = A, \quad f_{xy}(P_0) = B, \quad f_{yy}(P_0) = C$$

则 f 在点 P_0 的 Hesse 矩阵为

$$\mathbf{H}_f(P_0) = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

于是根据矩阵正定、负定和不定的判定方法, 有:

1. 若 $A > 0, AC - B^2 > 0$, 则 $\mathbf{H}_f(P_0)$ 正定, 故 $f(P_0)$ 为极小值;
2. 若 $A < 0, AC - B^2 > 0$, 则 $\mathbf{H}_f(P_0)$ 负定, 故 $f(P_0)$ 为极大值;
3. 若 $AC - B^2 < 0$, 则 $\mathbf{H}_f(P_0)$ 不定, 故 $f(P_0)$ 不是极值。
4. 当 $AC - B^2 = 0$ 时, 称为临界情况。此时无法确定点 P_0 是不是 f 的极值点。

例题 1.11 求二元函数 $f(x, y) = x^2(2 + y^2) + y \ln y$ 的极值。

解 求一阶偏导数有:

$$f_x(x, y) = 2x(2 + y^2), \quad f_y(x, y) = 2x^2y + \ln y + 1$$

令 $\begin{cases} f'_x(x, y) = 0 \\ f'_y(x, y) = 0 \end{cases}$, 解得唯一驻点 $\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 。由于

$$A = f_{xx}\left(0, \frac{1}{e}\right) = 2(2 + y^2)\Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 2\left(2 + \frac{1}{e^2}\right)$$

$$B = f_{xy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = 4xy\Big|_{(0, \frac{1}{e})} = 0$$

$$C = f_{yy}\left(0, \frac{1}{e}\right) = \left(2x^2 + \frac{1}{y}\right)\Big|_{(0, \frac{1}{e})} = e$$

所以 $AC - B^2 = 2e\left(2 + \frac{1}{e^2}\right) > 0$, 且 $A > 0$, 从而 $f\left(0, \frac{1}{e}\right)$ 是 $f(x, y)$ 的极小值, 极小值为 $f\left(0, \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}$ 。

前面已经介绍, 多元函数在有界闭区域一定能够取到最大值和最小值。此时只需要对比该界内所有的极值并取最大的 (最小的) 那个就是最值。

例题 1.12 已知函数 $z = f(x, y)$ 的全微分 $dz = 2x dx - 2y dy$, 并且 $f(1, 1) = 2$, 求 $f(x, y)$ 在下列椭圆域 $D = \left\{ (x, y) \mid x^2 + \frac{y^2}{4} \leq 1 \right\}$ 上的最大值和最小值。

解 由全微分式 $dz = 2x dx - 2y dy$ 知

$$z = f(x, y) = x^2 - y^2 + C$$

再由 $f(1, 1) = 2$, 得 $C = 2$, 故 $z = f(x, y) = x^2 - y^2 + 2$ 。令 $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -2y = 0$, 解得驻点 $(0, 0)$, 且 $f(0, 0) = 2$ 。下面考虑边界上的点。在椭圆 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$ 上, 代入原函数解得

$$z = 5x^2 - 2, \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

其最大值为 $z|_{x=\pm 1} = 3$, 最小值为 $z|_{x=0} = -2$ 。再与 $f(0, 0) = 2$ 比较, 可知 $f(x, y)$ 在椭圆域 D 上的最大值为 3, 最小值为 -2。

1.4.3 有约束极值与 Lagrange 乘数法

有些时候, 目标函数的自变量除了需要满足定义域要求外, 还会被进一步限制。这种情况下求出的函数极值被称为有约束极值。有约束极值的一种常见形式是在条件组

$$g_k(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \quad (k = 1, \dots, m, m < n)$$

的限制下, 求目标函数 $u = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的极值。下面介绍大名鼎鼎的 **Lagrange 乘数法**。

笔记 设函数 $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 被条件 $g_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 (i = 1, 2, \dots, m)$ 所约束。构造 Lagrange 函数

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^m \lambda_i g_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

那么条件极值点就在方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x_k} = \frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^m \lambda_i \frac{\partial g_i}{\partial x_k} = 0, \\ g_l(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \quad (k = 1, 2, \dots, n; l = 1, 2, \dots, m)$$

的所有解 $(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ 所对应的点 $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 中。

例题 1.13 在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点, 使其到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离最短

解 设 $M(x_0, y_0)$ 是椭圆上一点, 点 M 到直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离为 $d = \frac{|2x_0 + 3y_0 - 6|}{\sqrt{13}}$

作目标函数 $D = (\sqrt{13}d)^2 = (2x + 3y - 6)^2$, 且限制条件 $g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0$, 则有 Lagrange 函数

$$L = (2x + 3y - 6)^2 + \lambda(x^2 + 4y^2 - 4)$$

因此列出极值点满足的条件式

$$\begin{cases} L_x = 4(2x + 3y - 6) + 2x\lambda = 0 \\ L_y = 6(2x + 3y - 6) + 8y\lambda = 0 \\ g(x, y) = x^2 + 4y^2 - 4 = 0 \end{cases}$$

解得驻点 $\left(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)$ 和 $\left(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right)$, 因为直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 不过第三象限所以舍去点 $\left(-\frac{8}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ 。故当 M 在

$\left(\frac{8}{5}, \frac{3}{5}\right)$ 时距直线 $2x + 3y - 6 = 0$ 的距离最短且最短距离为 $\frac{\sqrt{13}}{13}$ 。

注 Lagrange 乘数法得到的点都是 f 的驻点, 根据定理 1.11 知这仅仅是一个必要条件, 因此还需要对多解的情况进行一一验算和排除。当得到的结果唯一时, 如果题目中强调了极值 (最值) 存在, 一般能够直接确定该点就是极值点 (最值点)。

1.5 多元向量值函数的导数和微分 (★★)

1.5.1 一元向量值函数

设有一元向量值函数 $f: U(x_0) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, 其中

$$f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{bmatrix}$$

而 $f_i(x)$ 均为一元数量值函数。下面, 将一元数量值函数的导数和微分概念推广到一元向量值函数。

定义 1.16 (一元向量值函数的导数)

设 $f: U(x_0) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 若

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

存在, 则称 f 在 x_0 处可导, 并称此极限值为 f 在 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$, 或 $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$, 或 $Df(x_0)$, 即

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1.48)$$

 **笔记** 不难证明: 向量值函数 $f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ 在 x_0 处可导的充要条件是 f 的每个分量 f_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 都在 x_0 处可导, 并且当 f 在 x_0 处可导时有

$$f'(x_0) = (f'_1(x_0), f'_2(x_0), \dots, f'_m(x_0))^T \quad (1.49)$$

如果 f 在区间 I 中的每一点都可导, 则称 f 在 I 上可导, 此时称 $f'(x)$ 为 f 的导函数。同一元数量值函数一样, 我们定义 f 在 x_0 处的二阶导数 (记为 $\left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0}$, 或 $f''(x_0)$, 或 $D^2 f(x_0)$) 为

$$\left. \frac{d^2 f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} = \frac{d}{dx} \left[\left. \frac{df(x)}{dx} \right] \right|_{x=x_0}$$

由此定义亦有

$$f''(x_0) = (f''_1(x_0), f''_2(x_0), \dots, f''_m(x_0))^T$$

类似可定义 f 在 x_0 处的 n 阶导数为

$$D^n f(x_0) = D(D^{n-1} f(x)) \big|_{x=x_0}$$

例题 1.14 设有向量值函数 $f(x) = \begin{bmatrix} \sin 2x \\ \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \\ \arctan x^2 \end{bmatrix}$, 试求 $f''(0)$ 的值。

解 依次对每个分量函数求导得到

$$f'(x) = \begin{bmatrix} 2 \cos 2x \\ \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \\ \frac{2x}{1+x^4} \end{bmatrix}, \quad f''(x) = \begin{bmatrix} -4 \sin 2x \\ -\frac{x}{(1+x^2)^{3/2}} \\ \frac{2(1-3x^4)}{(1+x^4)^2} \end{bmatrix}$$

$$\text{故代入 } x=0 \text{ 有 } f''(0) = f''(x) \big|_{x=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

接下来对一元向量值函数的微分作定义。

定义 1.17 (一元向量值函数的微分)

设 $f: U(x_0) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是一个一元向量值函数, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$ 。若存在一个与 Δx 无关的 m 维列向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)^\top$ 使得

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \mathbf{a}\Delta x + o(\rho) \quad (1.50)$$

其中 $\rho = |\Delta x|$, $o(\rho)$ 是关于 ρ 的高阶无穷小向量, 则称 f 在 x_0 处可微, 并称 $\mathbf{a}\Delta x$ 为 f 在 x_0 处的微分, 记作 $df(x_0) = \mathbf{a}\Delta x$ 。



向量值函数 $f: U(x_0) \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ 在 x_0 处可微的充要条件为 f 的每个分量 f_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 都在 x_0 处可微, 且当 f 在 x_0 处可微时, 有

$$df(x_0) = f'(x_0)\Delta x \quad (1.51)$$

1.5.2 二元向量值函数

设二元向量值函数 $f: U((x_{01}, x_{02})) \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^m$, 如果 f 的每个分量 f_i (数量值函数) 都在 $\mathbf{x}_0 = (x_{01}, x_{02})^\top \in \mathbb{R}^2$ 处可微, 则称 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处可微, 也称 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处可导, 并定义

$$\begin{aligned} df(\mathbf{x}_0) &= \begin{bmatrix} df_1(\mathbf{x}_0) \\ df_2(\mathbf{x}_0) \\ \vdots \\ df_m(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} dx_2 \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} dx_2 \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} dx_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

为 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处的微分, 而定义 $m \times 2$ 矩阵

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\mathbf{x}_0)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (1.52)$$

为 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处的导数, 记为 $Df(\mathbf{x}_0)$, 即 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处的导数为

$$Df(\mathbf{x}_0) = (a_{ij})_{m \times 2} \quad (1.53)$$

其中 $a_{ij} = \frac{\partial f_i(\mathbf{x}_0)}{\partial x_j}$ ($i = 1, \dots, m; j = 1, 2$)。于是 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处的微分可表示为

$$df(\mathbf{x}_0)^\top = Df(\mathbf{x}_0) d\mathbf{x} \quad (d\mathbf{x} = (dx_1, dx_2)^\top). \quad (1.54)$$

1.52式中的矩阵通常称为 f 在 $\mathbf{x}_0$ 处的 **Jacobi 矩阵**。因此, 若向量值函数 f 在 $\mathbf{x}_0$ 可导, 则它在 $\mathbf{x}_0$ 处的导数就是它在该点处的 Jacobi 矩阵。

1.5.3 n 元向量值函数

类似于上述对二元向量值函数的导数微分的讨论, 可以正式做出如下定义。

定义 1.18 (n 元向量值函数的导数 (Jacobi 矩阵) 和微分)

一般地, 对于 n 元向量值函数 $f: U(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, 若 f 的每个分量 f_i ($i = 1, 2, \dots, m$) 都在 x_0 处可微, 则定义 f 在 x_0 处的导数 (Jacobi 矩阵) 为

$$Df(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla f_1(x_0) \\ \nabla f_2(x_0) \\ \vdots \\ \nabla f_m(x_0) \end{bmatrix} \quad (1.55)$$

其中 $\nabla f_i(x_0)$ 为 n 元数量值函数 f_i 在点 x_0 处的梯度向量, 并定义 f 在 x_0 处的微分为

$$\begin{aligned} df(x_0) &= \begin{bmatrix} df_1(x_0) \\ df_2(x_0) \\ \vdots \\ df_m(x_0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1(x_0)}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_2(x_0)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_m(x_0)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx_1 \\ dx_2 \\ \vdots \\ dx_n \end{bmatrix} \\ &= Df(x_0) dx, \quad (dx = (dx_1, dx_2, \dots, dx_n)^T) \end{aligned} \quad (1.56)$$

当 $m = n$ 时, Jacobi 矩阵是一个方阵, 该方阵的行列式称为 f 在 x_0 处的 **Jacobi 行列式**, 习惯上记

$$J = J_f(x_0) = \left. \frac{\partial (f_1, f_2, \dots, f_n)}{\partial (x_1, x_2, \dots, x_n)} \right|_{x_0} \quad (1.57)$$

例如, 设

$$\begin{cases} x(\rho, \theta) = \rho \cos \theta \\ y(\rho, \theta) = \rho \sin \theta \end{cases}$$

则 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta \\ \sin \theta & \rho \cos \theta \end{vmatrix} = \rho(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \rho$$

最后来定义 n 元向量值函数的偏导数。

定义 1.19 (n 元向量值函数的偏导数)

设 $f: U(x_0) \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ 是一个 n ($n \geq 2$) 元向量值函数, 若极限

$$\lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x_i e_i) - f(x_0)}{\Delta x_i} \quad (1.58)$$

存在, 则称此极限为 f 在 x_0 处关于 x_i (x 的第 i 个分量) 的偏导数, 记作 $\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}$, 或 $f_{x_i}(x_0)$, 其中

$$e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

是第 i 个分量为 1, 其余分量全为零的 n 维向量。

性质 设向量值函数 f 与 g 都在点 x 处可微, u 是在 x 处可微的数量值函数, 则有

1. $f \pm g$ 在 x 处可微, 并且其导数为

$$D(f \pm g)(x) = Df(x) + Dg(x) \quad (1.59)$$

2. $\langle f, g \rangle$ 在 x 处可微, 并且其导数为

$$D\langle f, g \rangle(x) = (f(x))^T Dg(x) + (g(x))^T Df(x) \quad (1.60)$$

3. uf 在 x 处可微, 并且其导数为

$$D(uf)(x) = uDf(x) + f(x)Du(x) \quad (1.61)$$

4. 若 $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, 则向量积 $f \times g$ 在 x 处可微, 并且其导数为

$$D(f \times g)(x) = Df(x) \times g(x) + f(x) \times Dg(x) \quad (1.62)$$

定理 1.13 (向量值函数的导数链式法则)

设向量值函数 $u = g = (g_1, g_2, \dots, g_p)^T$ 在 $x_0 \in \mathbb{R}^n$ 处可微, 向量值函数 $w = f = (f_1, f_2, \dots, f_m)^T$ 在对应的点 $u_0 = g(x_0) \in \mathbb{R}^p$ 处可微, 则复合函数 $w = f \circ g$ 在点 x_0 处可微, 并且

$$Dw(x_0) = Df(u_0)|_{u=g(x_0)} Dg(x_0) = Df(g(x_0))Dg(x_0) \quad (1.63)$$



笔记 已知向量值函数 f 与 g 分别在点 u_0 与 x_0 处可微, 由向量值函数可微的定义, 知它们的各个分量(数量值函数)分别在 u_0 与 x_0 处必可微. 根据多元数量值函数复合函数的可微性定理及其链式法则, 复合向量值函数 $w = f \circ g$ 的各个分量 w_i 在 x_0 处可微, 并且有

$$\left. \frac{\partial w_i}{\partial x_j} \right|_{x=x_0} = \sum_{k=1}^p \left(\left. \frac{\partial f_i}{\partial u_k} \right|_{u=u_0} \left. \frac{\partial g_k}{\partial x_j} \right|_{x=x_0} \right), \quad (i=1, 2, \dots, n, j=1, 2, \dots, m) \quad (1.64)$$

例题 1.15 设有向量值函数

$$w = f(u) = \begin{bmatrix} u_1^2 - u_2 u_3 \\ u_1 u_3 - u_2^2 \end{bmatrix}, \quad u = g(x) = \begin{bmatrix} x_1 \cos x_2 \\ x_2 \sin x_1 \\ x_1^2 e^{x_2} \end{bmatrix}$$

其中 $x = (x_1, x_2)^T$, $u = (u_1, u_2, u_3)^T$, $w = (w_1, w_2)^T$, 试求

$$D(f \circ g)|_{(1,0)^T}, \quad \left. \frac{\partial w}{\partial x_1} \right|_{(1,0)^T} \quad \text{及} \quad \left. \frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right|_{(1,0)^T}$$

解 由链式法则有

$$D(f \circ g)(x) = \begin{bmatrix} 2u_1 & -u_3 & -u_2 \\ u_3 & -2u_2 & u_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos x_2 & -x_1 \sin x_2 \\ x_2 \cos x_1 & \sin x_1 \\ 2x_1 e^{x_2} & x_1^2 e^{x_2} \end{bmatrix}$$

因为当 $(x_1, x_2)^T = (1, 0)^T$ 时, $(u_1, u_2, u_3)^T = (1, 0, 1)^T$, 故

$$D(f \circ g)|_{(1,0)^T} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -\sin 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\left. \frac{\partial w_1}{\partial x_1} \right|_{(1,0)^T} = 2, \quad \left. \frac{\partial(w_1, w_2)}{\partial(x_1, x_2)} \right|_{(1,0)^T} = \begin{bmatrix} 2 & -\sin 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = 2 + 3 \sin 1$$

1.5.4 隐函数微分法(方程组)

考虑由 m 个 $m+n$ 元方程组成的方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ F_2(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \\ \vdots \\ F_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) = 0 \end{cases} \quad (1.65)$$

对于给定的 $x_1, \dots, x_n$, 上式就是包含 m 个方程, $m+n$ 个变量的方程组, 如果存在定义在点集 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ 上的

m 个函数

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad (i = 1, 2, \dots, m) \quad (1.66)$$

使得将其代入方程组 1.65 后它变成 m 个恒等式, 那么就称这 m 个函数是它的解, 或称为由该方程组所确定的隐函数。下面, 我们简单的叙述有关方程组所确定的隐函数存在定理。

定理 1.14 (隐函数存在定理 II)

设有函数方程组

$$\begin{cases} F_1(x, y, u, v) = 0 \\ F_2(x, y, u, v) = 0 \end{cases} \quad (1.67)$$

如果函数 F_1, F_2 满足

1. $F_i \in C^{(1)}(U(x_0, y_0, u_0, v_0)) (i = 1, 2)$
2. $F_i(x_0, y_0, u_0, v_0) = 0 (i = 1, 2)$
3. Jacobi 行列式

$$J = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)} \bigg|_{(x_0, y_0, u_0, v_0)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} \bigg|_{(x_0, y_0, u_0, v_0)} \neq 0 \quad (1.68)$$

则在点 $(x_0, y_0, u_0, v_0) \in \mathbb{R}^4$ 的某邻域 $U((x_0, y_0, u_0, v_0))$ 内由方程组 1.67 唯一确定了两个单值且有连续偏导数的二元函数

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

它满足 $u_0 = u(x_0, y_0)$, $v_0 = v(x_0, y_0)$, 以及

$$F_i(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0, \quad (i = 1, 2; (x, y) \in U((x_0, y_0))) \quad (1.69)$$

注 在方程组 1.67 中, 一般将 u, v 看成关于 x, y 的隐函数。

这个定理主要用于保证隐函数存在, 下面在已知隐函数存在的前提下推导 u, v 关于 x, y 的偏导数。对 1.69 式两端对 x 求导, 得

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

这是一个以 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}$ 为未知量的线性代数方程组, 下面使用线性代数中的 Cramer 法则求解。因系数行列式

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, v)}$$

在点 (x_0, y_0, u_0, v_0) 处不等于 0, 于是利用 Cramer 法则就可解得

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} \bigg|_{(x_0, y_0, u_0, v_0)} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(x, v)} \bigg|_{(x_0, y_0, u_0, v_0)} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \bigg|_{(x_0, y_0, u_0, v_0)} = -\frac{1}{J} \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, x)} \bigg|_{(x_0, y_0, u_0, v_0)} \end{cases} \quad (1.70)$$

类似的可以得到

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0, u_0, v_0)} = -\frac{1}{J} \left. \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(y, v)} \right|_{(x_0, y_0, u_0, v_0)} \\ \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{(x_0, y_0, u_0, v_0)} = -\frac{1}{J} \left. \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(u, y)} \right|_{(x_0, y_0, u_0, v_0)} \end{cases} \quad (1.71)$$

 **笔记** 如果想要记住这四个偏导数的固定公式, 只需要记住固定的 $-\frac{1}{J}$, 后面一项遵循“分母替分子”的原则, 如求 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 只需要在后一项中把 x 替换 u 的位置。当然, 实际考察中可能会发生题型变化, 此时可以根据 Cramer 法则自行推导。读者也可以参考下题的做法。

例题 1.16 设变元 x, y, z 与变元 r, θ, φ 之间由下列关系联系

$$\begin{cases} x = r \cdot \cos \theta \cos \varphi \\ y = r \cdot \sin \theta \cos \varphi \\ z = r \cdot \sin \varphi \end{cases}$$

其中 $0 < r < +\infty, -\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, 求 r, θ, φ 对 x, y, z 的偏导数。

解 方程组化为

$$\begin{cases} F(x, y, z, r, \theta, \varphi) = r \cdot \cos \theta \cos \varphi - x = 0 \\ G(x, y, z, r, \theta, \varphi) = r \cdot \sin \theta \cos \varphi - y = 0 \\ H(x, y, z, r, \theta, \varphi) = r \cdot \sin \varphi - z = 0 \end{cases} \quad (1.72)$$

于是有 Jacobi 行列式

$$J = \frac{\partial(F, G, H)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi & 0 & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r^2 \cos \varphi > 0$$

因此 r, θ, φ 也确定为 x, y, z 的函数。对方程组 1.72 两端求全微分有

$$\begin{cases} dx = \cos \theta \cos \varphi dr - r \sin \theta \cos \varphi d\theta - r \cos \theta \sin \varphi d\varphi \\ dy = \sin \theta \cos \varphi dr + r \cos \theta \cos \varphi d\theta - r \sin \theta \sin \varphi d\varphi \\ dz = \sin \varphi dr + r \cos \varphi d\varphi \end{cases}$$

解关于 $dr, d\theta, d\varphi$ 的方程组, 由 Cramer 法则得到

$$\begin{cases} dr = \frac{\begin{vmatrix} dx & -r \sin \theta \cos \varphi & -r \cos \theta \sin \varphi \\ dy & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ dz & 0 & r \cos \varphi \end{vmatrix}}{J} \\ d\theta = \frac{\begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & dx & -r \cos \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi & dy & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \varphi & dz & r \cos \varphi \end{vmatrix}}{J} \\ d\varphi = \frac{\begin{vmatrix} \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \cos \varphi & dx \\ \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & dy \\ \sin \varphi & 0 & dz \end{vmatrix}}{J} \end{cases}$$

以 dr 为例, 展开得到

$$dr = \frac{r^2 \cos \theta \cos^2 \varphi}{J} dx + \frac{r^2 \sin \theta \cos^2 \varphi}{J} dy + \frac{r^2 \sin \varphi \cos \varphi}{J} dz$$

将 $J = r^2 \cos \varphi$ 代入, 并对照这些变量对应的全微分公式, 就可以得到

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \cos \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \sin \theta \cos \varphi, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \sin \varphi$$

类似的可以得到

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{\sin \theta}{r \cos \varphi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{r \cos \varphi}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{\cos \theta \sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\sin \theta \sin \varphi}{r}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\cos \varphi}{r}$$

由方程组确定的隐函数可以看成不同变量之间的变换, 因此有如下定理。

定理 1.15 (隐函数反变换定理)

设函数 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 在点 (u, v) 的某一邻域内有连续的偏导数, 且 $J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \neq 0$, 则方程组

$$\begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \end{cases} \quad (1.73)$$

在点 (x, y, u, v) 的某一邻域内唯一确定一组单值连续且有连续偏导数的反函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, 并且反函数 $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ 对 x, y 的偏导数满足:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial v}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial v}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{J} \frac{\partial x}{\partial u} \quad (1.74)$$

以及有恒等式

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \cdot \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = 1 \quad (1.75)$$



注 这里先指出, 式 1.75 在多元积分的变量替换中有重要意义, 读者不可把此式子理解成“分母与分子约分”的意思! (否则明年菲尔兹奖真得请你来了 hhh)

例题 1.17 已知极坐标变换 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$, 求反变换中 r, θ 对 x, y 的偏导数。

解 计算 Jacobi 行列式

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

根据定理 1.15 有

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{1}{r} r \cos \theta = \cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{1}{J} \frac{\partial y}{\partial r} = -\frac{1}{r} \sin \theta = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

类似的有 $\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}$ 。

1.6 多元函数微分学的几何应用 (★★★)

1.6.1 空间曲线的切线和法平面

对于一般的空间曲线 Γ , 也可看作是从区间 $[\alpha, \beta]$ 到 $\mathbb{R}^3$ 的一个连续映射 $\mathbf{r}$ 的像 $\{\mathbf{r}(t) \mid \alpha \leq t \leq \beta\}$, $\mathbf{r}(t)$ 就是向径 $\overrightarrow{OP}$. 当 t 在区间 $[\alpha, \beta]$ 上变化时, 向径 $\overrightarrow{OP}$ 端点 P 的轨迹就是曲线 Γ , 它的方程可表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (1.76)$$

或者

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (1.77)$$

称上述两式为空间曲线 Γ 的参数方程。

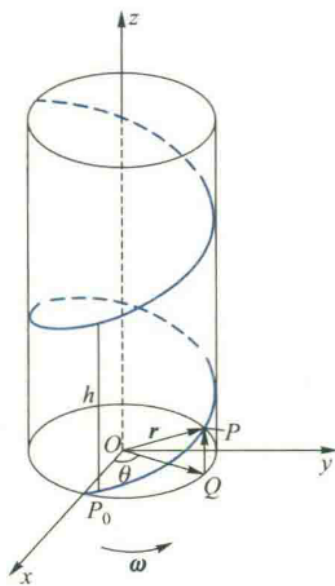


图 1.11: 螺旋线

在机械工程中常常遇到一种空间曲线, 称为螺旋线, 其形成规律是: 动点 P 沿半径为 a 的圆周做匀速转动, 而这圆周所在的平面又在空间做等速平移, 移动的方向与圆周所在平面垂直。右图展现了螺旋线的形成过程。

螺旋线的参数方程如下

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = vt, \quad t \in [0, +\infty)$$

写成向量形式也就是

$$\mathbf{r} = (a \cos \omega t, a \sin \omega t, vt), \quad t \in [0, +\infty) \quad (1.78)$$

如果取 $\theta = \omega t$ 作参变量, 便有

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad z = k\theta, \quad \theta \in [0, +\infty) \quad (1.79)$$

其中 $k = \frac{v}{\omega}$ 。可见因参变量的不同选择, 曲线可以有不同的参数方程。

笔记 设空间曲线 Γ 的方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), 如果向量值函数 $\mathbf{r}(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 则称 Γ 为连续曲线; 如果 Γ 为连续曲线, 且 $\forall t_1, t_2 \in (\alpha, \beta), t_1 \neq t_2$, 均有 $\mathbf{r}(t_1) \neq \mathbf{r}(t_2)$, 即在 (α, β) 上 $\mathbf{r}$ 为单射, 则称 Γ 为简单曲线。

容易看出, 简单曲线就是自身不相交连续曲线。如果 Γ 为简单曲线, 且 $\mathbf{r}(\alpha) = \mathbf{r}(\beta)$, 则称 Γ 为简单闭曲线。对于选定了参数 t 的曲线 Γ , 我们规定 t 增大的方向为 Γ 的正向(自然地, t 减小的方向, 称为 Γ 的负向)。例如, 螺旋线 $\mathbf{r} = (a \cos \theta, a \sin \theta, k\theta)$ ($k > 0$) 的正向为上升的方向。对于规定了正向的曲线, 称其为有向曲线(以下讨论的曲线均指有向曲线)。

下面来介绍空间简单曲线在某点的切线。

定理 1.16 (空间曲线在某点的切线)

对于空间简单曲线 $\Gamma: \mathbf{r}(t)$, 设 $\mathbf{r}(t_0)$ 是曲线 Γ 上点 P_0 的向径, 则 $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ 是 Γ 在点 P_0 的切向量, 曲线 Γ 在 P_0 ($\mathbf{r}(t_0)$) 处切线的向量方程写为

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}(t_0) + t\dot{\mathbf{r}}(t_0) \quad (1.80)$$

其中 $\mathbf{p} = (x, y, z)$ 为切线上动点 $P(x, y, z)$ 的向径, $t \in \mathbb{R}$ 为参数。消去参数 t , 即得该切线的对称式方程

$$\frac{x - x(t_0)}{\dot{x}(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{\dot{y}(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{\dot{z}(t_0)} \quad (1.81)$$

笔记 当 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 可导, 且 $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) 时, 曲线 Γ 上各点处都存在切线。进一步, 如果 $\dot{\mathbf{r}}(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 则切线方向连续变化。称切线方向连续变化的曲线为光滑曲线。因此当函数 $\mathbf{r}(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的导数且 $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) 时, 曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) 为光滑曲线。

如果曲线 Γ 不是光滑曲线, 但将 Γ 分成若干段后, 每段都是光滑曲线, 则称 Γ 为分段光滑曲线。

过曲线 Γ 上点 P_0 且与点 P_0 处的切线垂直的任一直线称为此曲线 Γ 在 P_0 处的法线, 这些法线显然位于同一平面内, 此平面称为 Γ 在点 P_0 的法平面。显然 $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ 是法平面的一个法线向量, 于是有下述定理。

定理 1.17 (空间曲线在某点的法平面)

空间简单曲线 $\Gamma: \mathbf{r}(t)$ 在点 $P_0(\mathbf{r}(t_0))$ 的法平面的方程是

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) \cdot [\mathbf{p} - \mathbf{r}(t_0)] = 0 \quad (1.82)$$

或展开为

$$\dot{x}(t_0)[x - x(t_0)] + \dot{y}(t_0)[y - y(t_0)] + \dot{z}(t_0)[z - z(t_0)] = 0 \quad (1.83)$$

其中 $\mathbf{p} = (x, y, z)$ 是法平面上点 (x, y, z) 的向径。

通常情况下, 曲线的参数方程并不会直接以 1.76 式的形式给出, 下面就介绍两种情况。

1. 曲线 Γ 由两柱面的交线表示: 设该曲线的方程为

$$y = y(x), \quad z = z(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

把 x 看作是参数, 上式也可写成参数方程形式

$$x = x, \quad y = y(x), \quad z = z(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

那么 Γ 上与参数 $x = x_0$ 相对应的点处的切线方程是

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y(x_0)}{y'(x_0)} = \frac{z - z(x_0)}{z'(x_0)} \quad (1.84)$$

法平面方程是

$$x - x_0 + y'(x_0)[y - y(x_0)] + z'(x_0)[z - z(x_0)] = 0 \quad (1.85)$$

2. 曲线 Γ 由一般式表示: 设该曲线的方程为

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0 \\ G(x, y, z) = 0 \end{cases} \quad (1.86)$$

且在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的某邻域内, 方程组 1.86 满足隐函数存在定理 II 的条件, 不妨设

$$\left. \frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \right|_{P_0} \neq 0$$

那么在点 P_0 的某邻域内由方程组 1.86 确定了两个具有连续导数的一元隐函数 $y = y(x)$ 和 $z = z(x)$ 。由隐函数求导法求出 $\dot{y}(x_0)$ 和 $\dot{z}(x_0)$ 之后, 代入定理 1.16, 1.17, 即得曲线 Γ 在点 P_0 处的切线方程和法平面方程。



笔记 在曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 上, $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz) = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) dt$ 与 $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ 共线, 因而向量 (dx, dy, dz) 也是曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 的一个切向量。因此, 求曲线 Γ 在点 P_0 处的切向量也可以用下面的方法: 由 1.86 式两端求全微分, 并将点 P_0 代入, 得

$$\begin{cases} F_x(P_0) dx + F_y(P_0) dy + F_z(P_0) dz = 0, \\ G_x(P_0) dx + G_y(P_0) dy + G_z(P_0) dz = 0, \end{cases} \quad (1.87)$$

将上式看作以 dx, dy, dz 为未知量的齐次线性代数方程组, 其所含方程个数小于未知量个数, 由线性代数的知识知它必有非零解, 求出它的任意一个非零解 $(dx, dy, dz)|_{P_0}$, 便是曲线 1.86 在点 P_0 处的一个切向量。

例题 1.18 求曲线 $\begin{cases} y = x^2 \\ z = x^3 \end{cases}$ 在点 $P_0(1, 1, 1)$ 处的切线与法平面方程。

解 设参数 $x = t$, 则可知 $x_t = 1, y_t = 2t, z_t = 3t^2$, 而在 P_0 处的参数 $t_0 = 1$, 于是有切线

$$x - 1 = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3}$$

法平面方程是

$$(x-1) + 2(y-1) + 3(z-1) = 0$$

例题 1.19 求曲线 $\begin{cases} 2x^2 + y^2 + z^2 = 45 \\ x^2 + 2y^2 = z \end{cases}$ 在点 $P_0(-2, 1, 6)$ 处的切线与法平面方程。

解 由曲线方程两端求全微分, 利用一阶全微分形式不变性, 得

$$\begin{cases} 4xdx + 2ydy + 2zdz = 0 \\ 2xdx + 4ydy - dz = 0 \end{cases}$$

将点 P_0 的坐标代入, 得

$$\begin{cases} 4dx - dy - 6dz = 0 \\ 4dx - 4dy + dz = 0 \end{cases}$$

容易求出这个齐次线性代数方程组的一个非零解是

$$(dx, dy, dz)|_{P_0} = (25, 28, 12)$$

它就是曲线在点 P_0 处的一个切向量, 从而得曲线在点 P_0 处的切线方程是

$$\frac{x+2}{25} = \frac{y-1}{28} = \frac{z-6}{12}$$

法平面方程是

$$25(x+2) + 28(y-1) + 12(z-6) = 0$$

1.6.2 弧长

设简单曲线 Γ 的方程是

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

Γ 的两个端点 A, B 分别对应于向径 $\mathbf{r}(\alpha), \mathbf{r}(\beta)$, 在 Γ 上介于 A 和 B 之间沿着参数 t 增大的方向依次取 $n-1$ 个分点 $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$, 它们把 Γ 分成了 n 段. 用直线段把相邻分点联结起来, 即得一折线, 其长度是

$$s_n = \sum_{i=1}^n \|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\| \quad (1.88)$$

其中记 $A = P_0, B = P_n$, 如果不论分点如何选取, 当 $d = \max_{1 \leq i \leq n} \|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\| \rightarrow 0$ 时, 折线的长度 s_n 有确定的极限 s , 则称 Γ 为可求长的曲线, 且称这个极限值 s 为 Γ 的长度, 或 Γ 的弧长, 即

$$s = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \|\overrightarrow{P_{i-1}P_i}\| \quad (1.89)$$

下面来介绍弧长的具体计算公式。

定理 1.18 (弧长的计算公式)

设在 $[\alpha, \beta]$ 上 $\dot{\mathbf{r}}(t)$ 连续且 $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$, 则空间曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$) 是可求长的曲线, 且长度为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \|\mathbf{r}'(t)\| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 + [\dot{z}(t)]^2} dt \quad (1.90)$$

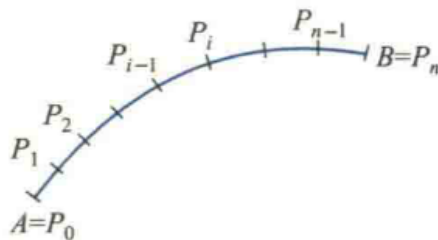


图 1.12: 曲线的分段

笔记 平面曲线是空间曲线的特例 ($z=0$), 因此, 对于平面曲线 $\Gamma: x=x(t), y=y(t)$ ($\alpha \leq t \leq \beta$), 其弧长为

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt \quad (1.91)$$

故有下面两种特殊情况的处理方法。

1. 若平面曲线 Γ 在直角坐标系下的方程是

$$y = y(x), \quad (a \leq x \leq b)$$

则 Γ 有参数方程 $x = x, y = y(x) (a \leq x \leq b)$, 因而 Γ 的弧长为

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2} dx \quad (1.92)$$

2. 若平面曲线 Γ 在极坐标下的方程是

$$\rho = \rho(\theta), \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta) \quad (1.93)$$

则 Γ 有参数方程 $x = \rho(\theta) \cos \theta, y = \rho(\theta) \sin \theta (\alpha \leq \theta \leq \beta)$, 于是 Γ 的弧长为

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[x'(\theta)]^2 + [y'(\theta)]^2} d\theta = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2} d\theta \quad (1.94)$$

例题 1.20 求螺旋线 $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, z = k\theta$ 一个螺距之间的长度。

解 由于

$$\sqrt{x'^2(\theta) + y'^2(\theta) + z'^2(\theta)} = \sqrt{a^2 + k^2}$$

所以所求弧长为

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta_0+2\pi} \sqrt{a^2 + k^2} d\theta = 2\pi\sqrt{a^2 + k^2}, \quad (\theta_0 \in \mathbb{R}) \quad (1.95)$$

例题 1.21 求平面曲线 $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y (1 \leq y \leq e)$ 的弧长。

解 当 $1 \leq y \leq e$ 时, 此曲线的参数方程可视为以 $y = y$ 为参数且 $x = \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{2} \ln y$ 。由于

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4} \left(y - \frac{1}{y}\right)^2} = \frac{1}{2} \left(y + \frac{1}{y}\right)$$

故有

$$s = \frac{1}{2} \int_1^e \left(y + \frac{1}{y}\right) dy = \frac{1}{4}(e^2 + 1)$$

设曲线 Γ 的参数方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$, $\mathbf{r}(t)$ 连续且 $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$, t_0 为 $[\alpha, \beta]$ 上的固定参数值, $s(t)$ 为从 $\mathbf{r}(t_0)$ 到 $\mathbf{r}(t)$ 的弧长函数, 而且规定: 当 $t > t_0$ 时, $s(t) > 0$; 当 $t < t_0$ 时, $s(t) < 0$, 则由 1.90 式有

$$s(t) = \int_{t_0}^t \|\dot{\mathbf{r}}(\tau)\| d\tau, \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (1.96)$$

显然, 由 1.96 式定义的函数 $s(t)$ 是 $[\alpha, \beta]$ 上连续可导且单调增的函数, t 增加的方向是 $s(t)$ 增大的方向, 且

$$\frac{ds}{dt} = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| = \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 + [\dot{z}(t)]^2} \quad (1.97)$$

上式左侧类似于微分之比(导数)的形式, 于是我们给出弧微分的定义。

定义 1.20 (弧微分)

设在 $[\alpha, \beta]$ 上 $\dot{\mathbf{r}}(t)$ 连续且 $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$, 则称

$$ds = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| dt = \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2 + [\dot{z}(t)]^2} dt \quad (1.98)$$

为弧长 $s(t)$ 的微分, 简称为弧微分

由于 $\frac{ds}{dt} = \|\dot{\mathbf{r}}(t)\| > 0$, 故 $s = s(t)$ 存在反函数 $t = t(s)$, 代入 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 便得到 $\mathbf{r}$ 的以弧长 s 为参数的方程

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s)), \quad (a \leq s \leq b) \quad (1.99)$$

称 s 为曲线 $\mathbf{r}$ 的自然参数, 其中 $[a, b]$ 为函数 $s = s(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$ 的值域。通过上式就建立了区间 $[a, b]$ 上 s 值与曲线 $\mathbf{r}$ 上点之间的一一对应关系。

注 设曲线 Γ 的自然参数方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, 而 Γ 的一般参数方程用 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 表示. 为了区分它们的导数, 我们用

$$\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \dots, \mathbf{r}^{(n)}, \dots$$

表示 $\mathbf{r}$ 对 s 的导数, 而用

$$\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dots$$

表示 $\mathbf{r}$ 对 t 的导数, 并且假定所出现的函数 $\mathbf{r}$ 的导数都是连续的. 不难证明 $\mathbf{r}'$ 也是一个切向量.

有关这些内容的进一步讨论详见 1.7 节.

1.6.3 空间曲面的切平面和法线

空间曲线可以表示为含一个参数的参数方程形式, 下面我们来说明——曲面的方程可以用含有两个参数的参数方程来表示, 先举一个常用的例子.

 **笔记** 现在想建立半径为 R 的球面的参数方程.

设球心在坐标原点 O , $P(x, y, z)$ 为此球面上任一点, 从 z 轴正向到向径 $\overrightarrow{OP}$ 的转角为 φ , 从坐标平面 xOz 由到 z 轴和 $\overrightarrow{OP}$ 所确定的平面 π 的转角 (从 z 轴正向去看, 其旋转方向为逆时针方向) 为 θ . 取 φ 与 θ 为参数, 显然有

$$(\varphi, \theta) \in D = \{(\varphi, \theta) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

由右图易见

$$x = \|\overrightarrow{OM}\| \cos \theta, \quad y = \|\overrightarrow{OM}\| \sin \theta,$$

而且

$$\|\overrightarrow{OM}\| = R \sin \varphi$$

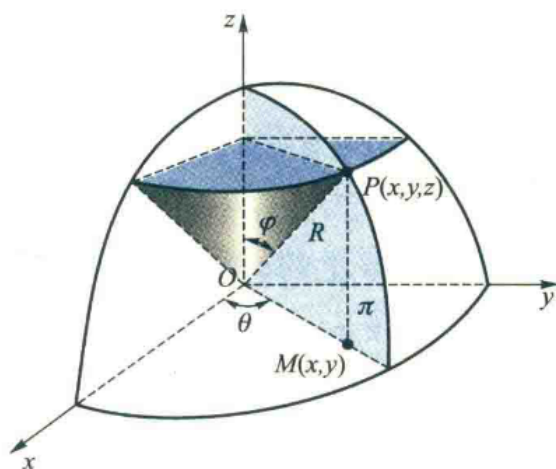


图 1.13: 球面的参数表示

从而知此球面的参数方程为

$$x = R \sin \varphi \cos \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \varphi \quad (0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (1.100)$$

或表示为向量值函数形式

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\varphi, \theta) = (R \sin \varphi \cos \theta, R \sin \varphi \sin \theta, R \cos \varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (1.101)$$

因此, 此球面可看成平面区域

$$D = \{(\varphi, \theta) \mid 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

到 $\mathbb{R}^3$ 的连续映射 1.101 的像.

一般地, 曲面 S 可以看作是由平面上某一区域 D 到空间 $Oxyz$ 的某一连续映射的像. 从而 S 的方程可用此映射表示为

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v) \quad ((u, v) \in D) \quad (1.102)$$

或写成向量形式为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad ((u, v) \in D) \quad (1.103)$$

称上述两式为曲面的参数方程. 其中函数 x, y, z 均在 D 中连续. 曲面上有无数条曲线, 因此下面介绍曲面上曲线的一种表示方式.

定义 1.21 (曲面上曲线的表示)

对于曲面 S 的参数方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, 若在 D 中固定 $v = v_0$, 让 u 变化, 则此时在映射 r 下像点的集合应是曲面 S 上的一条曲线, 称为曲面 S 上的 u 曲线。它的方程应为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v_0) = (x(u, v_0), y(u, v_0), z(u, v_0)), \quad (u \in I_u) \quad (1.104)$$

同理可得曲面 S 上的 v 曲线的方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u_0, v) = (x(u_0, v), y(u_0, v), z(u_0, v)), \quad (v \in I_v) \quad (1.105)$$

其中 I_u 与 I_v 分别为 u 与 v 所允许的变化区间。

定义 1.21 表明, 过曲面 S 上的每一点 P 就有一条 u 曲线和一条 v 曲线, 它们的交点就是 P 。

u 曲线族和 v 曲线族构成曲面 S 上的参数曲线网, 而曲面 S 可以看成是由它的 u 曲线族和 v 曲线族织成的。下图表明, 曲面 S 可以看成是映射 r 将平面 uOv 上的区域 D 在 $\mathbb{R}^3$ 中变形后得到的, 而 D 内的坐标网相应地变成了曲面 S 的参数曲线网。

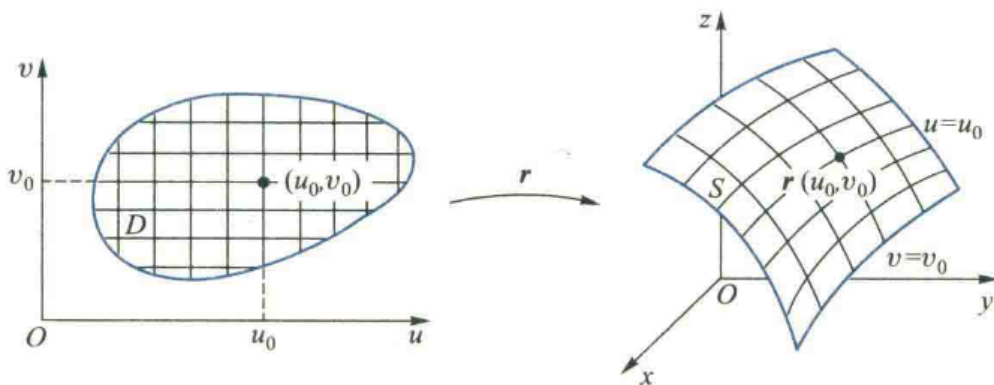


图 1.14: 曲面的参数方程映射

笔记 由于曲面 S 是平面区域 D 在连续映射 r 下像点的集合, 所以曲面 S 上任一曲线必是区域 D 内某一平面曲线 $u = u(t), v = v(t)$ ($t \in I$) 在映射 r 下像点的集合, 因而它的方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}[u(t), v(t)] = (x(u(t), v(t)), y(u(t), v(t)), z(u(t), v(t))), \quad (t \in I) \quad (1.106)$$

下面, 我们正式介绍曲面的切平面和法线。设曲面 S 的参数方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)), \quad ((u, v) \in D \subseteq \mathbb{R}^2)$$

其中 $\mathbf{r}$ 在 D 内连续, 在点 $(u_0, v_0) \in D$ 可微, 其偏导数为

$$\mathbf{r}_u(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \bigg|_{(u_0, v_0)}, \quad \mathbf{r}_v(u_0, v_0) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right) \bigg|_{(u_0, v_0)}$$

当 $\mathbf{r}_u(u_0, v_0) \times \mathbf{r}_v(u_0, v_0) \neq \mathbf{0}$ 时, 称点 (u_0, v_0) 称为曲面 S 的**正则点**。可以证明: 对于 S 的正则点 $\mathbf{r}_0$, 存在一个与 S 相切于 $\mathbf{r}_0$ 的平面 π , 使得曲面 S 上每条过 $\mathbf{r}_0$ 的曲线在该点的切线都在这个平面 π , 称该平面为曲面 S 在 $\mathbf{r}_0$ 的**切平面**。而称经过点 $\mathbf{r}_0$ 且垂直于 π 的直线 L 为曲面 S 在 $\mathbf{r}_0$ 的**法线**, 和法线平行的向量称为**法向量**。

显然, 法向量可以取

$$(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v)_{(u_0, v_0)} = \left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}, \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right)_{(u_0, v_0)} = (A, B, C) \quad (1.107)$$

于是 S 在点 $\mathbf{r}_0$ 的切平面方程为

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \quad (1.108)$$

法线方程为

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} \quad (1.109)$$

其中 $x_0 = x(u_0, v_0)$, $y_0 = y(u_0, v_0)$, $z_0 = z(u_0, v_0)$ 。若偏导数

$$\mathbf{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \mathbf{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

均在区域 D 内连续, 则称曲面 S 是光滑曲面, 在几何上表示此曲面有连续转动的切平面。

例题 1.22 求正螺面 $x = u \cos v, y = u \sin v, z = av$ 在 $(u, v) = \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} \right)$ 处的切平面与法线方程, 其中常数 $a \neq 0$ 。

解 由于 $\mathbf{r} = (u \cos v, u \sin v, av)$, 所以

$$\mathbf{r}_u = (x_u, y_u, z_u) = (\cos v, \sin v, 0), \quad \mathbf{r}_v = (x_v, y_v, z_v) = (-u \sin v, u \cos v, a)$$

在 $u = \sqrt{2}, v = \frac{\pi}{4}$ 处可以求得 $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}a, -\frac{\sqrt{2}}{2}a, \sqrt{2} \right)$, 于是曲面上对应于点 $\left(1, 1, \frac{\pi}{4}a \right)$ 处的法向量可取

$$\mathbf{n} = (a, -a, 2)$$

从而可得所求切平面方程是

$$a(x-1) - a(y-1) + 2\left(z - \frac{\pi}{4}a\right) = 0$$

法线方程是

$$\frac{x-1}{a} = \frac{y-1}{-a} = \frac{z - \frac{\pi}{4}a}{2}$$

笔记 若曲面 S 的方程为直角坐标系下的方程 $F(x, y, z) = 0$, 设 F 具有对各个变量的连续偏导数, 且 $(F_x, F_y, F_z) \neq \mathbf{0}$ 。不妨设 $F_z \neq 0$, 则由隐函数存在定理, 方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定了一个单值连续且有连续偏导数的二元函数 $z = z(x, y)$ 。把 x 与 y 看作是参数, 于是曲面 S 的参数方程为

$$\mathbf{r}(x, y) = (x, y, z(x, y))$$

由于

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, z_x) = \left(1, 0, -\frac{F_x}{F_z} \right), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, z_y) = \left(0, 1, -\frac{F_y}{F_z} \right),$$

从而

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \left(\frac{F_x}{F_z}, \frac{F_y}{F_z}, 1 \right),$$

故可取 $\mathbf{n} = (F_x, F_y, F_z)$ 作为法向量, 于是曲面在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程和法线由下述定理确定:

定理 1.19 (曲面在某点的切平面和法线)

设曲面 S 的方程由直角坐标系中的方程 $F(x, y, z) = 0$ 确定, 且对各个变量有连续偏导数, 那么曲面在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程为

$$F_x(P_0)(x-x_0) + F_y(P_0)(y-y_0) + F_z(P_0)(z-z_0) = 0 \quad (1.110)$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{F_x(P_0)} = \frac{y-y_0}{F_y(P_0)} = \frac{z-z_0}{F_z(P_0)} \quad (1.111)$$

特别地, 若曲面由 $z = f(x, y)$ 或 $f(x, y) - z = 0$ 确定, 则曲面在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为

$$z - z_0 = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (1.112)$$

法线方程为

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0, y_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0, y_0)} = \frac{z-z_0}{-1} \quad (1.113)$$

例题 1.23 求旋转抛物面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在点 $(2, 1, 4)$ 处的切平面和法线方程。

解 令 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, 根据定理 1.19 不难求得一个法向量

$$\mathbf{n}|_{(2,1,4)} = (f_x, f_y, -1)|_{(2,1,4)} = (2x, 2y, -1)|_{(2,1,4)} = |_{(2,1,4)} = (4, 2, -1)$$

所以切平面方程为

$$4(x-2) + 2(y-1) - (z-4) = 0$$

法线方程为

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1}$$

例题 1.24 已知椭球面 $S: x^2 + 2y^2 + z^2 = \frac{5}{2}$ 和平面 $\pi: x - y + z + 4 = 0$, 求 S 的与平面 π 平行的切平面的方程。

解 设 S 上点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处的切平面与平面 π 平行, 由于 S 上点 P_0 处法向量为

$$\boldsymbol{n}|_{P_0} = (x_0, 2y_0, z_0)$$

平面 π 的法向量为 $(1, -1, 1)$, 按照平面平行的条件有

$$\frac{x_0}{1} = \frac{2y_0}{-1} = \frac{z_0}{1},$$

从而得 $x_0 = z_0, y_0 = -\frac{1}{2}z_0$ 。代入曲面 S 的方程得 $z_0 = \pm 1$, 因而得到满足要求的点 P_0 有两个:

$$P'_0(1, -\frac{1}{2}, 1), \quad P''_0(-1, \frac{1}{2}, -1)$$

则点 P'_0 和 P''_0 处的切平面方程分别是

$$(x-1) - (y + \frac{1}{2}) + (z-1) = 0 \quad \text{和} \quad (x+1) - (y - \frac{1}{2}) + (z+1) = 0$$

或表示为

$$x - y + z - \frac{5}{2} = 0 \quad \text{和} \quad x - y + z + \frac{5}{2} = 0$$

它们都与平面 π 平行。

1.7 空间曲线的性态研究 (*)

1.7.1 Frenet 标架

注 Frenet 标架是描述空间中的光滑流形的一种活动正交标架，是微分几何中的一个重要概念。介于本课程参考的《工科数学分析基础》涉及到了这个概念，我们主要以曲线为例介绍曲线的 Frenet 标架。有关 Frenet 标架的背景详见文章 [https://zhuanlan.zhihu.com/p/144787656]

设曲线 Γ 的自然参数方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ，而 Γ 的一般参数方程用 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 表示。为了区分它们的导数，我们用

$$\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \dots, \mathbf{r}^{(n)}, \dots$$

表示 $\mathbf{r}$ 对 s 的导数，而用

$$\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \dots$$

表示 $\mathbf{r}$ 对 t 的导数，并且假定所出现的函数 $\mathbf{r}$ 的导数都是连续的。

定义 1.22 (单位主法向量和单位次法向量)

设 $\mathbf{r}(s), (a \leq s \leq b)$ 是以自然参数表示的曲线， $\mathbf{r}$ 对各参数的高阶导数都连续，且 $\|\mathbf{r}''\| \neq 0$ 。记曲线在 $\mathbf{r}(s_0)$ 处的单位切向量 $\mathbf{T} = \mathbf{r}'(s_0)$ ，称

$$\mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}''(s_0)}{\|\mathbf{r}''(s_0)\|} \quad (1.114)$$

为在 $\mathbf{r}(s_0)$ 处的单位主法向量，称

$$\mathbf{B} = \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \frac{\mathbf{r}'(s_0) \times \mathbf{r}''(s_0)}{\|\mathbf{r}''(s_0)\|} \quad (1.115)$$

为在 $\mathbf{r}(s_0)$ 处的单位次法向量。

 **笔记** 不难证明 $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ 三者相互正交，且 $\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ 构成一右手直角坐标系。

我们已经知道，曲线在某点的切向量确定了法平面。因此我们进一步对主法向量和次法向量所确定的垂直平面做如下定义：

以主法向量 $\mathbf{N}$ 为法向量且和曲线 $\mathbf{r}$ 相切的平面称为从切平面，其在该点的法线称为主法线；以次法向量 $\mathbf{B}$ 为法向量且和曲线 $\mathbf{r}$ 相切的平面称为密切平面，其在该点的法线称为次法线。

称在 $P = \mathbf{r}(s_0)$ 处，以 $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ 构成的一个空间 (右手) 直角坐标系称为曲线在 $P = \mathbf{r}(s_0)$ 处的 Frenet 标架。由于 P 在曲线上移动时，这个标架也会随着 P 在曲线上作为刚体运动，因此又称为活动标架。

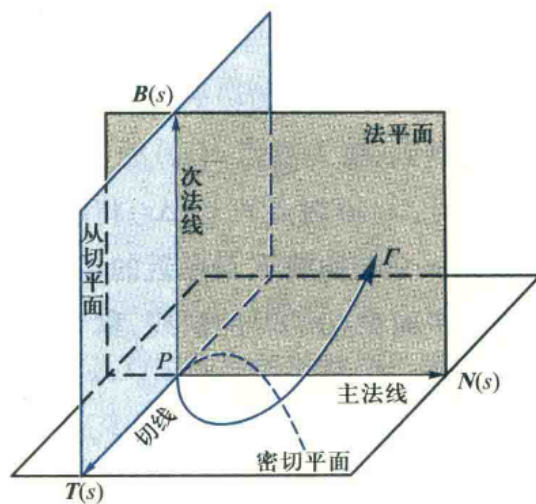


图 1.15: Frenet 标架

定理 1.20 (Frenet 标架向量的参数表示)

如果 Γ 的方程由一般参数方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 给出，则 Γ 上点 $\mathbf{r}(t_0)$ 处的单位切向量 $\mathbf{T}(t_0)$ 及单位次法向量 $\mathbf{B}(t_0)$ 的计算公式分别为

$$\mathbf{T}(t_0) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t_0)}{\|\dot{\mathbf{r}}(t_0)\|}, \quad \mathbf{B}(t_0) = \frac{\dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(t_0)}{\|\dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(t_0)\|} \quad (1.116)$$

$\mathbf{r}(t_0)$ 处的单位主法向量 $\mathbf{N}(t_0)$ 便可由公式 $\mathbf{N}(t_0) = \mathbf{B}(t_0) \times \mathbf{T}(t_0)$ 算出。

例题 1.25 求螺旋线 $\mathbf{r} = (a \cos t, a \sin t, kt)$ 的 Frenet 标架、密切平面以及从切平面的方程。

解 由于

$$\dot{\mathbf{r}} = (-a \sin t, a \cos t, k), \quad \ddot{\mathbf{r}} = (-a \cos t, -a \sin t, 0)$$

$$\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}} = a(k \sin t, -k \cos t, a)$$

所以

$$\|\dot{\mathbf{r}}\| = \sqrt{a^2 + k^2}, \quad \|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\| = a\sqrt{a^2 + k^2}$$

于是由定理 1.20 即得

$$\mathbf{T} = \frac{\dot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}}\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + k^2}}(-a \sin t, a \cos t, k)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}}{\|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}\|} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + k^2}}(k \sin t, -k \cos t, a)$$

从而得

$$\mathbf{N} = \mathbf{B} \times \mathbf{T} = (-\cos t, -\sin t, 0)$$

上述三向量 $\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ 所构成的坐标系即为所求 Frenet 标架。密切平面的方程为

$$k \sin t(x - a \cos t) - k \cos t(y - a \sin t) + a(z - kt) = 0$$

从切平面的方程为

$$-\cos t(x - a \cos t) - \sin t(y - a \sin t) = 0$$

1.7.2 曲率

对一般的曲线来说, 各点处的弯曲程度不尽相同。换句话说, 曲线上切线的转角 θ 随弧长 s 的变化是非均匀的。我们想要用 $\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$ 刻画曲线在某处的弯曲程度, 但是这个量一般并非常数, 它只能表示从 s_0 到 $s_0 + \Delta s$ 弧段上的平均弯曲程度, 称为平均曲率。为了精确地刻画曲线在一点的弯曲程度, 需要对平均曲率取极限, 也就有下述定义。

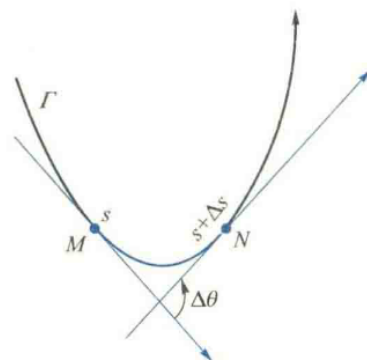


图 1.16: 曲线在某处的弯曲程度考察

定义 1.23 (曲率)

设空间光滑曲线 Γ 的方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ($a \leq s \leq b$), 其中 s 为自然参数, Γ 上点 M 对应的参数为 s , Γ 上点 M 附近点 N 对应的参数为 $s + \Delta s$, Γ 在点 M 处的切线向量 $\mathbf{r}'(s)$ 与点 N 处的切线向量 $\mathbf{r}'(s + \Delta s)$ 的夹角为 $\Delta\theta$, 称极限值

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|$$

为 Γ 在点 M 处的曲率, 记为 κ , 即

$$\kappa = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| \quad (1.117)$$

♣

直接利用定义求曲率一般是困难的, 下面介绍几种方法。

定理 1.21 (曲率的自然参数形式)

设空间曲线 Γ 的方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$, s 为自然参数且 $\mathbf{r}(s)$ 二阶可导. 则 Γ 上点 $\mathbf{r}(s)$ 处的曲率为

$$\kappa(s) = \|\mathbf{r}''(s)\| \quad (1.118)$$

证明 我们知道 $\mathbf{T}(s) = \mathbf{r}'(s)$ 是 Γ 在点 $\mathbf{r}(s)$ 处与 Γ 正向一致的单位切向量. 设 $\mathbf{T}(s)$ 与 $\mathbf{T}(s+\Delta s)$ 的夹角为 $\Delta\theta$, 则由曲率的定义可得

$$\begin{aligned} \kappa(s) &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\mathbf{T}}{\Delta\theta} \right| \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| \\ &= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left(\left| \frac{\Delta\mathbf{T}}{\Delta\theta} \right| \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| \right) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta\mathbf{T}}{\Delta s} \right| \\ &= \|\mathbf{T}'(s)\| = \|\mathbf{r}''(s)\| \end{aligned}$$

定理 1.22 (曲率的参数形式)

设空间曲线 Γ 由一般的参数方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ 给定, $\mathbf{r}(t)$ 二阶可导且 $\dot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$, 则 Γ 在点 $\mathbf{r}(t)$ 的曲率为

$$\kappa(t) = \frac{\|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)\|}{\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|^3} \quad (1.119)$$

笔记 利用定理 1.22, 可以处理一些平面曲线的曲率问题

1. 对于平面曲线 $\mathbf{r} = (x(t), y(t), 0)$, 其在某点的曲率为

$$\kappa = \frac{|\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}|}{[(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2]^{3/2}} \quad (1.120)$$

2. 对于平面曲线 $y = y(x)$, 即 $\mathbf{r} = (x, y(x), 0)$, 若 $y(x)$ 二阶可导, 其在某点的曲率为

$$\kappa = \frac{|y''|}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad (1.121)$$

命题 1.2

- 曲线 L 为直线的充要条件是曲率处处为 0
- 半径为 R 的圆上任意一点曲率为 $\frac{1}{R}$

如果 Γ 是一空间曲线, 那么在点 P 与 Γ 最贴近的切平面是点 P 处的密切平面 π . 在点 P 处曲线的主法线上取点 Q , 使 $\overrightarrow{PQ}$ 的正向与 $\mathbf{N}(s)$ 的正向相同, 且使 $\|\overrightarrow{PQ}\| = \frac{1}{\kappa}$. 以 Q 为圆心、 $\frac{1}{\kappa}$ 为半径且在平面 π 上的圆称为 Γ 在点 P 处的曲率圆或密切圆. 此曲率圆的圆心 Q 与半径 R 分别称为曲线 Γ 在点 P 处的曲率中心与曲率半径. 于是若取弧长作参数, 则曲率中心的向径 $\mathbf{r}_q$ 为

$$\mathbf{r}_q = \mathbf{r}_p(s) + R(s)\mathbf{N}(s) \quad (1.122)$$

曲率半径为

$$R = \frac{1}{\kappa} \quad (1.123)$$

其中 $\mathbf{r}_p$ 为点 P 的向径.

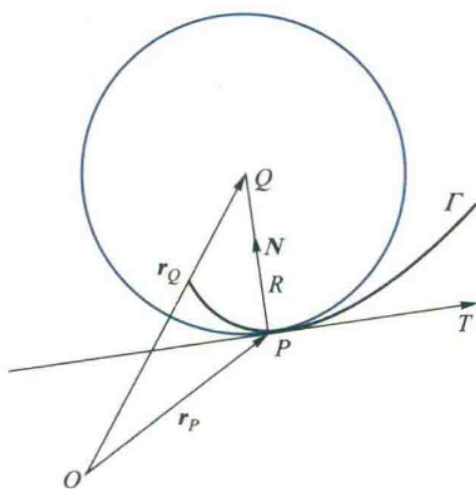


图 1.17: 曲率圆

例题 1.26 设工件内表面的截线为抛物线 $y = 0.4x^2(\text{cm})$. 现在要用砂轮磨削其内表面, 问用直径多大的砂轮才比较合适?

解 为了在磨削时不使砂轮磨削到工件里面去, 即多磨掉不应磨去的部分, 砂轮的半径应小于工件截线上各点处

曲率半径的最小值。为此先求抛物线 $y = 0.4x^2$ 上任一点 (x, y) 处的曲率半径, 有

$$y' = 0.8x, \quad y'' = 0.8$$

所以曲率半径 R 为

$$R = \frac{1}{\kappa} = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|} = \frac{(1 + 0.64x^2)^{\frac{3}{2}}}{0.8}$$

容易求出在抛物线的顶点 $(0, 0)$ 处曲率半径 R 取到最小值。

1.7.3 挠率

定义 1.24 (挠率)

设曲线的 Frenet 标架向量都存在, 称

$$\tau(s) = -B'(s) \cdot N(s) \quad (1.124)$$

为曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ 在点 $\mathbf{r}(s)$ 处的挠率。

 **笔记** 由定义可以导出挠率的另一计算公式

$$\tau(s) = \frac{[\mathbf{r}'(s) \quad \mathbf{r}''(s) \quad \mathbf{r}'''(s)]}{\|\mathbf{r}''(s)\|^2} \quad (1.125)$$

如果曲线的方程为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)), \quad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

那么, 当 $\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t) \neq \mathbf{0}$ 时, 由变换 $s = s(t)$ 不难将曲线的挠率公式转换为

$$\tau(t) = \frac{[\dot{\mathbf{r}}(t) \quad \ddot{\mathbf{r}}(t) \quad \dddot{\mathbf{r}}(t)]}{\|\dot{\mathbf{r}}(t) \times \ddot{\mathbf{r}}(t)\|^2} \quad (1.126)$$

定理 1.23 (曲率的参数形式)

曲线为平面曲线的充要条件为任意点的挠率为 0。

第一章 练习

1. 判断二元函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性、偏导数的存在性和可微性。

解 考虑沿不同路径趋近于 $(0, 0)$ 时 $f(x, y)$ 的极限。沿直线 $y = kx (k \neq 0)$ 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, kx) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot kx}{x^2 + (kx)^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2(1 + k^2)} = \frac{k}{1 + k^2}$$

这个极限值依赖于 k , 由于沿不同路径趋近于 $(0, 0)$ 时, $f(x, y)$ 的极限值不同。所以 f 在 $(0, 0)$ 处不连续。下面考虑偏导数是否存在, 有

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0$$

两个偏导数 $f_x(0, 0)$ 和 $f_y(0, 0)$ 都存在, 且都等于 0。最后考虑可微性, 验证 f_x 和 f_y 在 $(0, 0)$ 处是否连续。计算 $f_x(x, y)$, 对于 $(x, y) \neq (0, 0)$ 有

$$f_x(x, y) = \frac{y(x^2 + y^2) - xy \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^2 + y^2 - 2x^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

不难验证 $f_x(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不连续, 同理可验证 $f_y(x, y)$ 在 $(0, 0)$ 处不连续。因此函数在该点不可微。

 **笔记** 偏导数存在是可微的必要条件, 但不是充分条件; 偏导数连续是可微的充分条件。

2. 判断二元函数 $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$ 在点 $(0, 0)$ 处的连续性、偏导数的存在性和可微性。

解 由于 $0 \leq \sqrt{|xy|} \leq \frac{|x| + |y|}{2}$, 由夹逼定理知

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0 = f(0, 0)$$

所以 f 在 $(0, 0)$ 处连续。下面考虑偏导数是否存在, 有

$$f_x(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

$$f_y(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{h} = 0$$

两个偏导数 $f_x(0, 0)$ 和 $f_y(0, 0)$ 都存在, 且都等于 0。最后考虑可微性, 根据定义验证下列极限是否为 0:

$$\lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{f(0+h, 0+k) - f(0, 0) - f_x(0, 0)h - f_y(0, 0)k}{\sqrt{h^2 + k^2}} = \lim_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \frac{\sqrt{|hk|}}{\sqrt{h^2 + k^2}}$$

考虑沿路径 $h = k$ 趋近于 $(0, 0)$ 时, 有

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|h^2|}}{\sqrt{2h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{|h|}{\sqrt{2}|h|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \neq 0$$

因此该极限不为 0, 函数 f 在 $(0, 0)$ 处不可微。

3. 考虑二元函数的下面 4 条性质:

1. (x, y) 在点 (x_0, y_0) 处连续; 3. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微;

2. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数连续; 4. $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处的两个偏导数存在。

若用 $P \Rightarrow Q$ 表示 P 能推出 Q , 则下面选项正确的是 ()

(A) $2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$ (B) $3 \Rightarrow 2 \Rightarrow 1$ (C) $3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ (D) $3 \Rightarrow 1 \Rightarrow 4$

解 根据多元微分学的相关定理, 这 4 条性质之间的逻辑推导关系如下:

$2 \Rightarrow 3$: 偏导数连续是可微的充分条件

$3 \Rightarrow 1$: 可微必定连续, 这是可微性的基本定义要求

$3 \Rightarrow 4$: 可微必定偏导数存在, 因为可微的定义中包含了偏导数的存在性。

$4 \nRightarrow 1$: 偏导数存在不能推出连续, 如反例 $f(x, y) = \begin{cases} 1, & xy = 0 \\ 0, & xy \neq 0 \end{cases}$

$3 \nRightarrow 2$: 可微不能推出偏导数连续, 如反例 $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

因此, 正确的逻辑推导链条是 $2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$, 选 A。

4. 判断极限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^3y + xy^4 + x^2y}{x + y}$ 是否存在, 若存在求出极限。

解 考虑沿路径 $y = -x + x^2$ 趋近于 $(0, 0)$, 此时 $x + y = x^2 \neq 0$, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(-x + x^2) + x(-x + x^2)^4 + x^2(-x + x^2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^4 + x^5 + o(x^5) - x^3 + x^4}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3 + o(x^3)}{x^2} = 0$$

再考虑沿路径 $y = -x + x^3$ 趋近于 $(0, 0)$, 此时 $x + y = x^3 \neq 0$, 有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3(-x + x^3) + x(-x + x^3)^4 + x^2(-x + x^3)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^4 + x^6 + o(x^6) - x^3 + x^5}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x^3 + o(x^3)}{x^3} = -1$$

由于沿不同路径趋近于 $(0, 0)$ 时, 极限值不同。所以该极限不存在。

 **笔记** 在寻找不同极限逼近路线时, 一般考虑沿坐标轴、沿直线、沿幂曲线等。

5. 设函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的邻域内有定义, 且 $f_x(0, 0) = 1$, $f_y(0, 0) = 2$, 则 ()

(A) $f(0, y)$ 在 $y = 0$ 处不连续

(B) $df(x, y)|_{(0,0)} = dx + 2dy$

(C) $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(0,0)} = \cos \alpha + 2 \cos \beta$, 其中 $\cos \alpha, \cos \beta$ 为 l 方向的方向余弦

(D) $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 处沿 x 轴负方向的方向导数为 -1

解 答案为 D

(A) 错误: $f_y(0, 0)$ 存在无法判断在 $y = 0$ 处是否连续。

(B) 错误: $df(x, y)|_{(0,0)}$ 表示函数在该点的全微分。全微分存在的充要条件是函数在该点可微, 而题目仅已知偏导数存在, 不能推导出可微, 因此不能写全微分式。

(C) 错误: 公式 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{(0,0)} = f_x(0, 0) \cos \alpha + f_y(0, 0) \cos \beta$ 成立的前提是函数在该点可微。仅凭偏导数存在不能保证该公式成立。

(D) 正确: 沿 x 轴方向 (无论正负) 属于沿坐标轴方向, 此时方向导数直接等于该方向的偏导数 (或其相反数)。沿 x 轴负方向的方向导数即为 $-f_x(0, 0) = -1$, 这一结论仅依赖偏导数存在, 不需要可微的条件。



笔记 任意方向的方向导数存在的充分条件为函数在该点可微。

6. 求函数 $f(x, y) = \arctan \frac{x}{y}$ 在点 $(0, 1)$ 处方向导数的最大值的方向。

解 题目等价于求函数在 $(0, 1)$ 处的梯度, 分别对 x 和 y 求偏导数, 对于 $(x, y) \neq (0, 0)$ 有

$$f_x(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$$

$$f_y(x, y) = \frac{1}{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = \frac{-x}{x^2 + y^2}$$

将点 $(0, 1)$ 代入上述两式, 得

$$f_x(0, 1) = \frac{1}{0^2 + 1^2} = 1$$

$$f_y(0, 1) = \frac{-0}{0^2 + 1^2} = 0$$

因此, 函数在点 $(0, 1)$ 处的梯度为 $\nabla f(0, 1) = (f_x(0, 1), f_y(0, 1)) = (1, 0) = \mathbf{i}$ 。



笔记 方向导数最大的方向为 ∇f , 最小的方向为 $-\nabla f$, 变化率为 0 的方向垂直于 ∇f 。

7. 设 $u = z^{y^x}$, 求所有的一阶偏导数。

解 采用对数求导法, 求得

$$u_x = z^{y^x} y^x \ln y \ln z$$

$$u_y = x z^{y^x} y^{x-1} \ln z$$

$$u_z = y^x z^{y^x-1}$$

8. 设函数 $u(x, y) = \varphi(x+y) + \varphi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \psi(t) dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数, ψ 具有一阶导数, 则必有 ()

$$(A) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (B) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$(C) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (D) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

解 答案为 B

利用变限积分求导法则和复合函数求导法则分别求一阶偏导数:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varphi'(x+y) + \varphi'(x-y) + \psi(x+y) - \psi(x-y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(x+y) - \varphi'(x-y) + \psi(x+y) + \psi(x-y)$$

继续求二阶偏导数:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \varphi''(x+y) + \varphi''(x-y) + \psi'(x+y) - \psi'(x-y)$$

对比可知 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, 故选 B。

 **笔记** 回顾一下变限积分的求导方法:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t) dt \right) = f(\varphi(x))\varphi'(x) - f(\psi(x))\psi'(x)$$

9. 设 $z = z(x, y)$ 具有二阶连续偏导数, 且在变换 $u = x - 2y, v = x + ay$ 下可将方程 $6\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$ 化

简为 $\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} = 0$, 求常数 a 。

解 根据链式法则, 求得 z 对 x, y 的一阶偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= z_u \frac{\partial u}{\partial x} + z_v \frac{\partial v}{\partial x} = z_u + z_v \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= z_u \frac{\partial u}{\partial y} + z_v \frac{\partial v}{\partial y} = -2z_u + az_v \end{aligned}$$

继续求二阶偏导数 ($z_{uv} = z_{vu}$) 有:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}(z_u + z_v) = (z_{uu} + z_{uv}) + (z_{vu} + z_{vv}) = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}(z_u + z_v) = (-2z_{uu} + az_{uv}) + (-2z_{vu} + az_{vv}) = -2z_{uu} + (a-2)z_{uv} + az_{vv} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}(-2z_u + az_v) = -2(-2z_{uu} + az_{uv}) + a(-2z_{vu} + az_{vv}) = 4z_{uu} - 4az_{uv} + a^2z_{vv} \end{aligned}$$

将上述二阶偏导数代入原方程有

$$6(z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv}) + (-2z_{uu} + (a-2)z_{uv} + az_{vv}) - (4z_{uu} - 4az_{uv} + a^2z_{vv}) = 0$$

化简有 $(5a+10)z_{uv} + (-a^2+a+6)z_{vv} = 0$, 令 z_{vv} 的系数为 0, 解得 $a=3$ 或 $a=-2$ 。当 $a=-2$ 时, 代入 z_{uv} 的系数得 $5 \cdot (-2) + 10 = 0$, 此时方程变为 $0=0$, 失去了意义, 故舍去; 当 $a=3$ 时, 代入 z_{uv} 的系数得 $5 \cdot 3 + 10 = 25 \neq 0$, 方程成功化为 $25z_{uv} = 0$, 即 $z_{uv} = 0$ 。因此常数 $a=3$ 。

10. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $xe^x - ye^y = ze^z$ 确定, 求 dz 。

解 对方程 $xe^x - ye^y = ze^z$ 两边同时取全微分, 得

$$d(xe^x) - d(ye^y) = d(ze^z)$$

利用全微分的性质, 整理得到

$$(1+x)e^x dx - (1+y)e^y dy = (1+z)e^z dz$$

因此解得

$$dz = \frac{(1+x)e^x}{(1+z)e^z} dx - \frac{(1+y)e^y}{(1+z)e^z} dy$$

利用指数运算法则化简即得:

$$dz = \frac{1+x}{1+z} e^{x-z} dx - \frac{1+y}{1+z} e^{y-z} dy$$

 **笔记** 此类问题常常使用全微分或者隐函数求导法则计算。

11. 已知函数 $f(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{f(x, y) - xy}{(x^2 + y^2)^2} = 1$, 判断 $(0, 0)$ 处的极值性。

解 由极限定义得到 $f(0,0)=0$, 且当 $|x|, |y|$ 充分小时有

$$f(x,y) - f(0,0) \approx xy + (x^2 + y^2)^2$$

分别取 $y=x$ 和 $y=-x$, 可以得到 $f(x,y)$ 和 0 的不同大小关系, 因此不是极值点。

12. 设函数 $z=f(x,y)$ 在全平面上有定义, 且有连续的偏导数, 且满足方程

$$xf_x(x,y) + yf_y(x,y) = 0$$

证明 $f(x,y)$ 为常数。

证明 参考极坐标的表示形式, 当极径 $r \neq 0$ 时有

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} f(r \cos \theta, r \sin \theta) &= \cos \theta f_x(r \cos \theta, r \sin \theta) + \sin \theta f_y(r \cos \theta, r \sin \theta) \\ &= \frac{1}{r} [xf_x(x,y) + yf_y(x,y)] = 0 \end{aligned}$$

所以 $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = F(\theta)$, 再利用 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的连续性, 得到

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = \lim_{r \rightarrow 0} f(r \cos \theta, r \sin \theta) = F(\theta) = f(0,0)$$

即 $F(\theta)$ 是常数, 所以 $f(x,y)$ 为常数。

13. 设 $f(x,y)$ 具有连续偏导数, 且 $f(1,1)=1, f_x(1,1)=2, f_y(1,1)=3$ 。如果 $\varphi(x)=f(x, f(x,x))$, 求 $\varphi'(1)$ 。

解 题目也就是求 φ 对 x 的导数在 $x=1$ 的值, 由链式法则有

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy(x)}{dx}$$

其中

$$y(x) = f(x,x), \quad \frac{dy(x)}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x}(x,x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,x)$$

由于 $y(1)=f(1,1)=1$, 以 $x=1$ 代入上述等式, 得到

$$\varphi'(1) = f_x(1,1) + f_y(1,1)(f_x(1,1) + f_y(1,1)) = 17$$

14. 求函数 $f(x,y,z)=xyz$ 在条件 $x^{-1}+y^{-1}+z^{-1}=1 (x,y,z>0)$ 下的最小值。

解 设目标函数

$$F(x,y,z,\lambda) = xyz + \lambda(x^{-1} + y^{-1} + z^{-1} - 1)$$

根据 Lagrange 乘数法, 求解方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz - \lambda x^{-2} = 0 \Rightarrow \lambda = x^2 yz \\ \frac{\partial F}{\partial y} = xz - \lambda y^{-2} = 0 \Rightarrow \lambda = y^2 xz \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy - \lambda z^{-2} = 0 \Rightarrow \lambda = z^2 xy \end{cases}$$

于是可解得

$$\lambda = x^2 yz = y^2 xz = z^2 xy \Rightarrow x = y = z$$

代入约束式, 不难求得 $x=y=z=3$ 。故函数的极小值 $f(3,3,3)=3 \cdot 3 \cdot 3=27$ 。

15. 求函数 $f(x,y) = \frac{\cos x}{y+1}$ 在点 $(0,0)$ 的带 Lagrange 余项的 Taylor 展开式

解 根据本章的式 1.46, 有

$$f(x,y) = 1 - y + \frac{1}{2}(x,y) \begin{pmatrix} \frac{-\cos \theta x}{1+\theta y} & \frac{\sin \theta x}{(1+\theta y)^2} \\ \frac{\sin \theta x}{(1+\theta y)^2} & \frac{2 \cos \theta x}{(1+\theta y)^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \theta \in (0,1)$$

16. 求方程组
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v = 0 \\ x + y + z + 3u + 8v = 0 \\ x^2 + y + z^3 + 2u + 8v^2 = 0 \end{cases}$$
 所确定的隐函数的导数 $\frac{\partial z}{\partial y}$

解 首先确定隐函数组
$$\begin{cases} z = z(x, y) \\ u = u(x, y) \\ v = v(x, y) \end{cases}$$
, 对方程组求关于 y 的偏导可得

$$\begin{cases} 2y + 2z \frac{\partial z}{\partial y} + 2u \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ 1 + \frac{\partial z}{\partial y} + 3 \frac{\partial u}{\partial y} + 8 \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \\ 1 + 3z^2 \frac{\partial z}{\partial y} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} + 16v \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

写出关于上述方程组的 Jacobi 行列式可得

$$J = \begin{vmatrix} 2z & 2u & 1 \\ 1 & 3 & 8 \\ 3z^2 & 2 & 16v \end{vmatrix}$$

当系数行列式不为零时, 根据 Cramer 法则有

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\begin{vmatrix} -2y & 2u & 1 \\ -1 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & 16v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2z & 2u & 1 \\ 1 & 3 & 8 \\ 3z^2 & 2 & 16v \end{vmatrix}} = \frac{-96uy - 16u + 1 + 32y + 32uv}{96v + 2 + 48uz^2 - 9z^2 - 32z - 32uv}$$

17. 求曲线
$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 6 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$
 在点 $(1, -2, 1)$ 处的切线方程。

解 对方程组两端求全微分, 解得一组

$$(dx, dy, dz)|_{(1, -2, 1)} = (1, 0, -1)$$

因此, 切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{0} = \frac{z-1}{-1}$$

18. 设二维平面曲线由 $x = \cosh^3 t, y = \sinh^3 t$ 给出, 求 $0 \leq t \leq T$ 段的弧长。

解 根据弧长公式, 有

$$\begin{aligned} s &= \int_0^T \sqrt{x_t^2 + y_t^2} dt \\ &= \int_0^T 3 \sinh t \cosh t \sqrt{\sinh^2 t + \cosh^2 t} dt \\ &= \frac{3}{4} \int_0^T \sqrt{2 \cosh^2 t - 1} d(2 \cosh^2 t - 1) \\ &= \frac{1}{2} [(\sinh^2 T + \cosh^2 T)^{\frac{3}{2}} - 1] \end{aligned}$$

19. 当 $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ 时, 求阿基米德螺旋线 $r = a\varphi$ 的长度。

解 根据极坐标形式的弧长公式, 有

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \varphi^2 + a^2} d\varphi \\ &= a \left(\frac{\varphi}{2} \sqrt{\varphi^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(\varphi + \sqrt{\varphi^2 + 1}) \right) \Big|_0^{2\pi} \\ &= a \left(\pi \sqrt{4\pi^2 + 1} + \frac{1}{2} \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1}) \right) \end{aligned}$$

20. 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在第一卦限内的切平面, 使切平面与三个坐标面围成的四面体体积最小。

解 设球面在第一卦限内的切点为 $P(x_0, y_0, z_0)$, 因为点在球面上且在第一卦限, 所以满足

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1 \quad (x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0)$$

球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 在点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 处的法向量为 $\mathbf{n} = (2x_0, 2y_0, 2z_0)$ 。因此该点处的切平面方程为

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) + 2z_0(z - z_0) = 0$$

化简有

$$x_0x + y_0y + z_0z = 1$$

切平面与三个坐标轴的交点分别为 $\left(\frac{1}{x_0}, 0, 0\right), \left(0, \frac{1}{y_0}, 0\right), \left(0, 0, \frac{1}{z_0}\right)$

因此, 该四面体的体积为

$$V = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x_0} \cdot \frac{1}{y_0} \cdot \frac{1}{z_0} = \frac{1}{6x_0y_0z_0}$$

问题转化为在约束条件 $x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = 1$ 下, 求函数 $V(x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{6x_0y_0z_0}$ 的最小值。使用 Lagrange 乘数法, 设辅助函数

$$L(x_0, y_0, z_0, \lambda) = x_0y_0z_0 + \lambda(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 1)$$

分别对 x_0, y_0, z_0, λ 求偏导并令其为 0。可以解得极值点 $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ 。

故使得四面体体积最小的切平面方程为

$$x + y + z = \sqrt{3}$$

第二章 多元函数积分学及其性质

内容提要

□ 二重积分

□ 三重积分

□ 含参变量积分

□ 反常重积分

2.1 多元数量值函数积分的基本概念 (★)

本节来介绍多元数量值函数积分的基本概念。多元数量值函数积分是高等数学中的一个重要概念,用于计算多维空间中的面积、体积、质量等几何量。它包括二重积分、三重积分、曲线积分和曲面积分等多种形式。我们先介绍其基本定义。

定义 2.1 (多元数量值积分)

设 (Ω) 表示一个有界的几何形体,它是可度量的(即可求长或可求面积或可求体积),函数 f 是定义在 (Ω) 上的有界数量值函数。将 (Ω) 任意地划分为 n 个小部分 $(\Delta\Omega_k), k=1, 2, \dots, n$ 。用 $\Delta\Omega_k$ 表示 $(\Delta\Omega_k)$ 的度量。任取点 $M_k \in (\Delta\Omega_k)$, 作乘积

$$f(M_k) \Delta\Omega_k, \quad (k=1, 2, \dots, n)$$

作和式

$$\sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\Omega_k$$

如果不论 (Ω) 怎样划分,点 M_k 在 $(\Delta\Omega_k)$ 中怎样选取,当所有 $(\Delta\Omega_k)$ 的直径的最大值 $d \rightarrow 0$ 时上述和式都趋于同一常数,那么,称函数 f 在 (Ω) 上可积,且称此常数为多元数量值函数 f 在 (Ω) 上的积分,在不致混淆的情况下,也简称为函数 f 在 (Ω) 上的积分,记作

$$\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(M_k) \Delta\Omega_k \quad (2.1)$$

其中 (Ω) 称为积分域, f 称为被积函数, $f(M) d\Omega$ 称为被积式或积分微元。

 **笔记** 下面,我们根据积分域 (Ω) 的不同类型,分别给出积分2.1的具体表达式和名称。

1. 如果 (Ω) 是 x 轴上的闭区间 $[a, b]$,那么 f 就是定义在区间 $[a, b]$ 上的一元函数, $\Delta\Omega_k$ 就是子区间的长度 Δx_k ,从而积分式可以具体地写成

$$\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k,$$

而面积分 $\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega$ 就是定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的另一种表述形式。

2. 如果 (Ω) 是 xOy 平面上的区域 (σ) ,那么 f 就是定义在 (σ) 上的二元函数, $\Delta\Omega_k$ 就是子区域的面积 $\Delta\sigma_k$,从而 (1.4) 式也可更具体地写成

$$\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k,$$

称为 f 在区域 (σ) 上的二重积分,其中 (ξ_k, η_k) 就是点 M_k 的直角坐标.为了明确显示二重积分有两个独立的积分变量,我们常用两个积分符号把二重积分表示为

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k \quad (2.2)$$

其中 (σ) 就是二重积分的积分域, $d\sigma$ 称为面积微元。

3. 如果 (Ω) 为三维空间的区域 (V) , 那么 f 就是定义在 (V) 上的三元函数, $\Delta\Omega_k$ 就是子区域的体积 ΔV_k . 为了明确显示这时的积分有三个独立的积分变量, 我们常采用三个积分符号, 而把积分式具体写成

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k \quad (2.3)$$

称为 f 在区域 (V) 上的三重积分, 其中 (ξ_k, η_k, ζ_k) 为点 M_k 的直角坐标, (V) 是三重积分的积分域, dV 通常称为体积微元。

4. 如果 (Ω) 为一条平面 (或空间) 的曲线弧段 (C) , 那么 f 就是定义在弧段 (C) 上的二元 (或三元) 函数, $\Delta\Omega_k$ 就是子弧段的弧长 Δs_k , 于是积分式可以具体写成

$$\int_{(C)} f(x, y) ds = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta s_k \quad (2.4)$$

$$\int_{(C)} f(x, y, z) ds = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta s_k \quad (2.5)$$

称为 f 在曲线段 (C) 上对弧长的曲线积分, 也称为第一型线积分, 其中 (C) 称为积分路径。

5. 如果 (Ω) 为一片曲面 (S) , 那么 f 就是定义在 (S) 上的三元函数, $\Delta\Omega_k$ 就是子曲面的面积 ΔS_k . 由于点 M 在曲面 (S) 上变化, 它的坐标 x, y, z 中只有两个是独立的, 因此我们用两个积分符号来表示这类积分, 而将积分式具体写为

$$\iint_{(S)} f(x, y, z) dS = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta S_k \quad (2.6)$$

称为 f 在曲面 (S) 上对面积的曲面积分, 也称为第一型面积分。

类似于定积分, 可以证明, 若 (Ω) 是有界闭集且可度量, $f \in C((\Omega))$, 则 f 在 (Ω) 上一定可积。下面我们在 (Ω) 是有界闭集、可度量且被积函数可积的前提下来讨论积分的主要性质。

性质

1. 线性性质:

$$\begin{aligned} \int_{(\Omega)} k f(M) d\Omega &= k \int_{(\Omega)} f(M) d\Omega, \quad k \text{ 为一常数} \\ \int_{(\Omega)} [f(M) \pm g(M)] d\Omega &= \int_{(\Omega)} f(M) d\Omega \pm \int_{(\Omega)} g(M) d\Omega \end{aligned}$$

2. 对积分域的可加性: 设 $(\Omega) = (\Omega_1) \cup (\Omega_2)$, 且 (Ω_1) 与 (Ω_2) 除边界点外无公共部分, 则

$$\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega = \int_{(\Omega_1)} f(M) d\Omega + \int_{(\Omega_2)} f(M) d\Omega.$$

3. 积分不等式若 $f(M) \leq g(M), \forall M \in (\Omega)$, 则

$$\begin{aligned} \int_{(\Omega)} f(M) d\Omega &\leq \int_{(\Omega)} g(M) d\Omega \\ \left| \int_{(\Omega)} f(M) d\Omega \right| &\leq \int_{(\Omega)} |f(M)| d\Omega \end{aligned}$$

若 $l \leq f(M) \leq L, \forall M \in (\Omega)$, 则

$$l\Omega \leq \int_{(\Omega)} f(M) d\Omega \leq L\Omega$$

4. 中值定理: 设 $f \in C((\Omega)), (\Omega)$ 为一有界连通闭集, 则在 (Ω) 上至少存在一点 P , 使

$$\int_{(\Omega)} f(M) d\Omega = f(P) \Omega \quad (2.7)$$

2.2 二重积分的计算(★★★)

2.2.1 二重积分的几何意义

设 $(\sigma) \subseteq \mathbb{R}^2$ 是有界闭区域, $f \in C((\sigma))$ 。由定义, f 在 (σ) 上的二重积分就是下列和式的极限

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta\sigma_k$$

不妨设 $f(x, y) \geq 0$, 于是二元函数 $z = f(x, y)$ 在几何上就表示位于域 (σ) 上方的曲面 (S) , 它在 xOy 坐标平面上的投影就是闭域 (σ) 。以 (σ) 的边界为准线作母线平行于 z 轴的柱面, 便得一以 (σ) 为底, 曲面 (S) 为顶的曲顶柱体。则二重积分 $\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$ 的值等于以 (σ) 为底, (S) 为顶的曲顶柱体的体积。

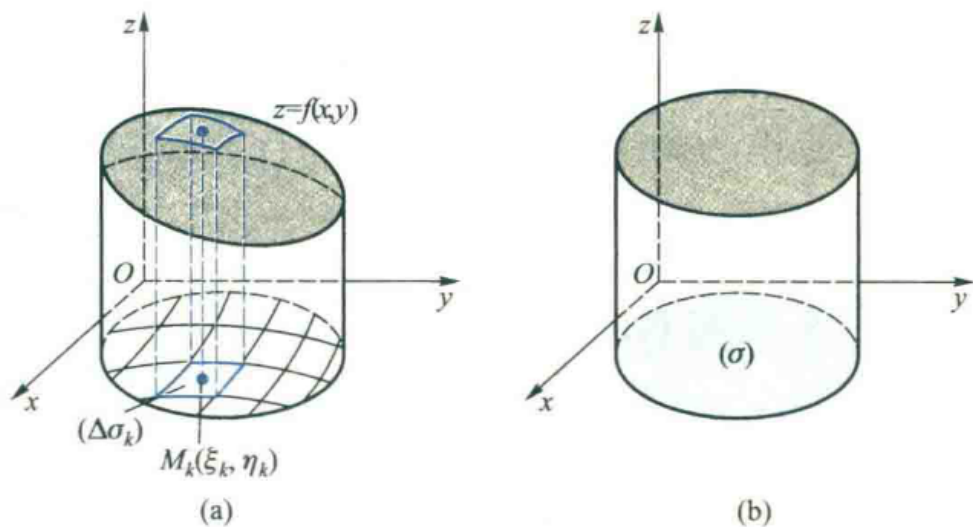


图 2.1: 二重积分的几何意义

我们不再赘述利用积分思想求该曲顶柱体体积的过程, 大致思想可参考“分匀合精”。

2.2.2 直角坐标系下的计算

设 $(\sigma) = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$, 其中 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 均在 $[a, b]$ 上连续, 称这种类型的区域 (σ) 为 x 型区域。在 $[a, b]$ 上任意固定一点 x_1 , 考虑曲顶柱体与平面 $x = x_1$ 的截面面积 $S(x_1)$ 。由图 2.2 易见, 这一截面是由曲线 $\begin{cases} z = f(x, y) \\ x = x_1 \end{cases}$, 在区间 $[y_1(x_1), y_2(x_1)]$ 上所形成的曲边梯形, 它的面积 $S(x_1)$ 可用定积分表示为

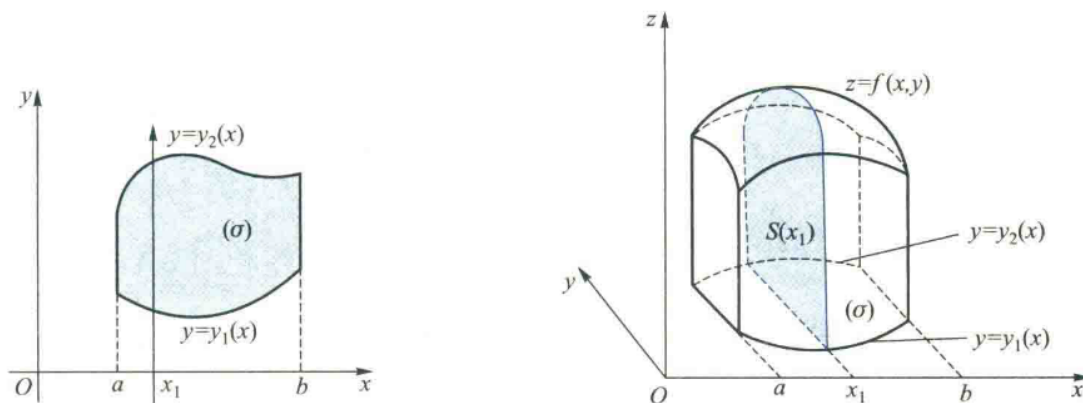
$$S(x_1) = \int_{y_1(x_1)}^{y_2(x_1)} f(x_1, y) dy$$

改记 x_1 为 x , 并让它在 a 与 b 之间变动, 这时截面面积 $S(x)$ 也将随之而变动, 即

$$S(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \quad (2.8)$$

在求上述积分时, x 应看作是常量, 积分变量是 y 。再利用定积分的微元法, 便有曲顶柱体的体积

$$V = \int_a^b S(x) dx = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad (2.9)$$

图 2.2: x 型区域的积分计算

另一方面, 根据二重积分的几何意义, 又有

$$V = \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma$$

所以有

$$V = \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \right] dx \quad (2.10)$$

笔记 我们再次叙述这种积分法的思路: 先固定 x , 把函数 $f(x, y)$ 看作是关于 y 的一元函数, 对 y 从区域 (σ) 的边界 $y_1(x)$ 至 $y_2(x)$ 作定积分; 再将积分后所得的一元函数 $S(x)$, 在区间 $[a, b]$ 上关于 x 作定积分。

这样就把二重积分化成了由接连两次定积分所构成的累次积分(二次积分), 也可把其中的方括号去掉写成

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx \quad \text{或} \quad \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \quad (2.11)$$

例题 2.1 计算 $\iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) d\sigma$, 其中 (σ) 为直线 $x = 1$, $y = 0$ 及抛物线 $y = x^2$ 所围成的区域。

解 画出积分区域 (σ) 如右图所示。将 (σ) 视为 x 型区域, 它在 x 轴上的投影为 $[0, 1]$ 。现在 $\forall x \in [0, 1]$, 作与 y 轴平行同向的直线, 与 (σ) 的下边界和上边界交点的纵坐标分别为 $y = 0$ 与 $y = x^2$ 。先对 y 后对 x 积分得

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} (x^2 + y^2) d\sigma &= \int_0^1 dx \int_0^{x^2} (x^2 + y^2) dy \\ &= \int_0^1 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{x^2} dx \\ &= \int_0^1 \left(x^4 + \frac{x^6}{3} \right) dx = \frac{26}{105} \end{aligned}$$

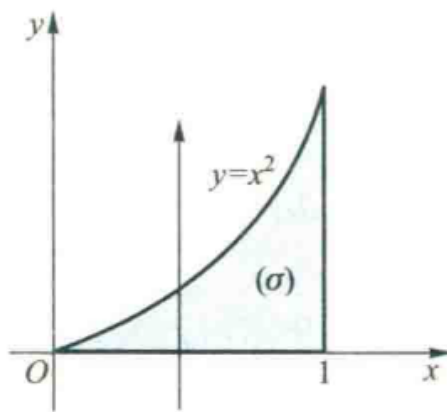


图 2.3: 例 2.1 示意图

设 $(\sigma) = \{(x, y) \mid x_1(y) \leq x \leq x_2(y), c \leq y \leq d\}$, 其中 $x_1(y)$ 与 $x_2(y)$ 均在 $[c, d]$ 上连续, 这种区域也为 y 型区域(图 2.4)。类比 x 型区域, 有

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \quad (2.12)$$

在这里的累次积分是先固定 y 对 x 计算由 $x_1(y)$ 到 $x_2(y)$ 的定积分, 其中 $x_1(y)$ 与 $x_2(y)$ 分别表示 (σ) 的左段边界与右段边界上的点对应于 y 的横坐标, 然后再将积分后所得的函数对 y 在区间 $[c, d]$ 上求定积分。

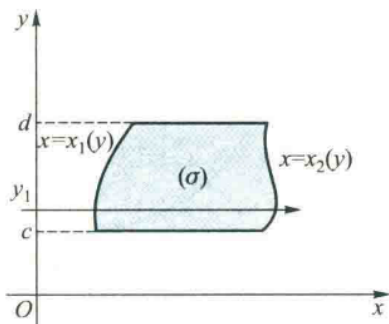


图 2.4: y 型区域的积分计算

如果积分域 (σ) 既是 x 型区域又是 y 型区域, 那么可知

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx dy \quad (2.13)$$

2.13 式表明: 当 $f(x, y)$ 在积分域 (σ) 上连续时, 累次积分可以交换积分顺序。

例题 2.2 计算 $\iint_{(\sigma)} xy d\sigma$, 其中 (σ) 为抛物线 $y^2 = x$ 与直线 $y = x - 2$ 所围成的区域。

解 画出积分域 (σ) 如右图所示。如果按照 x 型区域计算需要分成两部分, 较为麻烦。因此将 (σ) 视为 y 型区域, 为向 y 轴投影, 先求出直线与抛物线的交点, 它们是 $A(4, 2)$ 与 $B(1, -1)$ 于是 (σ) 在 y 轴上的投影为区间 $[-1, 2]$ 现在 $\forall y \in [-1, 2]$, 作与 x 轴平行同向的直线, 穿入、穿出 (σ) 边界点的横坐标分别为 $x = y^2$ 与 $x = y + 2$ 。于是先对 x 后对 y 积分得

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} xy d\sigma &= \int_{-1}^2 dy \int_{y^2}^{y+2} xy dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^2 y [(y+2)^2 - y^4] dy = 5\frac{5}{8} \end{aligned}$$

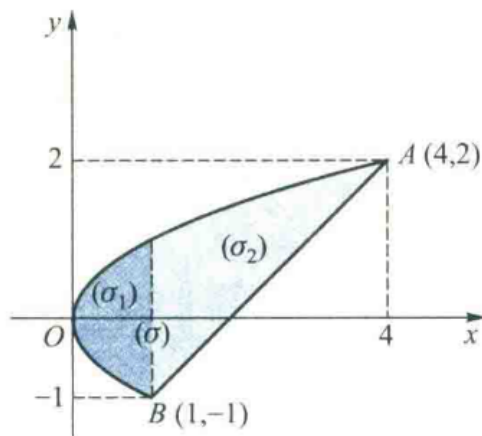


图 2.5: 例 2.2 示意图

笔记 灵活选择积分顺序可以简化计算复杂度。有时候, 错误的顺序甚至不能一般性求出积分, 如积分

$$\iint_{(\sigma)} \frac{\sin x}{x} d\sigma = 1 - \sin 1$$

其中 (σ) 为直线 $y = x$ 与抛物线 $y = x^2$ 所围成的区域。读者可以利用两种积分区域的计算方法进行尝试。当积分域无法用 x, y 型区域表示时, 通常将其划分为几个小区域, 利用积分区间可加性逐个计算后求和。

例题 2.3 交换累次积分的积分顺序:

$$I = \int_{-2}^0 dx \int_0^{\frac{2+x}{2}} f(x, y) dy + \int_0^2 dx \int_0^{\frac{2-x}{2}} f(x, y) dy$$

解 先确定积分域 (σ) 。可知两积分 x, y 的变化范围分别是

$$\begin{aligned} 0 &\leq y \leq \frac{2+x}{2}, & -2 &\leq x \leq 0 \\ 0 &\leq y \leq \frac{2-x}{2}, & 0 &\leq x \leq 2 \end{aligned}$$

由这些不等式可画出积分域 (σ) 如右图所示。然后将原积分化为先对 x 后对 y 的累次积分, 得

$$I = \int_0^1 dy \int_{2y-2}^{2-2y} f(x, y) dx$$

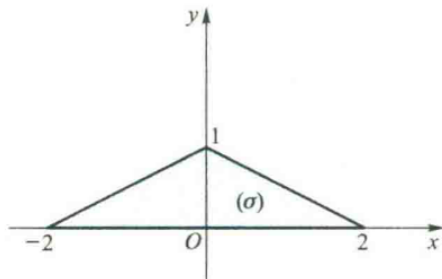


图 2.6: 例 2.3 示意图

对于一些积分,通常可以使用对称性简化计算过程。

定理 2.1 (坐标轴对称性的二重积分)

设二元函数 $f(x, y)$ 在平面区域 (σ) 连续, 且 (σ) 关于 x 轴对称, 且 x 轴上(下)方子区域为 (σ_0) 则有

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \begin{cases} 0, & f \text{ 是关于 } y \text{ 的奇函数} \\ 2 \iint_{(\sigma_0)} f(x, y) d\sigma, & f \text{ 是关于 } y \text{ 的偶函数} \end{cases} \quad (2.14)$$

关于 y 轴对称时, 同理。

例题 2.4 计算

$$\iint_{(\sigma)} (x^2 y^2 + xy^3 e^{x^2+y^2}) d\sigma$$

其中 (σ) 为直线 $y = x$, $y = -1$ 与 $x = 1$ 所围成的区域。

解 画出积分域 (σ) 如右图所示的三角形 ABC 。由于被积函数复杂, 为了利用对称性, 作辅助线 $y = -x$, 将 (σ) 划分为由 OAB 所构成的三角形域 (σ_1) 与由 OBC 所构成的 (σ_2) , 它们分别关于 y 轴和 x 轴对称。将积分拆开有

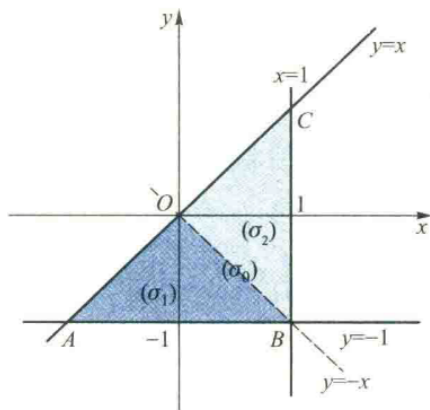


图 2.7: 例 2.4 示意图

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} (x^2 y^2 + xy^3 e^{x^2+y^2}) d\sigma &= \iint_{(\sigma)} x^2 y^2 d\sigma + \iint_{(\sigma)} xy^3 e^{x^2+y^2} d\sigma \\ &= \iint_{(\sigma)} x^2 y^2 d\sigma + \iint_{(\sigma_1)} xy^3 e^{x^2+y^2} d\sigma + \iint_{(\sigma_2)} xy^3 e^{x^2+y^2} d\sigma \end{aligned}$$

由于 (σ_1) 关于 y 轴对称, 而被积函数 $xy^3 e^{x^2+y^2}$ 是 x 的奇函数, 由对称性可知

$$\iint_{(\sigma_1)} xy^3 e^{x^2+y^2} d\sigma = 0$$

由于 (σ_2) 关于 x 轴对称, 而被积函数也是 y 的奇函数, 所以

$$\iint_{(\sigma_2)} xy^3 e^{x^2+y^2} d\sigma = 0$$

再注意到 $x^2 y^2$ 关于 x 与 y 都是偶函数, 将由 x 轴、 y 轴、 $x = 1$ 、 $y = -1$ 所围成的正方形域记作 (σ_0) , 于是分别利用关于 y 轴和 x 轴的对称性可得

$$\iint_{(\sigma)} x^2 y^2 d\sigma = 2 \iint_{(\sigma_0)} x^2 y^2 d\sigma = 2 \int_0^1 x^2 dx \int_{-1}^0 y^2 dy = \frac{2}{9}$$

综上所述, 所求二重积分的值等于 $\frac{2}{9}$ 。

定理 2.2 (轮换对称性的二重积分)

设二元函数 $f(x, y)$ 在平面区域 (σ) 连续, 且 (σ) 关于 $y = x$ 对称, 并被该直线分为了 (σ_1) , (σ_2) 两个子区域, 则有下列关系式。

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \iint_{(\sigma)} f(y, x) d\sigma = \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} [f(x, y) + f(y, x)] d\sigma \quad (2.15)$$

例题 2.5 设 f 在 $[a, b]$ 上连续且恒为正, 设区域 $(\sigma) = \{(x, y) | a \leq x, y \leq b\}$, 证明

$$\iint_{(\sigma)} \frac{f(y)}{f(x)} d\sigma \geq (b-a)^2 \quad (2.16)$$

证明 区域 (σ) 显然关于 $y = x$ 对称, 根据式 2.15 有

$$\iint_{(\sigma)} \frac{f(y)}{f(x)} d\sigma = \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} \left[\frac{f(y)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(y)} \right] d\sigma$$

对右侧被积式应用基本不等式, 得到

$$\frac{f(y)}{f(x)} + \frac{f(x)}{f(y)} \geq 2\sqrt{\frac{f(y)}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{f(y)}} = 2$$

代入原式即证。

2.2.3 极坐标系下的计算

在直角坐标系中, 根据二重积分的定义, 不断划分方形网格后, 积分变成

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} f(x, y) \Delta\sigma = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} f(x, y) \Delta x \Delta y$$

我们把最后的和式极限记作 $\iint f(x, y) dx dy$, 其中 $dx dy$ 称为**直角坐标的面积微元**。设被积函数在积分域上连续, 若积分域 (σ) 与被积函数 $f(x, y)$ 用极坐标表示更为简便, 则应考虑化为极坐标系下的二重积分来计算。为此建立极坐标系, 令极点与 xOy 直角坐标系的原点重合, x 轴取为极轴。利用直角坐标与极坐标的转换公式有

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, \quad (0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

把 (σ) 的边界曲线方程化成极坐标, 并将被积函数变换为

$$f(x, y) = f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \quad (2.17)$$

不难推导出, 极坐标的面积微元为

$$d\sigma = \rho d\rho d\theta \quad (2.18)$$

因此也就有

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) dx dy = \iint_{(\sigma)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) d\sigma = \rho d\rho d\theta \quad (2.19)$$

 **笔记** 下面讨论极坐标系下, 积分域该如何表示。我们用射线 $\theta = C$ 切割区域 (σ) 时, 开始于 $\theta = \alpha$, 终止于 $\theta = \beta$, 而当 $\theta \in [\alpha, \beta]$ 时, (σ) 的边界曲线被分成了关于 ρ 的两个单值支, 其方程分别记为 $\rho = \rho_1(\theta)$ 与 $\rho = \rho_2(\theta) (\alpha \leq \theta \leq \beta)$ 。 $\forall \theta \in (\alpha, \beta)$, 作从坐标原点出发的射线, 穿入、穿出 (σ) 边界点的 ρ 坐标分别为 $\rho_1(\theta), \rho_2(\theta)$ 。于是 $[\rho_1(\theta), \rho_2(\theta)]$ 便是 ρ 的变化区间。此时可以类比直角坐标系下的累次积分, 得到

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma &= \iint_{(\sigma)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{\rho_1(\theta)}^{\rho_2(\theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho \end{aligned} \quad (2.20)$$

当用同心圆 $\rho = C$ 切割 (σ) 时, 开始于 $\rho = a$, 终止于 $\rho = b$ 。这时, (σ) 的边界曲线被分成关于 θ 的两个单值支 $\theta = \theta_1(\rho)$ 与 $\theta = \theta_2(\rho)$ 。 $\forall \rho \in (a, b)$, 用以原点为圆心、 ρ 为半径的圆周逆时针方向穿过 (σ) , 穿入、穿出 (σ) 边界点的 θ 坐标分别为 $\theta_1(\rho)$ 与 $\theta_2(\rho)$ 。于是 $[\theta_1(\rho), \theta_2(\rho)]$ 便是 θ 的变化区间, 可以得到另一种累次积分法

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma &= \iint_{(\sigma)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\rho d\theta \\ &= \int_a^b d\rho \int_{\theta_1(\rho)}^{\theta_2(\rho)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \rho d\theta \end{aligned} \quad (2.21)$$

例题 2.6 计算由不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2, \quad x^2 + y^2 \leq 2ay$$

所确定的立体的体积。

解 该立体体积为第一卦限中体积的 4 倍。第一卦限的部分是以球面 $z = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$ 为顶, 以 xOy 平面上的半域

$$(\sigma) = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 2ay, x \geq 0\}$$

为底的曲顶柱体, 把域 (σ) 用极坐标表示为

$$\{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2a \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$$

因此可知

$$\begin{aligned} V &= 4 \iint_{(\sigma)} \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2} d\sigma \\ &= 4 \iint_{(\sigma)} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho d\theta \end{aligned}$$

由 $\theta = 0$ 到 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 切割积分域, 对 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 的每一确定的 θ 值, ρ 的变化由 $\rho = 0$ 到 $\rho = 2a \sin \theta$, 所以有

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2a \sin \theta} \sqrt{4a^2 - \rho^2} \rho d\rho \\ &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{1}{3} (4a^2 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} \right]_0^{2a \sin \theta} d\theta \\ &= \frac{32a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^3 \theta) d\theta \\ &= \frac{16}{9} a^3 (3\pi - 4) \end{aligned}$$

注 将直角坐标的面积微元转化为极坐标的面积微元时, 除了变量的微分外一定记得加 ρ 。

例题 2.7 计算 $\iint_{(x)} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma$, 其中 (σ) 为圆域 $x^2 + y^2 \leq R^2$ 。

解 采用极坐标, 则积分域

$$(\sigma) = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq R, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

于是

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} e^{-(x^2+y^2)} d\sigma &= \iint_{(\sigma)} e^{-\rho^2} \rho d\rho d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R e^{-\rho^2} \rho d\rho \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} (1 - e^{-R^2}) d\theta = (1 - e^{-R^2})\pi \end{aligned}$$

2.2.4 一般曲线坐标下的计算

先介绍正则变换的定义。

定义 2.2 (正则变换)

作变换

$$T: \begin{cases} u = u(x, y), & (x, y) \in (\sigma) \\ v = v(x, y), & (u, v) \in (\sigma') \end{cases}$$

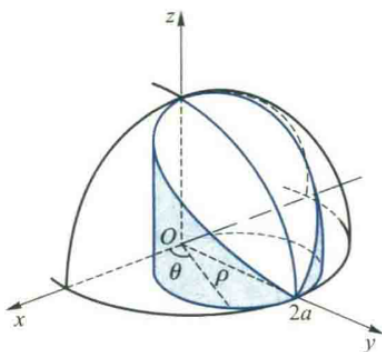


图 2.8: 例 2.5 示意图 A

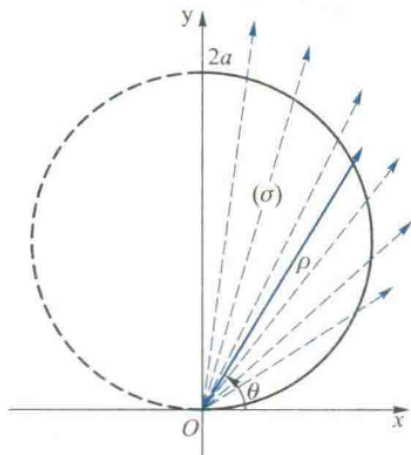


图 2.9: 例 2.5 示意图 B

其中 (σ) 与 (σ') 均为平面有界区域. 若以下三个条件满足

1. 函数 $u, v \in C^{(1)}((\sigma))$

2. Jacobi 行列式 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix} \neq 0, \forall (x, y) \in (\sigma)$

3. 此变换将 xOy 直角坐标平面中的域 (σ) 一一对应地映射为 uOv 直角坐标平面中的 (σ') 则称变换 T 为正则变换。



 **笔记** 可以证明, 在正则变换 T 下, 存在唯一的逆变换

$$T^{-1}: \begin{cases} x = x(u, v), \\ y = y(u, v), \end{cases} \quad (u, v) \in (\sigma')$$

且该变换也是正则变换。在正则变换 $T: (\sigma) \rightarrow (\sigma')$ 下, 可以证明下述恒等式

$$d\sigma = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| d\sigma' \quad (2.22)$$

其中 $d\sigma' = du dv$ 是 uOv 直角坐标平面上的面积微元。上式表明, 映射 T 将 xOy 平面上的面积微元 $d\sigma$ 映射成 uOv 平面上的面积微元 $d\sigma'$, 使面积产生了伸缩, 伸缩系数为 $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|$ 。于是, 在映射 T 的作用下, xOy 坐标系下的二重积分与 uOv 坐标系下二重积分之间的关系为

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = \iint_{(\sigma')} f[x(u, v), y(u, v)] \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| d\sigma' \quad (2.23)$$

应当指出, 如果 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ 在域 (σ') 上的个别点或一条曲线上为零, 式 2.23 仍成立。

例题 2.8 计算

$$I = \iint_{(\sigma)} x^2 d\sigma$$

其中 (σ) 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的内部。

解 由于积分域是椭圆, 为简化积分域的边界曲线方程, 我们运用曲线坐标变换

$$\frac{x^2}{4} = \rho^2 \cos^2 \theta, \quad \frac{y^2}{9} = \rho^2 \sin^2 \theta$$

即有

$$x = 2\rho \cos \theta, \quad y = 3\rho \sin \theta, \quad (0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

此变换的逆变换将 xOy 平面上所给的椭圆映射成 $\theta O\rho$ 直角坐标平面上的矩形域

$$(\sigma') = \{(\theta, \rho) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq 1\}$$

由于

$$d\sigma = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\theta, \rho)} \right| d\rho d\theta = 6\rho d\rho d\theta$$

从而有

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(\sigma')} 4\rho^2 \cos^2 \theta \cdot 6\rho d\rho d\theta \\ &= 24 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \int_0^1 \rho^3 d\rho \\ &= 6 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta \\ &= 6\pi \end{aligned}$$

形如上例中所用的变换

$$x = a\rho \cos \theta, \quad y = b\rho \sin \theta, \quad (0 \leq \rho < +\infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

称为广义极坐标变换。在此变换下, 面积微元 $d\sigma = ab\rho d\rho d\theta$ 。

例题 2.9 计算 $\iint_{(\sigma)} \sqrt{xy} d\sigma$, 其中 (σ) 为由曲线 $xy=1, xy=2, y=x, y=4x$ ($x>0, y>0$) 所围成的区域。

解 为了使所给积分容易计算, 采用曲线坐标变换

$$u = xy, \quad v = \frac{y}{x}$$

在此变换下 (σ) 的边界曲线映射成 uOv 直角坐标平面上的矩形域

$$(\sigma') = \{(u, v) \mid 1 \leq u \leq 2, 1 \leq v \leq 4\}$$

根据第一章的式 1.75, 有

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} &= \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}} \\ &= \frac{1}{\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}} = \frac{1}{2\frac{y}{x}} = \frac{1}{2v} \end{aligned}$$

于是可得

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} \sqrt{xy} d\sigma &= \iint_{(\sigma')} \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2v} du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_1^4 \frac{1}{v} dv \int_1^2 \sqrt{u} du = \frac{2}{3} (2\sqrt{2} - 1) \ln 2 \end{aligned}$$

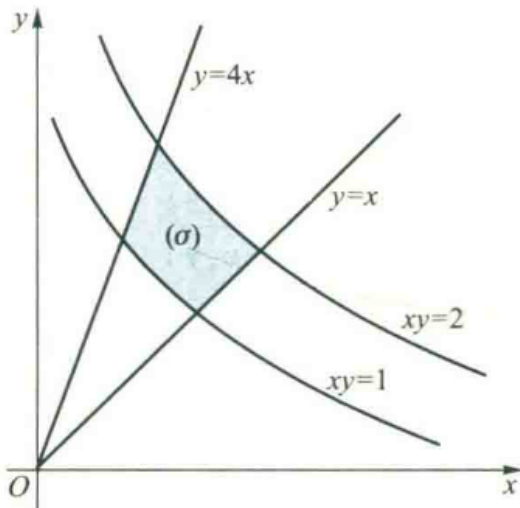


图 2.10: 例 2.9 示意图

例题 2.10 设 $f(x)$ 为连续的奇函数, 证明

$$\iint_{(\sigma)} e^{f(x+y)} d\sigma \geq 2$$

其中 (σ) 是由 $|x| + |y| = 1$ 围成的区域。

证明 使用变量变换进行证明积分不等式, 令 $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$, 不难得出 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -\frac{1}{2}$, 且 (σ) 经过变换后的区域为正方形区域 $-1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1$ 。从而有

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} e^{f(x+y)} d\sigma &= \int_{-1}^1 dv \int_{-1}^1 \frac{1}{2} e^{f(u)} du \\ &= \int_{-1}^1 e^{f(u)} du = \int_{-1}^0 e^{f(u)} du + \int_0^1 e^{f(u)} du \end{aligned}$$

令 $u = -t, t \in [-1, 0]$, 并考虑奇函数性质, 则

$$\int_{-1}^0 e^{f(u)} du = \int_0^1 e^{f(-t)} dt = \int_0^1 e^{-f(t)} dt = \int_0^1 e^{-f(u)} du$$

因此, 由基本不等式得

$$\begin{aligned} \iint_{(\sigma)} e^{f(x+y)} d\sigma &= \int_0^1 [e^{-f(u)} + e^{f(u)}] du \\ &\geq \int_0^1 2\sqrt{e^{-f(u)} e^{f(u)}} du = \int_0^1 2 du = 2 \end{aligned}$$

最后, 来介绍二重积分的中值定理以及其应用。

定理 2.3 (二重积分的中值定理)

设函数 $f(x, y)$ 在有界闭区域 (σ) 上连续, 则存在点 $(\xi, \eta) \in (\sigma)$, 使得

$$\iint_{(\sigma)} f(x, y) d\sigma = f(\xi, \eta) \cdot \sigma \quad (2.24)$$



 **笔记** 在处理二重积分极限问题时, 常常可以用到定理 2.3。

例题 2.11 计算极限

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^4} \iint_{x^2+y^2 \leq r^4} \sin \sqrt{x^2+y^2} d\sigma$$

解 利用二重积分中值定理, $\exists(\xi, \eta) \in (\sigma): x^2 + y^2 \leq r^4$, 使得

$$\iint_{x^2+y^2 \leq r^4} \sin \sqrt{x^2+y^2} d\sigma = \sin \sqrt{\xi^2+\eta^2} \iint_{x^2+y^2 \leq r^4} d\sigma = \pi r^4 \sin \sqrt{\xi^2+\eta^2}$$

当 $r \rightarrow 0$ 时, $(\xi, \eta) \rightarrow (0, 0)$, 则

$$\text{原式} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\pi r^4 \sin \sqrt{\xi^2+\eta^2}}{r^4} = \pi \lim_{r \rightarrow 0} \sin \sqrt{\xi^2+\eta^2} = 0$$

2.3 三重积分的计算(★★★)

2.3.1 直角坐标下的累次积分法

在本章第一节中我们已知道, 三元函数 $u = f(x, y, z)$ 在空间区域 (V) 上的三重积分就是下列和式极限

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k, \zeta_k) \Delta V_k$$

而且当 $f \in C((V))$ 时, 其三重积分一定存在, 今后我们总假定被积函数 $f \in C((V))$ 。设积分域

$$(V) = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in (\sigma) \subseteq \mathbb{R}^2\}$$

其中 $z_1 \in C((\sigma)), z_2 \in C((\sigma)), (\sigma)$ 是 (V) 在 xOy 平面的投影区域。

把 (V) 在 xOy 平面上的投影区域 (σ) 分成若干子域 $(\Delta\sigma)$, 以每一子域 $(\Delta\sigma)$ 的边界曲线为准线, 作母线平行于 z 轴的柱面把域 (V) 分割成了若干竖长条, 再用平行于 xOy 平面的平面把这些竖长条切割成若干小柱台, 于是这些小柱台 (ΔV) 的体积为

$$\Delta V = \Delta z \Delta \sigma$$

在 (ΔV) 内任取一点 $P(x, y, z)$, 它在 xOy 平面的投影点 $M(x, y, 0)$ 必在 $(\Delta\sigma)$ 内, 于是由三重积分定义可知

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(V)} f(x, y, z) \Delta z \Delta \sigma$$

如果我们将乘积项 $f(x, y, z) \Delta z \Delta \sigma$ “无限累加”时, 先固定 (x, y) 和 $\Delta\sigma$, 沿竖长条 (即沿 z 轴方向) 进行, 并把相同的公因子 $\Delta\sigma$ 提出, 然后再把 (σ) 上各竖长条中求得和 “无限累加”, 那么便有

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(V)} f(x, y, z) \Delta z \Delta \sigma = \lim_{d' \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} \left(\lim_{\max \Delta z \rightarrow 0} \sum_z f(x, y, z) \Delta z \right) \Delta \sigma,$$

其中 d' 是 (σ) 中各 $(\Delta\sigma)$ 的直径中最大者, 由定积分与二重积分的概念知

$$\lim_{\max \Delta z \rightarrow 0} \sum_z f(x, y, z) \Delta z = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz = \Phi(x, y)$$

$$\lim_{d' \rightarrow 0} \sum_{(\sigma)} \Phi(x, y) \Delta \sigma = \iint_{(\sigma)} \Phi(x, y) d\sigma$$

于是得

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iint_{(\sigma)} \left[\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right] d\sigma \quad (2.25)$$

这样, 就把三重积分化成了单积分与二重积分的累次积分, 这种积分顺序简称为“先单后重”。

 **笔记** 此类积分顺序需要知道: 积分区域在某平面的投影表示, 积分区域的“上下面”。

例题 2.12 计算积分

$$I = \iiint_{(V)} xyz dV$$

其中 (V) 由三个坐标面 $x = 0, y = 0, z = 0$ 和平面 $x + y + z = 1$ 所围成。

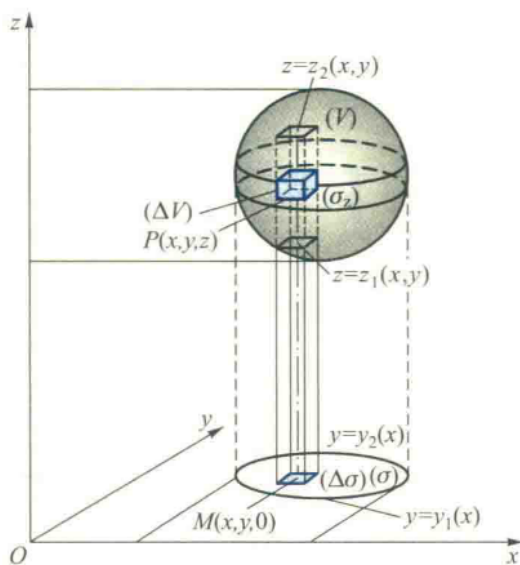


图 2.11: 三重积分的计算

解 首先画出积分域 (V) 如右图所示。容易看出 (V) 在 xOy 平面上的投影区域 (σ) 为三角形区域

$$(\sigma) = \{(x, y) \mid x + y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$$

于是由先单后重的积分次序得

$$\begin{aligned} I &= \iint_{(\sigma)} \left(\int_0^{1-x-y} xyz dz \right) d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} xyz^2 \Big|_0^{1-x-y} d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \iint_{(\sigma)} xy(1-x-y)^2 d\sigma \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} xy(1-x-y)^2 dy = \frac{1}{720} \end{aligned}$$

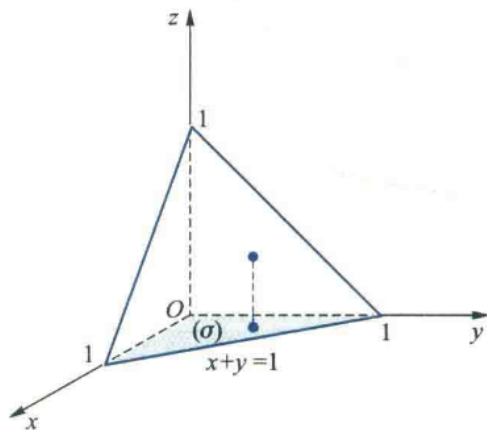


图 2.12: 例 2.12 示意图

如果我们把积分域 (V) 被平行于 xOy 平面的平面所截出的平面区域记作 (σ_z) , 并将 z 的变化范围设为 $[a, b]$ 。由三重积分定义, 在“无限累加”乘积项 $f(x, y, z)\Delta z\Delta\sigma$ 时, 先固定 z 和 Δz , 在以 (σ_z) 为底、厚度为 Δz 的薄层上“无限累加”, 把公因子 Δz 提出; 然后再在区间 $[a, b]$ 上把各薄层所求得和“无限累加”, 那么便有

$$\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{(V)} f(x, y, z)\Delta z\Delta\sigma = \lim_{\max \Delta z \rightarrow 0} \sum_z \left(\lim_{d' \rightarrow 0} \sum_{(\sigma_z)} f(x, y, z)\Delta\sigma \right) \Delta z$$

其中 d' 为 (σ_z) 中各 $(\Delta\sigma)$ 的直径中的最大者。于是得

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \int_a^b \left[\iint_{(\sigma_z)} f(x, y, z) d\sigma \right] dz \quad (2.26)$$

这种积分顺序简称为“先重后单”。

笔记 此类积分顺序需要知道: 积分区域对于某变元的截面表示, 该变元在积分区域的定义域。

例题 2.13 计算积分

$$I = \iiint_{(V)} z^2 dV, \quad (V) = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}$$

解 由于被积函数仅是 z 的函数, 所以为计算方便, 我们采用先重后单的积分顺序得

$$I = \int_{-c}^c \left(\iint_{(\sigma_z)} z^2 d\sigma \right) dz = \int_{-c}^c \left(z^2 \iint_{(\sigma_z)} d\sigma \right) dz$$

其中 (σ_z) 为椭球体 (V) 被平行于 xOy 平面的平面所截出的截面, 它就是平面 $z = z$ 上的椭圆域

$$(\sigma_z) = \left\{ (x, y) \mid \frac{x^2}{a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} + \frac{y^2}{b^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)} \leq 1, |z| \leq c \right\}$$

由于椭圆域 (σ_z) 的面积为

$$\iint_{(\sigma_z)} d\sigma = \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right)$$

所以

$$I = \int_{-c}^c \pi ab \left(1 - \frac{z^2}{c^2}\right) z^2 dz = \frac{4}{15} \pi abc^3$$

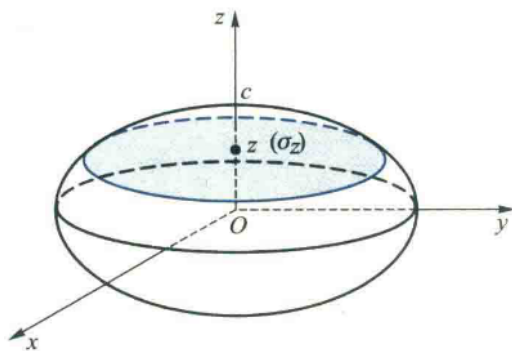


图 2.13: 例 2.13 示意图

笔记 两种不同的积分次序可以分别视作“土豆条”和“土豆丝”, 如何选取积分次序取决于积分域 (V) 的特性。类似于二重积分, 三重积分也可利用对称性等技巧简化计算。

定理 2.4 (坐标面对称性的三重积分)

设三元函数 $f(x, y, z)$ 在区域 (V) 连续, 且 (V) 关于 yOz 平面对称, $(V_1), (V_2)$ 是 (V) 被平面 yOz 截成的两部分区域, 则有

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \begin{cases} 0, & f \text{ 是关于 } x \text{ 的奇函数} \\ 2 \iint_{(V_1)} f(x, y, z) dV, & f \text{ 是关于 } x \text{ 的偶函数}; i = 1, 2 \end{cases} \quad (2.27)$$

关于其他平面对称时, 同理。

**例题 2.14** 设有空间闭区域

$$(V_1) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq \mathbb{R}^2, z \geq 0\}$$

$$(V_2) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq \mathbb{R}^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$$

判断 $\iiint_{(V_1)} f(x, y, z) dV = 4 \iiint_{(V_2)} f(x, y, z) dV$ 是否成立, 其中 $f(x, y, z)$ 可以取 x, y, z, xyz 。

解 由定理 2.4 有

$$\iiint_{(V_1)} x dV = \iiint_{(V_1)} y dV = \iiint_{(V_1)} xyz dV = 0$$

而积分域为 (V_2) 时均不为零。当 $f(x, y, z) = z$ 时, 根据奇偶性得到

$$\iiint_{(V_1)} z dV = 2 \iiint_{(V_3)} z dV = 4 \iiint_{(V_2)} z dV$$

其中 $(V_3) = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq \mathbb{R}^2, z \geq 0, x \geq 0\}$

2.3.2 一般曲线坐标下的三重积分**2.3.2.1 一般曲线坐标**

类比于二重积分的坐标变换, 设正则变换

$$u = u(x, y, z), \quad v = v(x, y, z), \quad w = w(x, y, z)$$

$$(x, y, z) \in (V), \quad (u, v, w) \in (V')$$

其中 (V) 与 (V') 均为 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭域, 函数 $u, v, w \in C^{(1)}((V))$, 且 Jacobi 行列式非零, 则存在唯一逆变换

$$x = x(u, v, w), \quad y = y(u, v, w), \quad z = z(u, v, w), \quad (u, v, w) \in (V')$$

在 $Ouvw$ 直角坐标空间, 用坐标面族 $u = c_1, v = c_2, w = c_3$ 来划分积分区域 (V') , 可得体积微元 $dV' = du dv dw$ 。它在 $Oxyz$ 空间上对应于由曲面族

$$u(x, y, z) = c_1, \quad v(x, y, z) = c_2, \quad w(x, y, z) = c_3$$

划分区域 (V) 所得的体积微元 dV 。像二重积分一样可以证明 dV 与 dV' 有如下关系:

$$dV = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| dV' = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \quad (2.28)$$

其中

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v & x_w \\ y_u & y_v & y_w \\ z_u & z_v & z_w \end{vmatrix} \quad (2.29)$$

因此, 三重积分经过变换后可以变成

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V')} f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)] \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \quad (2.30)$$

例题 2.15 计算 $I = \iiint_{(V)} (x+y+z) \cos(x+y+z)^2 dV$, 其中

$$(V) = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x-y \leq 1, 0 \leq x-z \leq 1, 0 \leq x+y+z \leq 1\}$$

解 为了使积分域 (V) 变得简单, 我们利用坐标变换

$$x-y=u, \quad x-z=v, \quad x+y+z=w$$

由于

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3$$

所以

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)}} = \frac{1}{3}$$

于是得

$$I = \iiint_{(V)} w \cos w^2 \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw = \frac{1}{3} \iiint_{(V)} w \cos w^2 du dv dw$$

再用 u, v, w 表示 (V) , 得

$$(V) = \{(u, v, w) \mid 0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1, 0 \leq w \leq 1\}$$

因此

$$I = \int_0^1 du \int_0^1 dv \int_0^1 \frac{1}{3} w \cos w^2 dw = \frac{1}{6} \sin 1$$

2.3.2.2 柱面坐标

作柱面坐标变换

$$x = \rho \cos \theta, y = \rho \sin \theta, z = z \quad (2.31)$$

由于

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -\rho \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \rho \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \quad (2.32)$$

从而当 $\rho \neq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$ 时是正则变换。于是空间中点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 也可用坐标 (ρ_0, θ_0, z_0) 表示, 它是圆柱面 $x^2 + y^2 = \rho_0^2$ (即 $\rho = \rho_0$), 过 z 轴且对 xOz 平面的转角为 $\theta = \theta_0$ 的半平面 $y = x \tan \theta_0$ (即 $\theta = \theta_0$), 以及平面 $z = z_0$ 的交点, 称为点 P_0 的柱面坐标。

从而

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz \quad (2.33)$$

其中 (V) 的边界曲面由柱面坐标表示。

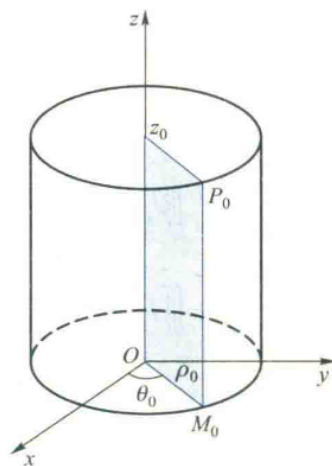


图 2.14: 柱面坐标变换

笔记 如果积分域 (V) 在 xOy 平面上的投影区域为 (σ) , 且 (V) 的边界曲面可关于 z 被分成两个单值曲面 $z = z_1(x, y), z = z_2(x, y), (x, y) \in (\sigma)$ 。那么把 (3.11) 式右端在柱面坐标下的三重积分化成对 z 的定积分与关于 (σ) 的二重积分的累次积分得

$$\iiint_{(V)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) \rho d\rho d\theta dz = \iint_{(\sigma)} \rho d\rho d\theta \int_{z_1(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)}^{z_2(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)} f(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta, z) dz \quad (2.34)$$

例题 2.16 计算

$$I = \iiint_{(V)} z dV$$

(V) 是由旋转抛物面 $z = x^2 + y^2$, 圆柱面 $x^2 + y^2 = 2y$ 与平面 $z = 0$ 所围区域位于抛物面之外、 xOy 平面之上部分。

解 见右图, 积分域 (V) 在 xOy 平面上的投影区域 (σ) 的边界曲线为圆周 $x^2 + y^2 = 2y$ 。因此, 用柱面坐标计算比较方便。利用直角坐标与柱面坐标的关系, 将积分域的边界曲面方程化成柱面坐标得

$$z = \rho^2, \quad \rho = 2 \sin \theta, \quad z = 0$$

从而

$$I = \iiint_{(V)} z dV = \iint_{(\sigma)} \rho d\rho d\theta \int_0^{\rho^2} z dz$$

$$(\sigma) = \{(\rho, \theta) \mid 0 \leq \rho \leq 2 \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi\}$$

注意到 (σ) 关于 y 轴的对称性, 可知

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{2 \sin \theta} \rho^5 d\rho = \frac{64}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \theta d\theta = \frac{5}{3} \pi$$

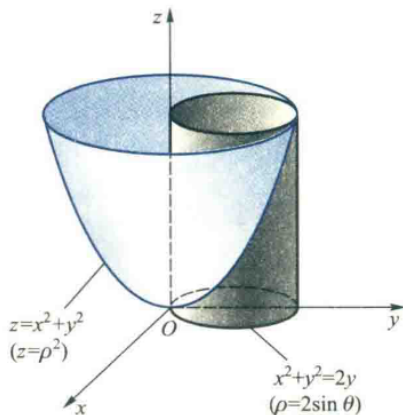


图 2.15: 例 2.15 示意图

2.3.2.3 球面坐标

空间中的点 $P(x, y, z)$ 还可以用以下三个曲面的交点来表示: 半径为 r 的球面, 顶点在原点 O 、对称轴为 z 轴且半顶角为 φ 的圆锥面, 通过 z 轴且对 xOz 坐标平面的转角为 θ 的半平面。数组 (r, φ, θ) 称为点 P 的球面坐标。由右图易见, 直角坐标到球面坐标的变换公式为

$$x = r \sin \varphi \cos \theta, \quad y = r \sin \varphi \sin \theta, \quad z = r \cos \varphi$$

$$(r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

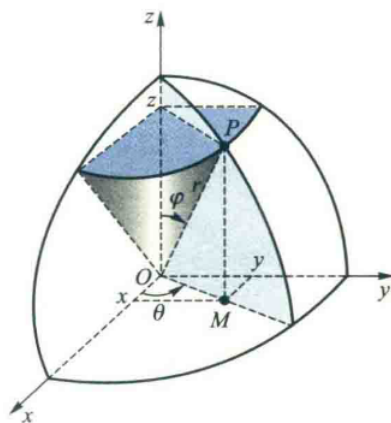


图 2.16: 球面坐标变换

可以计算球面坐标下的体积微元为

$$dV = r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \quad (2.35)$$

于是有

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dV = \iiint_{(V)} f(r \sin \varphi \cos \theta, r \sin \varphi \sin \theta, r \cos \varphi) r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \quad (2.36)$$

其中 (V) 的边界曲面由球面坐标表示。下面用一个题目说明。

例题 2.17 计算 $I = \iiint_{(V)} (x + y + z^2) dV$, 其中

$$(V) = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2\}$$

解 根据对称性, 有

$$\iiint_{(V)} (x + y) dV = 0$$

利用球面坐标, 把 (V) 的边界曲面方程化成球面坐标得

$$r = R, r = 2R \cos \varphi. \text{ 它们的交线为圆 } \begin{cases} r = R \\ \varphi = \frac{\pi}{3} \end{cases}. \text{ 因此}$$

(V) 的边界曲面为

$$r = R, \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}\right)$$

$$r = 2R \cos \varphi, \quad \left(\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

于是有积分

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{(V)} z^2 dV \\ &= \iiint_{(V)} r^2 \cos^2 \varphi r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^R r^4 dr + \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 \varphi \sin \varphi d\varphi \int_0^{2R \cos \varphi} r^4 dr \\ &= \frac{2\pi}{5} R^5 \left(-\frac{1}{3} \cos^3 \varphi \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{3}} + \frac{2\pi}{5} (2R)^5 \left(-\frac{1}{8} \cos^8 \varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{59}{480} \pi R^5 \end{aligned}$$

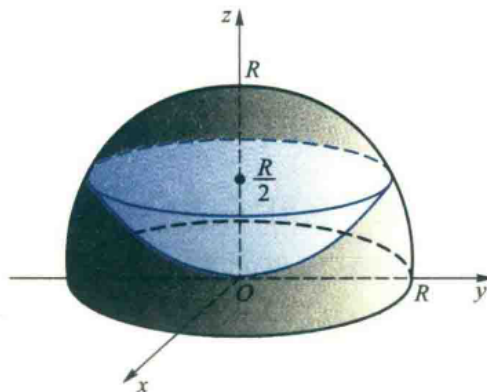


图 2.17: 球面坐标变换

曲线积分与曲面积分

制作：王远棹

第一部分 曲线积分和曲面积分

曲线积分与曲面积分看起来公式很多，实际上在**遇事不决直接按最原始的方法计算**（实际上这很重要）的前提下，考场上主要判断四件事：**积分是哪一型、积分区域有没有方向、能否利用对称性、能否用三大公式降维或升维**。先把对象认清，再计算；否则很容易从第一行开始稳定丢分

对称性计算（轮换对称、奇偶对称）

设 L 关于 y 轴对称，则

$$\int_L x^{2m+1} g(y) ds = 0.$$

设 Σ 关于 xOy 面对称，则

$$\iint_{\Sigma} z^{2m+1} g(x, y, z^2) dS = 0.$$

设闭曲面 Σ 关于 x, y, z 轮换对称，则

$$\iint_{\Sigma} x^2 dS = \iint_{\Sigma} y^2 dS = \iint_{\Sigma} z^2 dS.$$

1. 设 L 为椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ ，其周长为 a ，计算

$$\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds.$$

由于椭圆关于两坐标轴对称，有

$$\oint_L xy ds = 0.$$

但这里不能把 $\oint_L x^2 ds$ 和 $\oint_L y^2 ds$ 当成相等，因为该椭圆不具有 x, y 轮换对称性。

题图中的式子利用椭圆方程可先整理为

$$2xy + 3x^2 + 4y^2 = 2xy + 12.$$

于是

$$\oint_L (2xy + 3x^2 + 4y^2) ds = 12 \oint_L ds = 12a.$$

奇偶对称负责消掉 xy ，椭圆方程负责把剩余部分化成常数。不要在非圆曲线上强行使用轮换对称。

2. 设 Σ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 位于第一卦限内的部分，计算

$$I = \iint_{\Sigma} \frac{x^2 + 2y^2 + 3z^2}{x^2 + y^2 + z^2} dS.$$

曲面 Σ 在轮换变换

$$x \rightarrow y, \quad y \rightarrow z, \quad z \rightarrow x$$

下保持不变，因此

$$\iint_{\Sigma} \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} dS = \iint_{\Sigma} \frac{y^2}{x^2 + y^2 + z^2} dS = \iint_{\Sigma} \frac{z^2}{x^2 + y^2 + z^2} dS.$$

把以上三个积分相加，有

$$3 \iint_{\Sigma} \frac{x^2}{x^2 + y^2 + z^2} dS = \iint_{\Sigma} 1 dS = S_{\Sigma}.$$

第一卦限球面的面积为

$$S_{\Sigma} = \frac{1}{8} \cdot 4\pi a^2 = \frac{\pi a^2}{2},$$

所以每一个轮换项均为 $\frac{\pi a^2}{6}$, 从而

$$I = (1 + 2 + 3) \frac{\pi a^2}{6} = \pi a^2.$$

轮换对称允许三个变量循环换位, 而不是只允许 x, y 互换。使用前必须检查曲面范围也能随之轮换; 例如“上半球”就不具有 x, y, z 的完全轮换对称性。

3. 设 $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 取外侧, 判断下列第二型曲面积分中正确的是 (多选)

A. $\oint_{\Sigma} x^2 dy \wedge dz = 0$

B. $\oint_{\Sigma} x dy \wedge dz = 0$

C. $\oint_{\Sigma} xy dz \wedge dx = 0$

D. $\oint_{\Sigma} yz dx \wedge dy = 0$

E. $\oint_{\Sigma} z dx \wedge dy = \frac{4\pi a^3}{3}$

把第二型曲面积分写成通量形式

$$\begin{aligned} & \oint_{\Sigma} P dy \wedge dz + \oint_{\Sigma} Q dz \wedge dx \\ & \quad + \oint_{\Sigma} R dx \wedge dy \\ &= \oint_{\Sigma} (P n_x + Q n_y + R n_z) dS. \end{aligned}$$

对于关于三个坐标面均对称且取外侧的闭曲面, 奇偶性判断表如下:

项	关于 x 对称时积分为 0	关于 y 对称时积分为 0	关于 z 对称时积分为 0
$P dy \wedge dz$	P 关于 x 为偶函数	P 关于 y 为奇函数	P 关于 z 为奇函数
$Q dz \wedge dx$	Q 关于 x 为奇函数	Q 关于 y 为偶函数	Q 关于 z 为奇函数
$R dx \wedge dy$	R 关于 x 为奇函数	R 关于 y 为奇函数	R 关于 z 为偶函数

本题为球面外侧，故

$$n_x = \frac{x}{a}, \quad n_y = \frac{y}{a}, \quad n_z = \frac{z}{a}.$$

对于 A ，有

$$x^2 n_x = \frac{x^3}{a},$$

它关于 x 为奇函数，所以 A 正确。对于 B ，有

$$x n_x = \frac{x^2}{a},$$

它不是奇函数，并且

$$\oiint_{\Sigma} x dy \wedge dz = \frac{1}{a} \oiint_{\Sigma} x^2 dS = \frac{4\pi a^3}{3} \neq 0,$$

所以 B 错误。对于 C, D ，分别有

$$x y n_y = \frac{x y^2}{a}, \quad y z n_z = \frac{y z^2}{a},$$

前者关于 x 为奇函数，后者关于 y 为奇函数，所以 C, D 正确。对于 E ，有

$$\oiint_{\Sigma} z dx \wedge dy = \frac{1}{a} \oiint_{\Sigma} z^2 dS = \frac{4\pi a^3}{3},$$

所以 E 正确。综上，应选择 A, C, D, E。

第二型曲面积分不能只看 P, Q, R 的奇偶性，必须连同法向分量一起判断。特别地， P 关于 x 为奇函数时， P 与同样关于 x 为奇函数的 n_x 相乘后反而成为偶函数，积分通常不为 0。

若曲面改成上半球，则关于 z 的对称性已经丢失，表格中“关于 z 对称”的一列不能使用；若把外侧改成内侧，所有非零积分整体变号，但由奇偶性得到的零积分仍为 0。

第一、二型曲线积分和曲面积分的公式转化

两类曲线积分的转化

已知

$$\int_L P dx + Q dy = \int_L (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds.$$

若 L 取正向（沿边界前进时区域在左侧），外法向量为

$$\mathbf{n} = (\cos \beta, -\cos \alpha),$$

因此

$$n_x ds = dy, \quad n_y ds = -dx.$$

对可微函数 $u(x, y)$ ，有

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_L \nabla u \cdot \mathbf{n} ds = \int_L -u_y dx + u_x dy.$$

4. 设 $u(x, y) = x^2 - xy + y^2$, L 为抛物线 $y = x^2$ 从 $O(0, 0)$ 到 $A(1, 1)$ 的有向弧段, 法向量由切向量顺时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到, 计算

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial n} ds.$$

由上式

$$\int_L \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_L -u_y dx + u_x dy = \int_L (x - 2y) dx + (2x - y) dy.$$

令 $y = x^2$, $dy = 2x dx$, 于是

$$\int_0^1 [(x - 2x^2) + (2x - x^2)2x] dx = \frac{2}{3}.$$

法向量由切向量“顺时针”还是“逆时针”旋转得到, 会使结果相差一个负号。题目给了方向就必须把它翻译到微分里。

两类曲面积分的转化

已知

$$\iint_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iint_{\Sigma} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS.$$

若曲面写成 $z = z(x, y)$ 并取上侧, 则

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy,$$

$$dy \wedge dz = -z_x dx dy, \quad dz \wedge dx = -z_y dx dy, \quad dx \wedge dy = dx dy.$$

若取下侧, 以上三个有向投影微元同时变号。

5. 设 Σ 为平面 $x - y + z = 1$ 位于第四卦限部分的上侧, 计算

$$I = \iint_{\Sigma} [f(x, y, z) + x] dy \wedge dz + [2f(x, y, z) + y] dz \wedge dx + [f(x, y, z) + z] dx \wedge dy.$$

由 $z = 1 - x + y$ 得 $z_x = -1, z_y = 1$ 。取上侧时

$$dy \wedge dz = dx dy, \quad dz \wedge dx = -dx dy, \quad dx \wedge dy = dx dy.$$

因此含 f 的部分系数为 $1 - 2 + 1 = 0$ ，抽象函数被直接消去：

$$I = \iint_D (x - y + z) dx dy = \iint_D 1 dx dy.$$

这类题的关键不是研究 f ，而是先把第二型曲面积分统一投影到一个坐标面。

联合微分方程

6. 设曲线积分

$$\int_L [\sin x - f(x)] \frac{y}{x} dx + f(x) dy$$

与路径无关，且 $f(\pi) = 1$ 。求 $f(x)$ ，并求由 $A(1, 0)$ 到 $B(\pi, \pi)$ 时积分的值。

令

$$P = [\sin x - f(x)] \frac{y}{x}, \quad Q = f(x).$$

由 $P_y = Q_x$ 得

$$\frac{\sin x - f(x)}{x} = f'(x),$$

即

$$f'(x) + \frac{1}{x} f(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

解得

$$f(x) = \frac{-\cos x + C}{x}.$$

由 $f(\pi) = 1$ 得 $C = \pi - 1$, 故

$$f(x) = \frac{\pi - 1 - \cos x}{x}.$$

由于路径无关, 取折线 $(1, 0) \rightarrow (\pi, 0) \rightarrow (\pi, \pi)$ 。第一段 $y = 0$, 第二段 $x = \pi$, 从而

$$I = \int_0^\pi f(\pi) dy = \pi.$$

看到“路径无关 + 未知函数”, 几乎就是在提醒你用 $P_y = Q_x$ 联立微分方程。

曲面积分审题问题: 包含不包含平面

曲面积分最常见的审题错误不是算错, 而是把曲面认错。下面几种说法必须区分:

- “圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = 0, z = 3$ 所围成的**封闭曲面的外侧**”: 包含侧面和两个底面。
- “圆柱面 $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 3$ ”: 通常只指圆柱侧面, 不含底面。
- “球面上满足 $z \geq h$ 的部分”: 只含球冠, 不含平面圆盘。
- “由球面与平面所围立体的表面”: 包含球面部分和平面截面。
- “闭曲面”“边界曲面”“全表面”: 可以直接考虑高斯公式。

7. 设 Σ 是圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $z = 0, z = 3$ 所围成的封闭曲面的外侧, 计算

$$\oint_{\Sigma} (z - y) dx \wedge dy + x(y - z) dy \wedge dz.$$

它明确说“封闭曲面”, 所以包含上下底面。令

$$P = x(y - z), \quad Q = 0, \quad R = z - y.$$

由高斯公式

$$\oint_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint_{\Omega} (P_x + Q_y + R_z) dV.$$

散度为

$$P_x + Q_y + R_z = (y - z) + 1.$$

其中 y 在圆柱区域上为奇函数，因此其三重积分为 0，剩余部分再按 $0 \leq z \leq 3$ 计算。

若题目只给“圆柱面 $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 3$ ”，便不能不加说明地直接套高斯公式。此时必须先补上下底，再减去补面的积分。

第二部分 三大公式

三大公式的本质都是把“边界上的积分”转化为“内部区域上的导数积分”：

- 格林公式：平面闭曲线 $\leftrightarrow$ 二重积分；
- 高斯公式：空间闭曲面 $\leftrightarrow$ 三重积分；
- 斯托克斯公式：空间闭曲线 $\leftrightarrow$ 曲面积分。

格林公式

若闭曲线 L 取正向，则

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

若出现法向形式，则

$$\oint_L P dy - Q dx = \iint_D (P_x + Q_y) dx dy.$$

常见用途：

- 把难参数化的闭曲线积分化为二重积分；
- 证明积分与路径无关；
- 计算面积 $S_D = \frac{1}{2} \oint_L (x dy - y dx)$ ；
- 与偏微分方程、二重积分的分部积分联合。

8. 设闭曲线 L 为星形线 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ ($a > 0$), 取逆时针方向, 利用格林公式求 L 所围区域的面积。

由格林公式, 封闭区域 D 的面积为

$$S_D = \iint_D 1 dx dy = \frac{1}{2} \oint_L (x dy - y dx).$$

星形线的正向参数方程为

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

因此

$$dx = -3a \cos^2 t \sin t dt, \quad dy = 3a \sin^2 t \cos t dt.$$

于是

$$\begin{aligned} x dy - y dx &= 3a^2 (\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) dt \\ &= 3a^2 \sin^2 t \cos^2 t dt. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} S_D &= \frac{3a^2}{2} \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t dt \\ &= \frac{3a^2}{16} \int_0^{2\pi} (1 - \cos 4t) dt \\ &= \frac{3\pi a^2}{8}. \end{aligned}$$

利用格林公式求面积时, 曲线必须取正向。若参数方程给出的是顺时针方向, 则曲线积分结果为负, 最后应调整方向或取面积的绝对值。

9. 设函数 $f(x, y)$ 在单位圆盘 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 上有二阶连续偏导数, 且

$$f_{xx} + f_{yy} = e^{-(x^2 + y^2)}.$$

计算

$$I = \iint_D (xf_x + yf_y) dx dy.$$

设单位圆周为 $L = \partial D$ ，取逆时针方向。先利用乘积求导公式

$$\frac{\partial(xf)}{\partial x} = f + xf_x,$$

$$\frac{\partial(yf)}{\partial y} = f + yf_y.$$

两式相加，得到

$$xf_x + yf_y = \frac{\partial(xf)}{\partial x} + \frac{\partial(yf)}{\partial y} - 2f.$$

因此

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left[\frac{\partial(xf)}{\partial x} + \frac{\partial(yf)}{\partial y} \right] dx dy - 2 \iint_D f dx dy \\ &= \oint_L xf dy - yf dx - 2 \iint_D f dx dy. \end{aligned}$$

在单位圆周上令

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

则

$$dx = -\sin t dt, \quad dy = \cos t dt,$$

所以

$$x dy - y dx = (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = dt = ds.$$

于是

$$I = \oint_L f ds - 2 \iint_D f dx dy.$$

接下来要把上式中的

$$\oint_L f ds - 2 \iint_D f dx dy$$

化成只含已知函数 $e^{-(x^2+y^2)}$ 的积分。题目给出的已知条件是 $f_{xx} + f_{yy} = e^{-(x^2+y^2)}$ ，因此我们希望制造出

$$\phi(f_{xx} + f_{yy}) - 2f.$$

为了让 $-2f$ 自然出现，希望辅助函数满足

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = 2.$$

同时，为了让边界积分中的 f_x, f_y 消失，并留下 x, y ，还希望在单位圆周 L 上满足

$$\phi = 0, \quad \phi_x = x, \quad \phi_y = y.$$

满足这些要求的一个简单函数就是

$$\phi(x, y) = \frac{x^2 + y^2 - 1}{2}.$$

事实上，直接求偏导可得

$$\phi_x = x, \quad \phi_y = y, \quad \phi_{xx} + \phi_{yy} = 2,$$

并且当 $x^2 + y^2 = 1$ 时确有 $\phi = 0$ 。

下面解释为什么构造 M, N 。我们想使用格林公式，所以需要把

$$\phi(f_{xx} + f_{yy}) - f(\phi_{xx} + \phi_{yy})$$

写成某个 $M_x + N_y$ 。先看含 x 的部分，我们希望

$$M_x = \phi f_{xx} - f \phi_{xx}.$$

由乘积求导

$$\frac{\partial(\phi f_x)}{\partial x} = \phi_x f_x + \phi f_{xx},$$

$$\frac{\partial(f\phi_x)}{\partial x} = f_x \phi_x + f\phi_{xx}.$$

两式相减时，中间的 $\phi_x f_x$ 与 $f_x \phi_x$ 恰好抵消，因此自然令

$$M = \phi f_x - f\phi_x.$$

同理，为了得到

$$N_y = \phi f_{yy} - f\phi_{yy},$$

自然令

$$N = \phi f_y - f\phi_y.$$

所以 M, N 不是突然猜出的，而是从“希望乘积求导后交叉项抵消”反推得到的。下面进行验算。

分别对 M, N 求偏导：

$$\begin{aligned} M_x &= \phi_x f_x + \phi f_{xx} - f_x \phi_x - f\phi_{xx} \\ &= \phi f_{xx} - f\phi_{xx}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_y &= \phi_y f_y + \phi f_{yy} - f_y \phi_y - f\phi_{yy} \\ &= \phi f_{yy} - f\phi_{yy}. \end{aligned}$$

两式相加，并利用题目条件 $f_{xx} + f_{yy} = e^{-(x^2+y^2)}$ ，得到

$$M_x + N_y = \phi e^{-(x^2+y^2)} - 2f.$$

对 $M_x + N_y$ 使用普通的格林公式：

$$\iint_D (M_x + N_y) dx dy = \oint_L (M dy - N dx).$$

在单位圆周 L 上有 $x^2 + y^2 = 1$, 所以 $\phi = 0$ 。因此

$$M = -fx, \quad N = -fy.$$

边界积分的三步变形分别说明如下。第一步, 把 $M = -fx, N = -fy$ 直接代入:

$$\oint_L (M dy - N dx) = \oint_L [(-fx) dy - (-fy) dx].$$

第二步, 先处理括号内的代数式:

$$\begin{aligned} (-fx) dy - (-fy) dx &= -fx dy + fy dx \\ &= -f(x dy - y dx). \end{aligned}$$

因此

$$\oint_L (M dy - N dx) = - \oint_L f(x dy - y dx).$$

第三步, 前面已经用单位圆的逆时针参数方程验证过

$$x dy - y dx = ds.$$

所以

$$\oint_L (M dy - N dx) = - \oint_L f ds.$$

这里的方向很重要。若单位圆取顺时针方向, 则 $x dy - y dx = -ds$, 最后的符号也会随之改变。

所以

$$\iint_D [\phi e^{-(x^2+y^2)} - 2f] dx dy = - \oint_L f ds.$$

移项得

$$\oint_L f ds - 2 \iint_D f dx dy = - \iint_D \phi e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

结合前面得到的 I 的表达式以及 $-\phi = \frac{1-x^2-y^2}{2}$, 可得

$$I = \frac{1}{2} \iint_D (1-x^2-y^2) e^{-(x^2+y^2)} dx dy.$$

最后使用极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 (1-r^2) e^{-r^2} r dr \\ &= \pi \int_0^1 (1-r^2) e^{-r^2} r dr. \end{aligned}$$

令 $u = r^2$, 则 $du = 2r dr$, 于是

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (1-u) e^{-u} du \\ &= \frac{\pi}{2} [u e^{-u}]_0^1 \\ &= \frac{\pi}{2e}. \end{aligned}$$

因此

$$\boxed{I = \frac{\pi}{2e}}.$$

原来的 $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ 表示 ϕ 沿边界外法线方向的变化率, 叫作法向导数。本解法没有使用这个概念, 只使用了乘积求导、普通偏导数和格林公式。

高斯公式

设 Σ 是分片光滑闭曲面的外侧, 围成空间区域 Ω , 则

$$\oint_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint_{\Omega} (P_x + Q_y + R_z) dV.$$

高斯公式只能直接用于**闭曲面**。若曲面不闭合，标准动作是：

- 补上平面或其他简单曲面得到闭曲面；
- 对闭曲面使用高斯公式；
- 减去补面上的积分。

10. 设 $g(u)$ 有连续导数， $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$) 取外侧，计算

$$\begin{aligned} I = \oint_{\Sigma} & [g(x-z) + x] dy \wedge dz \\ & + [2g(x-z) + y] dz \wedge dx \\ & + [g(x-z) + z] dx \wedge dy. \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} P &= g(x-z) + x, \\ Q &= 2g(x-z) + y, \\ R &= g(x-z) + z. \end{aligned}$$

分别对高斯公式所要求的变量求偏导，有

$$P_x = g'(x-z) + 1,$$

$$Q_y = 1,$$

$$R_z = -g'(x-z) + 1.$$

因此抽象函数的导数恰好相消，散度为

$$P_x + Q_y + R_z = 3.$$

设球面 Σ 所围成的球体为 Ω 。由高斯公式

$$\begin{aligned} I &= \iiint_{\Omega} (P_x + Q_y + R_z) dV \\ &= 3 \iiint_{\Omega} dV \\ &= 3 \cdot \frac{4\pi a^3}{3} \\ &= 4\pi a^3. \end{aligned}$$

所以

$$\boxed{I = 4\pi a^3}.$$

这类题不需要知道 g 的具体表达式。只要复合函数的自变量与三个系数安排得当，它们在散度中就会自动抵消，最后只剩容易积分的常数项。

斯托克斯公式

设 $L = \partial\Sigma$ ， L 的正向与 Σ 的法向满足右手法则，则

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} dy \wedge dz & dz \wedge dx & dx \wedge dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

也可写成向量形式

$$\oint_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS.$$

斯托克斯公式的优势是**曲面可以更换**：只要边界曲线相同、方向相容，就可把复杂曲面换成平面圆盘等简单曲面。

11. 设 L 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与平面 $x + y + z = 0$ 的交线， L 的正向与平面法向量 $(1, 1, 1)$ 满足右手法则，计算

$$I = \oint_L zdx + xdy + ydz.$$

令

$$P = z, \quad Q = x, \quad R = y.$$

斯托克斯公式中的三个分量为

$$R_y - Q_z = 1, \quad P_z - R_x = 1, \quad Q_x - P_y = 1.$$

以 L 为边界, 取平面 $x + y + z = 0$ 内的圆盘 Σ 。由于所给正向对应的法向量三个分量均为正, 投影到 xOy 面时取 $dx \wedge dy > 0$ 。由

$$z = -x - y$$

可得

$$dy \wedge dz = dx \wedge dy, \quad dz \wedge dx = dx \wedge dy.$$

因此由斯托克斯公式

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\Sigma} dy \wedge dz + dz \wedge dx + dx \wedge dy \\ &= 3 \iint_{D_{xy}} dx dy. \end{aligned}$$

平面经过球心, 所以 Σ 是半径为 2 的圆盘, 面积为 4π 。其单位法向量为

$$\frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}},$$

故圆盘在 xOy 面上的投影面积为

$$SD_{xy} = 4\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{\sqrt{3}}.$$

于是

$$I = 3 \cdot \frac{4\pi}{\sqrt{3}} = 4\pi\sqrt{3}.$$

所以

$$I = 4\pi\sqrt{3}.$$

斯托克斯公式允许把原来的曲面换成同边界的平面圆盘。若题目把 L 的方向反过来，答案应为 $-4\pi\sqrt{3}$ 。

三大公式相互转换出来的抽象函数压轴题

抽象函数题并不要求求出 f ，而是要观察它进入积分的方式。常见消元结构有三种：

- **格林消元**： $Q_x - P_y$ 中含 f 的项相消；
- **高斯消元**： $P_x + Q_y + R_z$ 中含 f 的项相消；
- **斯托克斯消元**： $\nabla \times \mathbf{F}$ 中含 f 的项相消。

12. 设 $u = \frac{x+4}{y+3}$ ， $f(u)$ 有连续导数， S 为锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 与两个上半球面 $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ 、 $z = \sqrt{4-x^2-y^2}$ 所围立体的全表面外侧，计算

$$\begin{aligned} I = \iint_S & \left[\frac{1}{y+3} f(u) + 3xy^2 \right] dy \wedge dz \\ & + \left[\frac{1}{x+4} f(u) + 3x^2y \right] dz \wedge dx \\ & + z^3 dx \wedge dy. \end{aligned}$$

设 S 所围成的空间区域为 Ω 。令

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{y+3} f(u) + 3xy^2, \\ Q &= \frac{1}{x+4} f(u) + 3x^2y, \\ R &= z^3. \end{aligned}$$

由

$$u_x = \frac{1}{y+3}, \quad u_y = -\frac{x+4}{(y+3)^2},$$

可得

$$\begin{aligned} P_x &= \frac{1}{(y+3)^2} f'(u) + 3y^2, \\ Q_y &= -\frac{1}{(y+3)^2} f'(u) + 3x^2, \\ R_z &= 3z^2. \end{aligned}$$

因此抽象函数部分恰好相消，散度为

$$P_x + Q_y + R_z = 3(x^2 + y^2 + z^2).$$

由于 S 取外侧，由高斯公式

$$I = \iiint_{\Omega} 3(x^2 + y^2 + z^2) dV.$$

采用球坐标

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \varphi.$$

两个球面给出

$$1 \leq \rho \leq 2,$$

锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 对应 $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ，所围立体位于锥面内侧，故

$$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

于是

$$\begin{aligned}
I &= 3 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin \varphi d\varphi \int_1^2 \rho^4 d\rho \\
&= 3 \cdot 2\pi \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \frac{2^5 - 1}{5} \\
&= \frac{93\pi}{5}(2 - \sqrt{2}).
\end{aligned}$$

因此

$$I = \frac{93\pi}{5}(2 - \sqrt{2}).$$

这类题的第一步仍然是检查抽象函数能否在散度中消掉；消掉以后还必须根据曲面方程准确写出球坐标范围，不能停在“剩下的多项式容易积分”。

13. 若

$$I(t) = \oiint_{\Sigma_t} xf(z)dy \wedge dz + zf(x)dz \wedge dx + xf(y)dx \wedge dy,$$

其中 Σ_t 是球形区域 $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2ty$ 的边界外侧， f 在原点邻域内有连续导数，且 $f(0) = 1$ ，求 $t \rightarrow 0^+$ 时 $I(t)$ 的主阶。

设

$$P = xf(z), \quad Q = zf(x), \quad R = xf(y).$$

需要特别注意，高斯公式中的散度是

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

而不是对每一项中的复合函数求导。因此

$$P_x = f(z), \quad Q_y = 0, \quad R_z = 0,$$

从而

$$P_X + Q_Y + R_Z = f(z).$$

由于 Σ_t 取外侧, 由高斯公式

$$I(t) = \iiint_{\Omega_t} f(z) dV.$$

将区域方程配方, 有

$$x^2 + (y - t)^2 + z^2 \leq t^2.$$

因此 Ω_t 是以 $(0, t, 0)$ 为球心、 t 为半径的球, 并且

$$V(\Omega_t) = \frac{4\pi}{3}t^3, \quad -t \leq z \leq t.$$

由于 $f(z)$ 在 Ω_t 上连续, 由三重积分中值定理, 存在一点 $(x_t, y_t, z_t) \in \Omega_t$, 使得

$$I(t) = f(z_t)V(\Omega_t), \quad |z_t| \leq t.$$

当 $t \rightarrow 0^+$ 时, 由 $|z_t| \leq t$ 可知 $z_t \rightarrow 0$ 。又因为 f 在 0 处连续且 $f(0) = 1$, 所以

$$f(z_t) \rightarrow 1.$$

因此

$$\begin{aligned} I(t) &= f(z_t) \cdot \frac{4\pi}{3}t^3 \\ &= \frac{4\pi}{3}t^3 + o(t^3). \end{aligned}$$

故

$$I(t) = \frac{4\pi}{3}t^3 + o(t^3),$$

并且

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{I(t)}{t^3} = \frac{4\pi}{3}.$$

本题可以直接使用积分中值定理，不需要伸缩换元。另一个易错点是散度的求导变量： $Q = zf(x)$ 在高斯公式中要求 Q_y ， $R = xf(y)$ 要求 R_z ，两者都等于 0。

与二重积分、三重积分结合，证明等式和不等式

三大公式与重积分结合时，核心是把边界信息送进区域，再利用正定性、均值不等式或柯西不等式。下面尽量使用普通的第二型曲线积分和第二型曲面积分，不使用法向导数形式。

格林公式与二重积分

设平面闭曲线 L 是区域 D 的正向边界，函数 $P(x, y), Q(x, y)$ 有一阶连续偏导数。证明

$$\left(\oint_L P dx + Q dy \right)^2 \leq S_D \iint_D (Q_x - P_y)^2 dx dy,$$

其中 S_D 表示区域 D 的面积。

由格林公式

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_D (Q_x - P_y) dx dy.$$

再由二重积分的柯西不等式

$$\begin{aligned} & \left[\iint_D (Q_x - P_y) dx dy \right]^2 \\ & \leq \left(\iint_D 1^2 dx dy \right) \left[\iint_D (Q_x - P_y)^2 dx dy \right] \\ & = S_D \iint_D (Q_x - P_y)^2 dx dy. \end{aligned}$$

因此原不等式成立。

这类证明题只有两步：先用格林公式把边界上的曲线积分变成区域上的二重积

分，再使用柯西不等式。

高斯公式与三重积分

三维情形与上面的二维证明完全类似：先用高斯公式把闭曲面上的第二型曲面积分化为三重积分，再使用三重积分的柯西不等式。下面用一道完整题目说明。

14. 设 P, Q, R 在闭区域 Ω 上有一阶连续偏导数， $\Sigma = \partial\Omega$ 取外侧，证明

$$\left(\iint_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy \right)^2 \\ \leq V(\Omega) \iiint_{\Omega} (P_x + Q_y + R_z)^2 dV.$$

由高斯公式

$$\iint_{\Sigma} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy = \iiint_{\Omega} (P_x + Q_y + R_z) dV.$$

再由柯西不等式

$$\left[\iiint_{\Omega} (P_x + Q_y + R_z) dV \right]^2 \leq \left(\iiint_{\Omega} 1^2 dV \right) \left[\iiint_{\Omega} (P_x + Q_y + R_z)^2 dV \right],$$

即得所证不等式。

斯托克斯公式与曲面积分

令

$$A = R_y - Q_z, \quad B = P_z - R_x, \quad C = Q_x - P_y.$$

由斯托克斯公式

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = \iint_{\Sigma} A dy \wedge dz + B dz \wedge dx + C dx \wedge dy.$$

再由柯西不等式

$$\left| \oint_L P dx + Q dy + R dz \right| \leq \sqrt{S_\Sigma} \left[\iint_\Sigma (A^2 + B^2 + C^2) dS \right]^{1/2}.$$

因此，闭曲线上的环流可以用其所围曲面面积和旋度的平方积分控制。

最后的审题清单

拿到一道曲线积分或曲面积分，建议按以下顺序检查：

- 是第一型还是第二型？有没有方向？
- 曲线是否闭合，曲面是否闭合？题目到底包不包含底面？
- 区域是否关于坐标轴、坐标面或坐标轮换对称？
- 第二型积分能否用方向余弦转成第一型，或统一投影到同一坐标面？
- 出现“路径无关”时，是否应令 $P_y = Q_x$ 并联立微分方程？
- 能否补线、补面后使用格林、高斯或斯托克斯公式？
- 法向和绕向是否满足右手法则？补面后的外法向是否与题设方向一致？
- 抽象函数是否会在散度、旋度或方向余弦组合中消掉？
- 证明不等式时，三大公式之后能否接柯西不等式或利用平方项非负？

公式本身不难，真正的压轴点通常是选择哪个公式、在哪个区域上使用，以及方向到底差不差一个负号。把这三件事审清楚，计算往往只是收尾。

无穷级数（考研竞赛凯哥就是原神）

制作：時雨、

正项级数的敛散性（登神12题）

常用的**正项级数**敛散性判别法，设有正项 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

- （必要条件）若级数收敛，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- 比较审敛法的不等式形式
- 比较审敛法的极限形式（寻找等价无穷小、等价无穷大）
- 比值审敛法
- 根值审敛法
- 积分审敛法
- p 级数审敛法，设 $a_n = \frac{1}{n^p(\ln n)^q} (n > 1)$ ，则有
 - $p > 1$ 或 $p = 1, q > 1$ 时收敛
 - 其他情况下发散

1. 判断级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!}$$

利用比值判别法，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1$$

故原级数发散。

2. 判断级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$$

尝试利用根值判别法，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^{1+\frac{1}{n^2}}}{n + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} n^{\frac{1}{n^2}} = 1$$

根值判别法失效，此时考虑一般项 a_n 的极限是否为0。由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1 \neq 0$ ，根据级数收敛的必要条件，该级数发散。

3. 判断级数的收敛性（凯哥巅峰神作）

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n \cdot n!}{n^n} (a > 0)$$

利用根值判别法，有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$$

又由于

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left(\frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \cdot \frac{2}{n} \cdots \frac{n}{n} \right) \\ &= \exp \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln \frac{k}{n} \right) \\ &= \exp \left(\int_0^1 \ln x dx \right) \\ &= \frac{1}{e} \end{aligned}$$

所以有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{a}{e}$ 。当 $a > e$ 时发散，当 $0 < a < e$ 时收敛，当 $a = e$ 时考虑斯特林等价无穷大公式

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad (n \rightarrow \infty)$$

因此原级数的一般项极限为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e^n \cdot n!}{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{2\pi n} = \infty$$

故当 $a = e$ 时发散。

4. 判断级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n + b^n} \quad (0 < a < b)$$

利用根值判别法，根据极限知识有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a^n + b^n}} = \frac{1}{b}$$

因此当 $b > 1$ 时级数收敛， $b < 1$ 时级数发散，当 $b = 1$ 时原级数一般项变为

$$a_n = \frac{1}{a^n + 1}$$

由于 $0 < a < b = 1$ ，不难求得 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ ，此时级数发散。

对于比值判别法或根值判别法，如果其失效，考虑一般项极限是否不为0。

5. 判断级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n+2)}{\left(a + \frac{1}{n}\right)^n}$$

解法类比上题，当 $a > 1$ 时收敛，当 $0 < a \leq 1$ 时发散。

6. 判断级数的敛散性

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n (\ln \ln n)^p}$$

类比广义 p 级数和积分判别法，当 $p \leq 1$ 时发散， $p > 1$ 时收敛。

7. 判断级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{\pi}{4^n}$$

利用比较判别法，由于 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$3^n \sin \frac{\pi}{4^n} \sim \pi \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

根据等比级数的性质，原级数收敛。

8. 判断级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^p}$$

利用比较判别法，由于 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$\frac{\sqrt{n+2} - \sqrt{n-2}}{n^p} = \frac{4}{n^p(\sqrt{n+2} + \sqrt{n-2})} \sim \frac{2}{n^p \sqrt{n}}$$

根据 p 级数的性质，当 $p > \frac{1}{2}$ 时收敛，其他情况下发散。

9. 判断级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} (e^{\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}} - 2)$$

根据幂级数的性质有

$$e^{\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}} = 2 + \frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

因此 $n \rightarrow \infty$ 时有

$$e^{\frac{1}{n}} + e^{-\frac{1}{n}} - 2 \sim \frac{1}{n^2}$$

因此原级数收敛。

10. 判断级数的敛散性

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^a} \quad (a > 0)$$

构造辅助级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^p}$, 利用比较判别法有 $a > 1$ 时收敛, 其余情况发散。

11. 设有正项数列 $\{x_n\}$, 判断级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{(x_1 + 1)(x_2 + 1) \cdots (x_n + 1)}$$

设通项为 a_n , 裂项相减有

$$a_n = \frac{x_n + 1 - 1}{(x_1 + 1)(x_2 + 1) \cdots (x_n + 1)} = \frac{a_{n-1}}{x_{n-1}} - \frac{a_n}{x_n} = b_{n-1} - b_n \quad (n \geq 2)$$

所以有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \sum_{n=2}^{\infty} (b_{n-1} - b_n) = a_1 + b_1 - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

由于 $x_i > 0$, 于是 $x_i + 1 > 1$, 因此 b_n 单调减且有下界 0, 因此 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 存在, 并且 $a_1 + b_1$ 有界, 因此原级数收敛。

12. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, S_n 是该级数的部分和。求 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right)$ 的值, 并证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2}$ 收敛。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) = \frac{1}{S_1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n}$$

根据条件知道 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$, 于是 $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{S_n} - \frac{1}{S_{n+1}} \right) = \frac{1}{a_1}$

又由于 $n \geq 2$ 时有

$$0 < \frac{a_n}{S_n^2} = \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n^2} < \frac{S_n - S_{n-1}}{S_n S_{n-1}} = \frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n}$$

根据比较判别法有

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2} = \frac{a_1}{S_1^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{a_n}{S_n^2} < \frac{a_1}{S_1^2} + \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{S_{n-1}} - \frac{1}{S_n} \right) = \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} < +\infty$$

因此原级数收敛。

交错级数的敛散性 (原神5题)

交错级数的敛散性主要有两个判别方法，设 $a_n > 0$ ，有交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$

- (充分条件) 莱布尼兹判别法
 - a_n 单调递减
 - $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
- 绝对收敛法则
- 泰勒展开法，这里我们来简单介绍一下。

对于正项级数的判别方法，我们可以通过寻找等价无穷小的形式判断一些级数的敛散性。然而，对于交错级数而言，这种方法是不可行的。假设通项形式为 $(-1)^n a_n$ ，其中 $a_n > 0$ 。我们考虑通项的泰勒展开形式

$$a_n = b_n + c_n + \cdots + d_n + o(d_n)$$

我们假设 d_n 是展开式中第一项满足 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ 绝对收敛的项，那么显然有 $\sum_{n=1}^{\infty} d_n + o(d_n)$ 绝对收敛。因为“绝对收敛+发散=发散”，“绝对收敛+条件收敛=条件收敛”，因此原级数的敛散性完全取决于 d_n 之前项所构成级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (b_n + c_n + \cdots)$ 的敛散性。下面用一个例题说明，判断其敛散性，如果收敛指出是否条件收敛、绝对收敛。

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right)$$

对正项通项进行泰勒展开，有

$$e^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{2} \frac{1}{n} + \frac{1}{6} \frac{1}{n^{1.5}} + o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right) - 1 - \frac{1}{\sqrt{n}}$$

根据泰勒展开法，原级数的敛散性和 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 的敛散性一致。由于 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，于是原级数是条件收敛的。

本题目也可以使用莱布尼兹判别法。

1. 判断级数的敛散性

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(n\pi + \frac{1}{\ln n} \right)$$

根据正弦函数的性质，有 $a_n = (-1)^n \sin \frac{1}{\ln n}$ ，由于 $\frac{1}{\ln n}$ 单调递减，考虑不等式

$$\frac{1}{\ln n} \leq \frac{\pi}{2}$$

解得 $n \geq e^{\frac{2}{\pi}}$ ，则当 $n > \lceil e^{\frac{2}{\pi}} \rceil$ 时 $\sin \frac{1}{\ln n}$ 单调递减且趋于0。根据莱布尼兹判别法，原级数收敛。

2. 判断级数收敛性

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

通过分母有理化，有

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n} = \frac{(-1)^n(\sqrt{n} - (-1)^n)}{n - (-1)^{2n}} = (-1)^n \frac{\sqrt{n}}{n-1} - \frac{1}{n-1}$$

根据莱布尼兹判别法，前者组成的级数收敛。又因为后者组成的正项级数发散，因此原级数发散。

3. 判断级数敛散性

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n} + (-1)^n}$$

把分母看做二项式泰勒展开，有

$$a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(-1)^n}{n}}} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^{1.5}} + o\left(\frac{1}{n^{1.5}}\right)$$

根据泰勒展开法，原级数条件收敛。

4. 判断级数的敛散性

$$\sum_{n=2}^{\infty} \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right] \quad (p > 0)$$

根据泰勒展开法，有

$$a_n = \ln \left[1 + \frac{(-1)^n}{n^p} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{(-1)^{kn}}{n^{kp}}$$

当 $p > 1$ 时，泰勒展开式为

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^p} + o\left(\frac{1}{n^p}\right)$$

根据泰勒展开法，原级数绝对收敛。当 $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时，有

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^{2p}} + o\left(\frac{1}{n^{2p}}\right)$$

由于 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛，所以原级数条件收敛。当 $\frac{1}{3} < p \leq \frac{1}{2}$ 时，有

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n^p} - \frac{1}{2} \frac{1}{n^{2p}} + \frac{1}{3} \frac{(-1)^n}{n^{3p}} + o\left(\frac{1}{n^{3p}}\right)$$

由于 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ 条件收敛， $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{n^{2p}}$ 发散，所以原级数发散。事实上，对于 $0 < p \leq \frac{1}{2}$ 的情况，总能找到一项对应的级数发散，此时原级数发散。

故当 $p > 1$ 时绝对收敛, $\frac{1}{2} < p \leq 1$ 时条件收敛, 否则发散。

事实上, 到这里一共出现了5题, 所以严肃进入下一章节。

抽象级数的选择题 (变态辣4题)

下面将介绍几个稍微变态的选择题, 需要学习其反例构造方法。

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则下列级数收敛的是

$$A. \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \quad B. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad C. \sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1} \quad D. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} (a_n + a_{n+1})$$

对于 A, B 构造反例 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$, 对于 C 构造反例 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

根据题目条件, 有 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{n+1}$ 均收敛, 于是选 D

2. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则下列级数收敛的是

$$A. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n} \quad B. \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \quad C. \sum_{n=1}^{\infty} (a_{2n} - a_{2n-1}) \quad D. \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + a_{n+1})$$

对于 A 构造反例 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln n}$, 对于 B 构造反例 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 由于 C 改变了求和顺序, 因此不一定成立。

道理同上一题, 因此选 D 。

3. 设 $0 < a_n < \frac{1}{n}$, 则下列级数一定收敛的是

$$A. \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad B. \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n \quad C. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\ln n} \quad D. a_n^2 \ln n$$

对于 A, C 构造反例 $a_n = \frac{1}{2n}$, 对于 B 构造反例 $a_{2k-1} = \frac{1}{2(2k-1)}, a_{2k} = \frac{1}{(2k)^2}$

根据比较判别法有 $a_n^2 \ln n < \frac{\ln n}{n^2}$, 且后者构成的级数收敛 (尝试使用比较判别法的极限形式自行证明), 故选 D 。

4. 设 $\{a_n\}$ 是单调递增的有界数列, 则下列级数一定收敛的是

$$A. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \quad B. \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a_n} \quad C. \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right) \quad D. \sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_n^2)$$

对于 A 构造反例 $a_n = \frac{1}{\ln n} (n > 1)$, 对于 B 构造反例 $a_n = -\frac{1}{n}$, 对于 C 构造反例 $a_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n$

根据题目条件可知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L < +\infty$, 因此将 D 选项级数裂项有

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_{n+1}^2 - a_n^2) = L^2 - a_1^2 < +\infty$$

因此选择 D

幂级数的敛散性

幂级数是形如 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的函数项级数, 根据阿贝尔定理, 其收敛半径 $0 \leq R \leq +\infty$ 可以通过**比值法**和**根值法**求得。因此有

- $x \in (-R, +R)$ 时绝对收敛
- $x \in \mathbb{R} - (-R, +R)$ 时发散
- 对于端点处 $\pm R$ 的敛散性, 需要特殊讨论。

$(-R, +R)$ 一般指的是收敛区间, 对于收敛域必须额外考虑端点处的敛散性。

当收敛半径 R 不容易直接求得时, 可以将幂级数看做固定 x 得到的常数项级数, 然后根据常数项级数的审敛方法求解使得级数收敛的 x 。但是一个幂级数的收敛半径 R 一定是存在的, 因此此时也必须考虑端点处的敛散性。

1. 求下列幂级数的收敛域

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x-1)^n$$

这个幂级数的收敛半径不容易求得。令 $u_n(x) = \frac{3^n + (-2)^n}{n} (x-1)^n$, 通过比值判别法令

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| < 1 \Rightarrow \frac{2}{3} < x < \frac{4}{3}$$

因此收敛半径 $R = \frac{1}{3}$, 考虑端点处的敛散性 (自行求解)。当 $x = \frac{2}{3}$ 时原级数收敛, 当 $x = \frac{4}{3}$ 时原级数发散, 因此收敛域为 $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$ 。

2. 若 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 判断幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x+2)^n$ 在 $x = -\sqrt{2}$ 处的敛散性。

根据条件, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R = 1$, 设 $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, 在收敛区间内求导有

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

两边同乘以 x 有

$$xS'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n$$

根据幂级数的性质，这个新级数的收敛半径仍然为 $R = 1$ ，将其中心点平移到 $x = -2$ ，因此原级数一定在 $(-3, -1)$ 内绝对收敛，因此该幂级数在 $x = -\sqrt{2}$ 处绝对收敛。

3. 设幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 R ，且 r 是一个给定常数，下面说法正确的是

- A. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散时，有 $|r| \geq R$
- B. 当 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛时，有 $|r| \leq R$
- C. 当 $|r| \geq R$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 发散
- D. 当 $|r| \leq R$ 时， $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n} r^{2n}$ 收敛

一个绝对收敛的级数，其任意子级数绝对收敛；一个发散的级数，其子级数可能收敛也可能发散。四个选项涉及的级数都可以视作 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 在指定取值 x 下的子级数，根据阿贝尔定理和上述性质应该选择 A。

3. 求下列幂级数的收敛域

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{1}{n \ln n} + \frac{1}{2^n} \right) x^n$$

括号拆开，两个幂级数的收敛半径分别为 $R_1 = 1, R_2 = 2$ ，因此收敛半径为 $R = \min(R_1, R_2) = 1$ ，现在考虑端点的敛散性。当 $x = 1$ 时第一个幂级数发散，第二个幂级数收敛，因此原级数发散；当 $x = -1$ 时两个幂级数都收敛，因此原级数收敛。

4. 求下列幂级数的收敛域

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left[\left(-\frac{1}{2^n} \right)^n + 3^n \right] x^n$$

道理同上一题，解得收敛半径为 $R = \frac{1}{3}$ ，收敛域为 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3} \right)$ 。

幂级数的求和与展开

幂级数的和函数一般需要根据已知幂级数，进行**乘、除、求导、积分**操作进行构造。在这个过程中需要利用已知幂级数的收敛半径，并判断最终结果的收敛域（端点需要检查）。

可以自行参考[凯哥](#)视频的例题。

幂级数与傅里叶级数

幂级数与傅里叶级数

幂级数

对于幂级数 $\sum c_n x^n$ ，其收敛半径

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|}.$$

当系数出现奇偶项规律不同时，直接对上极限分段讨论即可。

只能使用此方法的若干例子

1. 设

$$a_n = \begin{cases} 2^n, & n \text{ 是质数,} \\ 1, & n \text{ 不是质数.} \end{cases}$$

考虑幂级数 $\sum a_n x^n$ ，求其收敛半径。

根式法：若 n 是质数， $\sqrt[n]{a_n} = 2$ ；若 n 非质数， $\sqrt[n]{a_n} = 1$ 。因为质数有无穷多个，

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = 2.$$

故

$$R = \frac{1}{2}.$$

比值法：质数与合数分布不规则，无法使用

2. 设

$$a_n = e^{(-1)^n n},$$

即

$$a_{2k} = e^{2k}, \quad a_{2k+1} = e^{-(2k+1)}.$$

求幂级数 $\sum a_n x^n$ 的收敛半径。

根式法：

$$\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} e, & n \text{ 为偶数,} \\ e^{-1}, & n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

因此

$$\limsup \sqrt[n]{a_n} = e.$$

故

$$R = \frac{1}{e}.$$

比值法：

$$\frac{a_{2k+1}}{a_{2k}} = e^{-(4k+1)} \rightarrow 0,$$

$$\frac{a_{2k+2}}{a_{2k+1}} = e^{4k+3} \rightarrow \infty.$$

极限不存在，比值法同样失效。

3. 求下列幂级数的收敛半径，其中 $a > b > 0$

$$ax + bx^2 + a^2x^3 + b^2x^4 + \cdots + a^nx^{2n-1} + b^nx^{2n} + \cdots$$

原级数可写为

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a^nx^{2n-1} + b^nx^{2n}).$$

其系数满足

$$c_{2n-1} = a^n, \quad c_{2n} = b^n.$$

于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n-1]{|c_{2n-1}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{n}{2n-1}} = \sqrt{a},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n]{|c_{2n}|} = \lim_{n \rightarrow \infty} b^{\frac{n}{2n}} = \sqrt{b}.$$

由于 $a > b$ ，所以

$$\limsup_{m \rightarrow \infty} \sqrt[m]{|c_m|} = \sqrt{a}.$$

故收敛半径为

$$R = \frac{1}{\sqrt{a}}.$$

当然采用将原级数拆成两个幂级数分别求收敛半径再取交集的方法也可。

4. 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散, $A_n = \sum_{k=1}^n a_k$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{A_n} = 0$, 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径。

由 $A_n = A_{n-1} + a_n$ 可得

$$\frac{A_{n-1}}{A_n} = 1 - \frac{a_n}{A_n} \rightarrow 1,$$

故

$$\frac{A_n}{A_{n-1}} \rightarrow 1, \quad \log \frac{A_n}{A_{n-1}} \rightarrow 0.$$

对 $n \geq 2$, 有

$$\frac{\log A_n}{n} = \frac{1}{n} \left(\log A_1 + \sum_{k=2}^n \log \frac{A_k}{A_{k-1}} \right) \rightarrow 0,$$

从而 $\sqrt[n]{A_n} \rightarrow 1$ 。又因 $0 < a_n \leq A_n$, 所以

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \leq 1.$$

另一方面, 若 $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$, 则由根值判别法知正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 与题设矛盾。因此

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} \geq 1.$$

综上, $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$, 故收敛半径为

$$\boxed{R = 1}.$$

5. 设 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, 证明: 不论 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = r$ 是否收敛, 只要积分后的级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 在 $x = r$ 收敛, 就成立

$$\int_0^r f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}.$$

并由此证明:

$$\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} \cdot \frac{dx}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

证明: 由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ 在 $x=r$ 收敛, 可知其收敛半径至少为 r , 于是

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径也至少为 r 。当 $x \in [0, r)$ 时, 利用逐项积分, 得到

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}$ 收敛, 该级数在 $[0, r]$ 上一致收敛, 其和函数在 $[0, r]$ 上连续。

令 $x \rightarrow r^-$, 即得

$$\int_0^r f(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} r^{n+1}.$$

对 $f(x) = \frac{1}{x} \ln \frac{1}{1-x}$ 应用上述结果。由 $\ln \frac{1}{1-x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 知 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$,

于是

$$\int_0^1 \ln \frac{1}{1-x} \cdot \frac{dx}{x} = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

6. 应用 $\frac{e^x - 1}{x}$ 在 $x=0$ 的幂级数展开, 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

将 e^x 展开为幂级数:

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{1}{x} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} - 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)!}.$$

在收敛区间内逐项求导, 得

$$\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{(n+1)!}.$$

代入 $x=1$, 即得

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)!} = 1.$$

7. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$ 。

(1) 证明: $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上连续, 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上可导;

(2) $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处的左导数是否存在?

(1) 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$ 的收敛半径为 $R = \frac{1}{2}$, 且在 $x = \pm \frac{1}{2}$ 处级数收敛。由 Abel 第二定理, 该级数在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上一致收敛, 所以 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 上连续。

由于 $\frac{d}{dx} \left(\frac{2^n}{n^2} x^n \right) = \frac{2^n}{n} x^{n-1}$, 且对任意 $\delta > 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{n-1}$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \delta\right]$ 上一致收敛, 即求导后的级数在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上内闭一致收敛。由函数项级数的逐项求导定理, $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 上可导, 且 $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n} x^{n-1}$ 。

(2) $f(x)$ 在 $x = \frac{1}{2}$ 处的左导数不存在。

令 $t = 2x$, 则

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n^2} \triangleq g(t).$$

利用逐项求导定理, 可以求得

$$g(t) = \int_0^t \frac{-\ln(1-u)}{u} du, \quad t \in [-1, 1].$$

应用 L'Hospital 法则:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{1}{2}\right)}{x - \frac{1}{2}} &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{2}{t-1} \left[\int_0^t \frac{-\ln(1-u)}{u} du - \int_0^1 \frac{-\ln(1-u)}{u} du \right] \\ &= \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{2}{t-1} \int_1^t \frac{-\ln(1-u)}{u} du = \lim_{t \rightarrow 1^-} \frac{-2 \ln(1-t)}{t} = +\infty. \end{aligned}$$

傅里叶系数的性质

傅里叶级数部分更多的是牢记公式和熟练使用分部积分法。设 $f(x)$ 以 2π 为周期, 其傅里叶系数为

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx \quad (m = 1, 2, \dots).$$

1. 设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积或绝对可积, 证明:

(1) 若对于任意 $x \in [-\pi, \pi]$, 成立 $f(x) = f(x + \pi)$, 则 $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$;

(2) 若对于任意 $x \in [-\pi, \pi]$, 成立 $f(x) = -f(x + \pi)$, 则 $a_{2n} = b_{2n} = 0$ 。

证明: 设 $\varepsilon = 1$ 表示情形(1), $\varepsilon = -1$ 表示情形(2), 即对 $t \in [-\pi, 0]$ 有

$$f(t + \pi) = \varepsilon f(t).$$

对任意正整数 m , 将积分分成两段并在第二段作代换 $x = t + \pi$, 得

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx \, dx &= \int_{-\pi}^0 f(x) \cos mx \, dx + \int_0^{\pi} f(x) \cos mx \, dx \\ &= \int_{-\pi}^0 f(t) \cos mt \, dt + \int_{-\pi}^0 f(t + \pi) \cos m(t + \pi) \, dt \\ &= \int_{-\pi}^0 f(t) \cos mt \, dt + \varepsilon(-1)^m \int_{-\pi}^0 f(t) \cos mt \, dt \\ &= (1 + \varepsilon(-1)^m) \int_{-\pi}^0 f(t) \cos mt \, dt. \end{aligned}$$

同理, 由 $\sin m(t + \pi) = (-1)^m \sin mt$, 有

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin mx \, dx = (1 + \varepsilon(-1)^m) \int_{-\pi}^0 f(t) \sin mt \, dt.$$

因此

$$a_m = \frac{1 + \varepsilon(-1)^m}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) \cos mt \, dt, \quad b_m = \frac{1 + \varepsilon(-1)^m}{\pi} \int_{-\pi}^0 f(t) \sin mt \, dt.$$

当 $f(x) = f(x + \pi)$ 时 $\varepsilon = 1$ 。若 $m = 2n - 1$, 则 $(-1)^m = -1$, 故 $1 + \varepsilon(-1)^m = 1 - 1 = 0$, 于是 $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0$ 。

当 $f(x) = -f(x + \pi)$ 时 $\varepsilon = -1$ 。若 $m = 2n$, 则 $(-1)^m = 1$, 故 $1 + \varepsilon(-1)^m = 1 - 1 = 0$, 于是 $a_{2n} = b_{2n} = 0$ 。

2. 设周期为 2π 的函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的 Fourier 系数为 a_n 和 b_n , 求下列函数的 Fourier 系数 $\tilde{a}_n$ 和 $\tilde{b}_n$:

(1) $g(x) = f(-x)$;

(2) $h(x) = f(x + C)$ (C 是常数);

(3) $F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x-t) dt$ (假定积分顺序可以交换)。

(1) $g(x) = f(-x)$

令 $u = -x$, 则

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos nu du = a_n \quad (n \geq 0),$$

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin(-nu) du = -b_n \quad (n \geq 1).$$

故

$$\boxed{\tilde{a}_n = a_n \quad (n \geq 0), \quad \tilde{b}_n = -b_n \quad (n \geq 1).}$$

(2) $h(x) = f(x+C)$

令 $u = x+C$, 利用被积函数的 2π 周期性将积分区间平移回 $[-\pi, \pi]$ 。于是 $\tilde{a}_0 = a_0$ 。当 $n \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned}\tilde{a}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos n(u-C) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) (\cos nu \cos nC + \sin nu \sin nC) du \\ &= a_n \cos nC + b_n \sin nC,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{b}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin n(u-C) du \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u) (\sin nu \cos nC - \cos nu \sin nC) du \\ &= b_n \cos nC - a_n \sin nC.\end{aligned}$$

故

$$\boxed{\tilde{a}_0 = a_0, \quad \tilde{a}_n = a_n \cos nC + b_n \sin nC, \quad \tilde{b}_n = b_n \cos nC - a_n \sin nC \quad (n \geq 1).}$$

(3) $F(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x-t) dt$

先求余弦系数。由题设可交换积分次序, 令 $u = x-t$, 利用周期性得

$$\begin{aligned}
 \tilde{a}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx \, dx \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t) \cos nx \, dx \right) dt \\
 &= \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos n(u+t) \, du \right) dt.
 \end{aligned}$$

当 $n = 0$ 时, $\tilde{a}_0 = \frac{1}{\pi^2} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \right)^2 = a_0^2$.

当 $n \geq 1$ 时, 利用和角公式展开:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \cos n(u+t) \, du = \pi a_n \cos nt - \pi b_n \sin nt,$$

故

$$\tilde{a}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) (a_n \cos nt - b_n \sin nt) dt = a_n^2 - b_n^2.$$

同理,

$$\tilde{b}_n = \frac{1}{\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(u) \sin n(u+t) \, du \right) dt = 2a_nb_n.$$

故

$$\boxed{\tilde{a}_0 = a_0^2, \quad \tilde{a}_n = a_n^2 - b_n^2, \quad \tilde{b}_n = 2a_nb_n \quad (n \geq 1).}$$

展成余弦级数需要偶延拓, 展成正弦级数需要奇延拓。此外, 常考利用傅里叶级数求常数项级数的题目——巴塞尔问题 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 是永恒的考点, 通过赋值寻找规律是核心技巧。

3. 将函数

$$f(x) = x - \frac{\pi}{2} + \left| x - \frac{\pi}{2} \right|, \quad x \in [0, \pi]$$

展成余弦级数。

解: 由于展成余弦级数, 将 $f(x)$ 作偶延拓。计算傅里叶系数:

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos nx \, dx = \frac{4 \left[(-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2} \right]}{\pi n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

故

$$f(x) \sim \frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left[(-1)^n - \cos \frac{n\pi}{2} \right]}{n^2} \cos nx.$$

4. 将 $f(x) = 2 + |x|$, $x \in [-1, 1]$ 展开为周期为 2 的傅里叶级数, 并求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的和。

解: $T = 2$, 故 $L = 1$ 。 $f(x) = 2 + |x|$ 为偶函数, 因此 $b_n = 0$ 。

先求 a_0 :

$$a_0 = \frac{1}{1} \int_{-1}^1 f(x) \, dx = 2 \int_0^1 (2 + x) \, dx = 2 \left[2x + \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = 5.$$

再求 a_n ($n \geq 1$):

$$\begin{aligned} a_n &= \int_{-1}^1 f(x) \cos(n\pi x) \, dx = 2 \int_0^1 (2 + x) \cos(n\pi x) \, dx \\ &= 2 \int_0^1 x \cos(n\pi x) \, dx \quad \left(\because \int_0^1 \cos(n\pi x) \, dx = 0 \right) \\ &= 2 \left[\frac{x \sin(n\pi x)}{n\pi} \right]_0^1 - 2 \int_0^1 \frac{\sin(n\pi x)}{n\pi} \, dx \\ &= 2 \left[\frac{\cos(n\pi x)}{(n\pi)^2} \right]_0^1 = \frac{2((-1)^n - 1)}{n^2 \pi^2}. \end{aligned}$$

当 $n = 2k$ 时 $a_{2k} = 0$; 当 $n = 2k - 1$ 时 $a_{2k-1} = -\frac{4}{(2k-1)^2 \pi^2}$ 。

故傅里叶级数为

$$f(x) \sim \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos((2k-1)\pi x)}{(2k-1)^2}.$$

求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$: 令 $x = 0$, 则 $f(0) = 2$, $\cos 0 = 1$, 代入得

$$2 = \frac{5}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \implies \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

记 $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, 拆分为奇偶项:

$$S = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}}_{\pi^2/8} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{8} + \frac{1}{4}S.$$

解得 $\frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8}$, 即

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}.$$

巴塞尔问题的核心套路：先通过傅里叶展开得到奇数次幂的倒数平方和，再利用奇偶拆分反解出完整级数的和。

5. 利用 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 证明:

$$(1) 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12};$$

$$(2) 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

证明: 设 $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 。

绝对收敛级数可按奇偶项分组。偶数项之和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4}S = \frac{\pi^2}{24}.$$

于是奇数项之和为

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} = S - \frac{1}{4}S = \frac{3}{4}S = \frac{\pi^2}{8},$$

即证明了 (2)。

对于 (1), 将奇数项之和减去偶数项之和:

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2} \\
&= \frac{3}{4}S - \frac{1}{4}S = \frac{1}{2}S = \frac{\pi^2}{12}.
\end{aligned}$$