工科数学分析-2 期中复习

孔一江

钱院学辅 & 钱学组

16th April 2025

主要内容

集合与多元函数

微分

- 复合函数偏导数
- 向量值函数导数

积分

- 重积分
- 空间几何

更多题型

极限，连续性

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 函数的连续性

f 在点 $\mathbf{x}_0$ 连续 $\Longleftrightarrow$ $\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0)$.
f 在区域上连续 $\Longleftrightarrow$ 在区域上任意点连续.

- 任意路径取极限都相同.
- 不等价于任意直线 $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{e}\epsilon$. E.g. $y = x^2$.
- 闭区域 D 上连续函数性质：存在最小/最大值，$f(D)$ 可以取遍其中所有值. 局部保号.

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 函数的连续性

$\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 函数连续 $\Longleftrightarrow$ m 个分量函数 f_i 都连续.

极限，连续性 :: Exercise

计算下列极限.

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x+y}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}$
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

极限, 连续性 :: Exercise

计算下列极限.

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x+y}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}$
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

[1] 错误方法: 使用 O-notation:

$$\left.\begin{aligned} x^2y^2 &= O(\rho^4) \\ x+y &= O(\rho) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \text{极限是0}$$

极限, 连续性 :: Exercise

计算下列极限.

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x+y}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}$
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

[1] 错误方法: 使用 O-notation:

$$\left.\begin{aligned} x^2y^2 &= O(\rho^4) \\ x+y &= O(\rho) \end{aligned}\right\} \implies \text{极限是0}$$

Sol.: 取路径 $x+y=y^9$.

极限，连续性 :: Exercise

计算下列极限.

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x+y}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}$
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

[1] 错误方法：使用 O-notation:

$$\left.\begin{aligned} x^2y^2 &= O(\rho^4) \\ x+y &= O(\rho) \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \quad \text{极限是}0$$

Sol.: 取路径 $x+y=y^9$.

[2] 错误方法：使用 O-notation.

Sol.: 取路径 $x^3+y^3=y^4$.

极限, 连续性 :: Exercise

计算下列极限.

1. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x+y}$
2. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4+y^4}{x^3+y^3}$
3. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

[3] 错误方法: 乱取路径
$x^2+y^2=x^2y^2$, 极限为 1.
Sol.: 使用 O-notation:

$$\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{o(\rho)}{\rho} = o(1)$$

多元函数可微性

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 函数的全微分，可微性

- 偏导数：$f_x(x, y, z, \cdots) = \frac{d}{dt} f(t, y, z, \cdots)|_{t=x}$.
- 全微分：$\Delta f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x} + \delta\mathbf{x}) - f(\mathbf{x})$.
- 可微分：$\Delta f(\mathbf{x}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \delta\mathbf{x} + o(\|\delta\mathbf{x}\|_2)$，则称 f 是可微分的.

$$\frac{f(x+\delta x, y+\delta y) - f(x, y) - f_x(x, y)\delta x - f_y(x, y)\delta y}{\sqrt{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}} = o(1)$$

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 函数的全微分，可微性

$\mathbf{f}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 函数可微 $\Longleftrightarrow$ m 个分量函数 f_i 都可微.

多元函数可微性 :: Exercise

下列 $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 中在 $(0,0)$ 可微分的有:

- □ 在 $(0,0)$ 沿任意方向的方向导数都存在
- □ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$
- □ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$
- □ $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ with $f(0,0) = 0$

多元函数可微性 :: Exercise

下列 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 中在 $(0,0)$ 可微分的有:

- □ 在 $(0,0)$ 沿任意方向的方向导数都存在
- □ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$
- □ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$
- □ $f(x,y) = (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$ with $f(0,0)=0$

Recall: 可微分 $\iff$

$$f(x,y)-f(0,0) = \mathcal{L}(x,y) + o(\rho)$$

只有 $f(x,y)=o(\rho)$ 是不够的. 反例:

$$f = \begin{cases} 1 & (x,y)=(0,0) \\ 0 & \text{else} \end{cases}.$$

多元函数可微性 :: Theorem

$f: R^n \to R$ 在某点可微分的条件有:

充分 各个偏导数在该处连续

充分 ($R^2 \to R$ 函数) f_x 在邻域存在, 该点连续; f_y 该点存在

必要 f 连续, 各个偏导数存在

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 函数的导数

偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \cdots)\Big|_{(x_0, y_0, \cdots)} = \frac{d}{dt} f(t, y_0, \cdots)\Big|_{t=x_0}$$

如果二阶混合偏导数连续，那么偏导顺序可以交换.

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 函数的导数

偏导数

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y, \cdots)\Big|_{(x_0, y_0, \cdots)} = \frac{d}{dt} f(t, y_0, \cdots)\Big|_{t=x_0}$$

如果二阶混合偏导数连续，那么偏导顺序可以交换.

Ex:

$$f(x, y) = x^3 \cos(1 - y) + (y - 1)x^2 \sin\left(\frac{x}{y}\right)^{1/2}, \quad \frac{\partial}{\partial x} f\Big|_{(1,1)} = 3$$

$\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 函数的导数

grad: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ 函数的导数

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots \end{bmatrix}$$

- 梯度 $\mathbf{grad}\ f = \nabla f = \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} f \cdot \mathbf{e}_i$.
- 沿单位向量 $\mathbf{e}_l$ 的方向导数 $\frac{\partial}{\partial \mathbf{e}_l} f = \nabla f \cdot \mathbf{e}_l$.

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 函数的导数

Hessian: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 函数的二阶导数

以 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 为例,

$$H_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x^2} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} \end{bmatrix} f$$

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 函数的 Taylor 展开

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{0}) + \nabla f(\mathbf{0}) \cdot \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^T H_f(\mathbf{0})\mathbf{x} + o(\|\mathbf{x}\|^2)$$

写成 Peano remainder: $\frac{1}{2}\mathbf{x}^T H_f(\mathbf{0} + \theta\mathbf{x})\mathbf{x}$, $\theta \in (0, 1)$.

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 函数的极值

- $\nabla f = \mathbf{0}$ 是取得极值的必要条件.
- Hessian 矩阵正定/负定 $\implies$ f 取得严格的极大/极小值.
- Hessian 矩阵不定 $\implies$ 该点是 f 的鞍点, 不取极值.

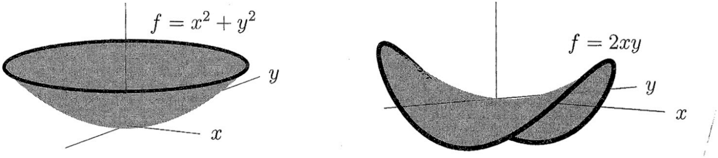


图: Minimum and Saddle Point

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 函数的极值

Lagrange multiplier

$f(\mathbf{x})$ s.t. $g_i(\mathbf{x}) = 0$ 的 Lagrange 函数为

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = f(\mathbf{x}) + \sum_i \lambda_i \nabla g_i(\mathbf{x})$$

$$\text{extremum } L \implies \nabla f + \sum_i \lambda_i \nabla g_i = \mathbf{0}$$

闭区域上的极值: 边界 (约束) + 内部 (无约束) 的驻点.

$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 函数的导数

Jacobi 矩阵: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 函数的导数

对于 $\mathbf{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

$$D\mathbf{f} = J_{m\times n} = \begin{bmatrix} \nabla f_1 \\ \cdots \\ \nabla f_m \end{bmatrix}$$

Chain Rule

$$D(\mathbf{f}(\mathbf{g}(\mathbf{x}))) = (D\mathbf{f})\Big|_{\mathbf{g}(\mathbf{x})} \cdot (D\mathbf{g})\Big|_{\mathbf{x}}$$

P.s.: $D(\mathbf{f} \times \mathbf{g}), D(\mathbf{f} \cdot \mathbf{g})$.

自变量变换，全微分

$\partial_{(x|y)} \Rightarrow \partial_{(u|v)}$

已知 $(u, v) = g(x, y)$ 和函数 $f(x, y)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} f = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} \right) f$$

全微分 d 的形式不变性

$$df = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right) f = \left(\frac{\partial}{\partial u} du + \frac{\partial}{\partial v} dv \right) f$$

$$df(u, v) = df(g(x, y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} f & \frac{\partial}{\partial v} f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

自变量变换, 全微分

谨慎使用 d 的性质.

$u(x,y) = x\sin y$. 求:

1. d^2u:

$$d^2u = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 u$$

2. d^2u, 其中 $x = \phi(s,t), y = \psi(s,t)$:

$$d\cdot du = d\left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)u = \nabla u\cdot\begin{bmatrix} d^2x \\ d^2y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} dx & dy \end{bmatrix} H_u \begin{bmatrix} dx \\ dy \end{bmatrix}$$

隐函数

隐函数的导数

方程组 $\mathbf{F}(\mathbf{x};\mathbf{y})=\mathbf{0}$ $(\dim \mathbf{F}=\dim \mathbf{y})$ 确定了隐函数 $\mathbf{y}=\mathbf{y}(\mathbf{x})$. 对 x_i 求导得

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{F}+J_{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{y}=\mathbf{0}$$

其中 $J_{\mathbf{y}}$ 是 $\mathbf{F}$ 关于 $\mathbf{y}$ 的 Jacobi 矩阵.

$\int_{(\Omega)} d\Omega$ 的一些性质

- 线性
-

$$L \leqslant f(\mathbf{M} \in (\Omega)) \leqslant H \implies L\Omega \leqslant \int_{(\Omega)} d\Omega \, f(\mathbf{M}) \leqslant H\Omega$$

- 连续函数的中值定理

$$\exists \mathbf{x}_0 \in (\Omega), \int_{(\Omega)} d\Omega \, f(\mathbf{M}) = f(\mathbf{x}_0)\Omega$$

$\int_{(\Omega)} d\Omega$ 的换元

- 柱坐标 $dxdydz = \rho d\rho \ d\theta \ dz$
- 球坐标 $dxdydz = r^2 dr \ \sin\phi d\phi \ d\theta$ 此处的 ϕ 是天顶角
- 任意正则变换 $dxdy = |\det J| dudv$ 其中 $\det J$ 是 x, y 关于 u, v 的 Jacobi 行列式, 要取绝对值; 注意积分区域的变化.

$\int_{(\Omega)} d\Omega$ 的换元

- 柱坐标 $dxdydz = \rho d\rho \, d\theta \, dz$
- 球坐标 $dxdydz = r^2 dr \ \sin\phi d\phi \ d\theta$ 此处的 ϕ 是天顶角
- 任意正则变换 $dxdy = |\det J| dudv$ 其中 $\det J$ 是 x, y 关于 u, v 的 Jacobi 行列式, 要取绝对值; 注意积分区域的变化.

1.
$$\iint_{[0,1]\times[0,1]} |x^2 + y^2 - 1| dxdy$$
.

2.
$$\iint_{(D)} (1 - \sqrt{x^2 + y^2}) dxdy$$
D 是 $x^2 + y^2 = a^2, x^2 + y^2 = ax$ 围成的在第一象限的部分.

$\int_{(\Omega)} d\Omega$ 的对称性质

- 寻找类似于 $f(x, y) + f(\pm x, \pm y) = 0$ 的关系
- 自变量的轮换对称

$\int_{(\Omega)} d\Omega$ 的对称性质

- 寻找类似于 $f(x,y)+f(\pm x,\pm y)=0$ 的关系
- 自变量的轮换对称

1.
$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}(x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2\mathrm{d}V$$

$\int_{(\Omega)} d\Omega$ 的对称性质

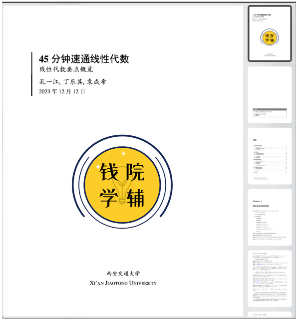
- 寻找类似于 $f(x,y)+f(\pm x,\pm y)=0$ 的关系
- 自变量的轮换对称

1.

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2\leqslant 1}(x+\sqrt{2}y+\sqrt{3}z)^2 dV$$

$$=\iiint_{(V)}(x^2+2y^2+3z^2)dV=2\iiint_{(V)}r^2 dV$$

空间几何 :: Review


45 分钟速通线性代数

线性代数要点概览

孔一江, 丁乐其, 袁成希

2023 年 12 月 12 日

钱院 学辅

西安交通大学

Xi'an Jiaotong University

自查:

1. 看二次曲面方程画出图形, 注意有多少支
2. 由平面曲线 (写成联立方程组的形式) 写出绕坐标轴旋转后的曲面方程

空间几何

考虑一条参数为 $t \in [0, T]$ 的空间曲线 $\mathbf{r}(t)$.

1. 某点处的切向量

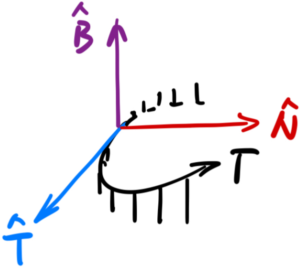
$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}$$

2. 某点处的切向量满足 $\|\mathbf{r}'(s)\| = 1$
3. 弧微分 (" 自然坐标") 与参数的关系

$$ds = \|\dot{\mathbf{r}}\|dt = \sqrt{(\dot{x})^2 + (\dot{y})^2 + (\dot{z})^2}dt$$

$$ds = \|\dot{\mathbf{r}}\|d\theta = \sqrt{\rho^2 + (\dot{\rho})^2}d\theta$$

空间几何 :: Optional



$$\hat{N} = \hat{B} \times \hat{T}$$

空间几何

空间曲面的法向量

1. 考虑一个空间曲面 $\mathbf{r}(u,v)$，某点处的法向量 $\mathbf{n}=\partial_u\mathbf{r}\times\partial_v\mathbf{r}$
2. 考虑一个空间曲面 $F(x,y,z)=0$，某点处的法向量 $\mathbf{n}=\nabla F(x,y,z)$
3. 两个曲面交线的切向量 $\mathbf{l}=\mathbf{n}_1\times\mathbf{n}_2$

同样的曲面 $z=z(x,y)$ 可以用 $\mathbf{r}(u,v)=\mathbf{r}(x,y)=(x,y,z(x,y))^T$ 表示，也可以用 $F(x,y,z)=z-z(x,y)=0$ 确定.

$$\mathbf{n}=\nabla F=\begin{bmatrix}-\partial_x z & -\partial_y z & 1\end{bmatrix}=\partial_x\mathbf{r}\times\partial_y\mathbf{r}$$

使用新变量 t 构造一元函数

函数 $f(x,y)$ 在 D 上可微, 且 $\|\nabla f(x,y)\| \leqslant M$. 线段 $AB \subset D$. 证明

$$|f(\mathbf{A}) - f(\mathbf{B})| \leqslant M|AB|$$

Proof. 注意到

$$\frac{d}{dt}\phi(t) = \frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{A}(1-t) + \mathbf{B}t) = \nabla f \cdot (\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

于是 $|\phi'(t)| \leqslant \|\nabla f\| \|\mathbf{B} - \mathbf{A}\| \leqslant M|AB|$.

$$\exists \xi \in (0,1), |\phi(1) - \phi(0)| = |\phi'(\xi)|(1-0) \leqslant M|AB|$$

分离变量法, Laplace 算子

1. 可微函数 $F(x,y)=g(\sqrt{x^2+y^2})=p(x)q(y)$ 求 F 的形式.

$$\frac{p'(x)}{xp(x)}=\frac{q'(y)}{yq(y)}=C\implies\begin{cases}p(x)=C_p\exp(Cx^2/2)\\q(y)=C_q\exp(Cy^2/2)\end{cases}$$

2. $z(x,y)=f(\sqrt{x^2+y^2})$, $f\in C^{(2)}(0,+\infty)$. $\partial_x^2 z+\partial_y^2 z=x^2+y^2$.
求 $f(\rho)$ 的表达式.
使用 Laplace 算子在极坐标下的表示形式 (此处 $\partial_\theta f\equiv 0$):

$$\nabla^2 z=\left(\frac{d^2}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\right)f=\rho^2$$

祝各位考试顺利 $\square$