高数下习题归纳

作者：仲英学业辅导中心

时间：2025 年 6 月 9 日

Mathematics is the queen of the sciences. ——Johann Carl Friedrich Gauss

编者说

随着考试的临近，我们[1]深知大家面临着巨大的学习压力。为了帮助大家更有效地复习和掌握高等数学的考试题型，仲英学业辅导中心特别编写了这份高数习题归纳材料。本资料涵盖了常见的题型和解题技巧，旨在帮助大家快速梳理知识点，提高应试能力。

无论你是对某些概念感到困惑，还是希望通过练习提升自己的解题速度，这份资料都能为你提供切实的帮助。希望同学们能够充分利用这些资源，在考试中取得优异的成绩。

这是仲英学辅第一次尝试以习题归纳的方式来编写小助手，希望能更好地帮助到同学们复习，并且掌握做题技巧。也建议同学们在准备考试的时候学会自己整理习题、整理做题技巧，寻求各类题目之间的变与不变。另外，如果有同学对这份资料有什么疑问或者建议，都可以随时联系在学粉群里联系学辅成员。祝大家考试顺利！

——蔡芳仪

这册高数小助手的编写思路大概可以概括为三个方面：知识点，题型以及技巧方法。大部分题目出自历年期中，还有吴慧卓老师习题课资料。这边建议本书可以搭配章习题和真题配套使用哦！

另外学姐有一些关于高数考试的小感言：首先，大家一定要相信所有数学组的老师们，他们都是非常厉害的老师，考试的内容也一定会和他们上课讲的相一致（这点比高中好多了）；很多同学可能会对上大学来的第一次大型考试感到异常焦虑（我当时觉得它决定了我四年的命运）。但其实它远没有那么恐怖，大学是一个高投入就一定会有高回报的地方，只要准备充分，胜利自在前方，一定要对自己有足够的信心，你肯定可以的！

——林嘉玙

关于高数期末的备考，大家不要慌张，不要盲目做题。对于高数，最重要的是基础知识点的理解和基本技巧的掌握。复习的时候，大家可以试着先总结归纳知识点，再做往年题和课后题巩固和查漏补缺，最后再试着在难题上突破。祝大家考试顺利！

——马驿飞

感谢大家对学辅导工作的关注！同时也感谢仲英学辅志愿者的付出！我们的志愿者们在过去的几个月里投入了大量时间和精力，精心准备了各类学习材料与活动，希望大家能够积极参与学辅的活动，互相帮助，共同进步！

——肖追日

祝大家学习顺利, 取得理想的成果! 同时欢迎加入仲英学辅官方答疑 QQ 群: **949045188**。此外如果你对仲英学辅的工作感兴趣,欢迎私聊学粉群管理员 or 邮箱致信 →chuijih.hsiao@gmail.com

[1] **主编：**蔡芳仪、林嘉玙，马驿飞，缪易彤；**审核：**陈洋、李欣泽、韩轩、吴凯猛、王培超、于越

由于志愿者精力有限，难免有疏漏之处，如果同学们在阅读过程中发现有问题的话可以扫描下面的二维码进行反馈，我们将对发现错误的同学给予工时奖励。

目录

第 1 章 多元函数微分学

内容提要

- n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中点集的初步知识
- 多元函数的导数与微分
- 多元函数的 Taylor 公式和极值问题
- 多元向量值函数的导数和微分
- 多元函数微分学在几何上的应用

1.1 n 维 Euclid 空间 $\mathbf{R}^n$ 中点集的初步知识

1.1.1 $\mathbf{R}^n$ 中点列的极限

定义 1.1 (点列的极限)

设 { } 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点列，其中 $=(x_{k,1},x_{k,2},\cdots,x_{k,n})$，又设 $=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一固定点，若 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in N^+$，使得 $\forall k>N$，恒有 $\|\ -\mathbf{a}\|<\varepsilon$，则称点列 { } 极限存在，为它的极限，即点列 { } 收敛于 。 ♣

定理 1.1

设点列 { } $\subseteq\mathbf{R}^n$，点 $\in\mathbf{R}^n$，则 $\lim_{k\to\infty}\ =$ 的充要条件是 $\forall i=1,2,\cdots,n$，都有 $\lim_{k\to\infty}x_{k,i}=a_i$。 ♡

定理 1.2

设 { } 是 $\mathbf{R}^n$ 中的收敛点列，则

(1){ } 的极限唯一。

(2){ } 是有界点列。即 $\exists M>0,\forall k>0$, 恒有 $\|\ \|\leq M$。

(3) 若 $\to$ ， $\to$ ，则 $\pm\ \to\ \pm$ ，$\alpha\ \to\alpha$ ，$\langle\ ,\ \rangle\to\langle\ ,\ \rangle$。

(4){ } 收敛于 ，则 { } 的任一子列收敛于 。 ♡

定理 1.3 (Bolzano-Weierstrass 定理)

$\mathbf{R}^n$ 中的有界点列必有收敛子列。 ♡

定理 1.4 (Cauthy 收敛原理)

$\mathbf{R}^n$ 中点列 { } 收敛于 $\mathbf{R}^n$ 中的点的充要条件为 { } 是 $\mathbf{R}^n$ 中的 Cauthy 点列。 ♡

1.1.2 $\mathbf{R}^n$ 中开集和闭集

定义 1.2 (聚点)

A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个点集， $\in \mathbf{R}^n$。若存在 A 中的点列 $\{\ \}$， $\neq$ ， 使得 $\to$ ， 则 a 是 A 的一个聚点。

定义 1.3 (导集)

A 所有聚点构成的集合，记为 A'。

定义 1.4 (闭包)

集合 $\overline{A} = A \cup A'$。

定义 1.5 (孤立点)

点 $a \in A, a \notin A'$，则 a 是 A 的一个孤立点。

定义 1.6 (闭集)

$A' \subseteq A$，则 A 为闭集。

定义 1.7

设 $a \in \mathbf{R}^n, \delta > 0$:

点 a 的 δ 邻域：$U = \{$

点 a 的去心 δ 邻域：$\mathring{U} = U \quad \{a\}$。

定义 1.8 (内点)

$\exists \delta > 0$，使得 $U(a, \delta) \subseteq A$，则 a 为集合 A 的内点。

定义 1.9 (内部)

所有内点构成的集合称为内部，记作 A° 或 $intA$。

定义 1.10 (外点)

$\exists \delta > 0$，使得 $U(a, \delta) \cap A = \emptyset$，则 a 为集合 A 的外点。

定义 1.11 (外部)

所有外点构成的集合称为外部，记作 $extA$。

定义 1.12 (边界点)

$\forall \delta > 0$，$U(a, \delta)$ 中既有 A 的点，也有 A 的余集 A^c 的点，则 a 为边界点。

定义 1.13 (边界)
所有边界点构成的集合称为边界，记作 ∂A。♣

定义 1.14 (开集)
A 中的点全是 A 的内点，则 A 为开集。♣

定理 1.5
$a \in A' \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \mathring{U}(a, \epsilon) \cap A \neq \emptyset$。♡

定理 1.6
$A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是开集 $\Leftrightarrow$ A^c 是闭集。♡

定理 1.7
在 n 维 Euclid 空间中，空集 $\emptyset$，全空间 $\mathbf{R}^n$，任意多个开集的并和有限个开集的交都是开集；空集 $\emptyset$，全空间 $\mathbf{R}^n$，任意多个闭集的交和有限个闭集的并都是闭集。♡

1.1.3 $\mathbf{R}^n$ 中紧集和区域

定义 1.15 (有界集)
$\exists M > 0, \forall x \in A, \|\mathbf{x}\| \leq M$，则 A 为有界集。反之则为无界集。♣

定义 1.16 (紧集)
有界闭集称为紧集。♣

定义 1.17 (连通集)
$A \subseteq \mathbf{R}^n$，若 A 中任意两点 x, y 都能用完全属于 A 的有限个线段连接起来，则 A 为连通集。♣

定义 1.18 (区域)
连通的开集。♣

定义 1.19 (闭区域)
区域与边界的并集。♣

定义 1.20 (凸集)
$x_1, x_2 \in A, \forall t \in [0, 1], tx_1 + (1 - t)x_2 \in A$，则 A 是凸集。♣

命题 1.1

任何凸集都是联通的，任何凸开集都是区域。

1.2 多元函数的导数和微分

1.2.1 多元函数的极限和连续性

定义 1.21 (n 元数量值函数)

设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是一个点集，称映射 $f{:}A \to \mathbf{R}$ 是定义在 A 上的一个 n 元数量值函数，简称 n 元函数，也可记作

$$\omega = f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

定义 1.22 (n 元向量值函数)

设 $A \subseteq \mathbf{R}^n$ 是一个点集，称映射 f: $A \to \mathbf{R}^m$ $(m \geq 2)$ 是定义在 A 上的一个 n 元向量值函数，可记作 $\mathbf{y} = f(\mathbf{x})$，其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A, \mathbf{y} = (y_1, y_2, \cdots, y_m) \in \mathbf{R}^m, f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$。其中:

$$\begin{cases} y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\ \qquad \vdots \\ y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \end{cases}$$

定义 1.23 (二重极限)

设有点集 $A \subseteq \mathbf{R}^2$, $f : A \to \mathbf{R}$ 是一个二元数量值函数, (x_0, y_0) 是 A 的一个聚点。若存在常数 $a \in \mathbf{R}$, 使得 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $(x, y) \in \mathring{U}((x_0, y_0), \delta) \cap A$ 时，恒有 $|f(x, y) - a| < \epsilon$, 则称 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时 $f(x, y)$ 有极限，a 是 $(x, y) \to (x_0, y_0)$ 时 $f(x, y)$ 的极限。

定义 1.24 (二元连续函数)

设二元数量值函数 $f(x, y)$ 定义在点 (x_0, y_0) 的某一邻域 $U(x_0, y_0)$ 内，若 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$，则称 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续，否则称 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0) 处间断。若 $f(x, y)$ 在 D 的每一点处连续，则称 $f(x, y)$ 是 D 内的连续函数。

n 元函数的极限和连续性同理可得。

设 $A \subseteq \mathbf{R}_n$ 是一有界闭区域，$f : A \to R$ 在 A 上连续:

定义 1.25 (有界性)

f 在 A 上有界。

定义 1.26 (一致连续性)

f 在 A 上一致连续，即 $\forall \epsilon > 0, \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0$，使得 $\forall x_1, x_2 \in A$，当 $\|\mathbf{x}_1 - x_2\| < \delta$ 时，恒有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \epsilon$。

定理 1.8 (最大最小值定理)

f 在 A 上能取到最大值和最小值。

定理 1.9 (介值定理)

m 和 M 分别是 f 在 A 上的最小值和最大值，常数 μ 满足 $m \le \mu \le M$ 则必 $\exists x_0 \in A$，使得 $f(x_0) = \mu$。

1.2.2 偏导数，全微分

定义 1.27 (偏导数)

设函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域 $U(x_0, y_0)$ 内有定义，若极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此极限值为 $f(x,y)$ 对 x 的偏导数。若 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处对 x 和 y 的偏导数均存在，则称 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可偏导。

求法：求某个变量的偏导时，把其余变量看做常数，方法本质上与一元函数求导数相同。

定义 1.28 (全微分)

设函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域 $U(x_0, y_0)$ 内有定义，如果对于 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U(x_0, y_0)$，函数在 (x_0, y_0) 处的改变量 $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$ 可以表示为 $\Delta z = a_1 \Delta x + a_2 \Delta y + o(\rho)$，其中，$a_1$,$a_2$ 是与 Δx,Δy 无关的常数，$\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$,$o(\rho)$ 是当 $\rho \to 0$ 时关于 ρ 的高阶无穷小，则称函数 f 在点 (x_0, y_0) 处可微，并称 $a_1 \Delta x + a_2 \Delta y$ 为函数 f 在点 (x_0, y_0) 处的全微分。

命题 1.2 (可微的必要条件)

若函数 $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微，则有：

(1)$z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处连续。

(2)$z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处两个偏导数都存在，即

$$\mathrm{d}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathrm{d}x + f_y(x_0, y_0)\mathrm{d}y$$

命题 1.3 (可微的充分条件)

设函数 $z = f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义，若 $f(x,y)$ 的两个偏导数均在点 (x_0, y_0) 处连续，则该函数在点 (x_0, y_0) 处可微。

n 元函数全微分的性质可由二元函数直接推广。

1.2.3 方向导数和梯度

定义 1.29 (方向导数)

$x_0 \in \mathbf{R}^2$，l 是平面上一向量，e_l 是与 l 同向的单位向量。二元函数 f 定义在 x_0 的邻域 $U(x_0) \subseteq \mathbf{R}^2$ 内。在 $U(x_0)$ 内让自变量 x 由 x_0 沿与 e_l 平行的直线变到 $x_0 + te_l$。若 $\lim_{t\to 0} \frac{f(x_0+te_l)-f(x_0)}{t}$ 存在，则此极限值为 f 在 x_0 处沿 l 方向的方向导数。

若函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处可微，则 f 在 (x_0, y_0) 沿各个方向的方向导数均存在，且 $\frac{f}{l}|_(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\cos\alpha + f_y(x_0, y_0)\cos\beta$，$l$ 方向上的单位向量 $e_l = (\cos\alpha, \cos\beta)$。

定义 1.30 (梯度)

设二元函数 $z = f(x,y)$ 定义在点 (x_0, y_0) 的邻域中，若存在一向量，其方向为该函数在此点取得方向导数最大值的方向，其模等于该函数在此点方向导数的最大值，则该向量为 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处的梯度，记作 $\mathbf{grad} f(x_0, y_0)$ 或 $\nabla f(x_0, y_0)$。

函数 $z = f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微，则梯度一定存在，且 $\mathbf{grad} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} + f_y(x_0, y_0)\mathbf{j}$。

n 元函数方向导数和梯度的计算方法和性质可由二元函数直接推广而来。

梯度运算法则 (C_1 和 C_2 为任意常数，函数 u, v, f 均可微)

(1)$\mathbf{grad}(C_1 u + C_2 v) = C_1 \mathbf{grad} u + C_2 \mathbf{grad} v$

(2)$\mathbf{grad}(uv) = v\mathbf{grad} u + u\mathbf{grad} v$

(3)$\mathbf{grad}(\frac{u}{v}) = \frac{1}{v^2}(v\mathbf{grad} u - u\mathbf{grad} v)$

(4)$\mathbf{grad} f(u) = f'(u)\mathbf{grad} u$

1.2.4 高阶偏导数和高阶全微分

n 阶偏导数均连续时，n 阶混合偏导与求导顺序无关。

设 $u = f(x,y)$ 的各阶偏导数存在且连续，则有：

$$\mathrm{d}^2 u = f_{xx}\mathrm{d}x^2 + 2f_{xy}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + f_{yy}\mathrm{d}y^2$$

$$\mathrm{d}^n u = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^n f$$

1.2.5 多元复合函数的偏导数和全微分

函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 均在点 (x,y) 处可微，函数 $z=f(u,v)$ 在相应的点 (u,v) 处可微，则复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 在 (x,y) 处可微，其全微分为:

$$\mathrm{d}z=\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}\right)\mathrm{d}y$$

复合函数 $z=f[u(x,y),v(x,y)]$ 有如下链式法则:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

含有更多中间变量和自变量的复合函数的偏导和微分按照上述方法可以得到。设复合函数含有 m 个中间变量和 n 个自变量，记为 $y=f(u_1,u_2,\cdots,u_m),u_i=u_i(x_1,x_2,\cdots,x_n),i=1,2,\cdots,m$,

则其全微分为:

$$\mathrm{d}y=\frac{\partial y}{\partial x_1}\mathrm{d}x_1+\frac{\partial y}{\partial x_2}\mathrm{d}x_2+\cdots+\frac{\partial y}{\partial x_n}\mathrm{d}x_n$$

其中:

$$\frac{\partial y}{\partial x_i}=\frac{\partial y}{\partial u_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_i}+\frac{\partial y}{\partial u_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_i}+\cdots+\frac{\partial y}{\partial u_m}\frac{\partial u_m}{\partial x_i},i=1,2,\cdots,n$$

多元函数的一阶全微分形式具有不变性。

全微分的有理运算法则:

(1)$\mathrm{d}(u\pm v)=\mathrm{d}u\pm\mathrm{d}v$

(2)$\mathrm{d}(uv)=v\mathrm{d}u+u\mathrm{d}v$

(3)$\mathrm{d}(\frac{u}{v})=\frac{1}{v^2}(v\mathrm{d}u-u\mathrm{d}v)\ (v\neq 0)$

1.2.6 由一个方程确定隐函数的微分法

定理 1.10 (隐函数存在定理)

如果二元函数 $F(x,y)$ 满足:

(1)$F(x_0,y_0)=0$;

(2) 在点 (x_0,y_0) 的某邻域中有连续偏导数;

(3)$F_y(x_0,y_0)\neq 0$,

则方程 $F(x,y)=0$ 在点 (x_0,y_0) 的某一邻域中唯一确定了一个具有连续导数的函数 $y=f(x)$，满足 $y_0=f(x_0)$ 和 $F(x,f(x))=0$，并且:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

证明 根据链式法则，$F(x,f(x))=0$ 两端同时对 x 求导，得:

$$F_x+F_y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0$$

整理得:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y}$$

□

多元函数求导方法相同。

隐函数高阶导数的求法同样遵循链式法则。

1.3 多元函数的 Taylor 公式和极值问题

1.3.1 多元函数的 Taylor 公式

定理 1.11 (多元函数的 Taylor 公式)

设二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的某邻域 $U(x_0,y_0)$ 内有连续二阶偏导数。$(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)\subseteq U(x_0,y_0)$，则存在 $\theta\in(0,1)$，使得二元函数带 Lagrange 余项的 Talyor 公式的一阶形式为:

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+R_1$$

$$R_1=\frac{1}{2!}\left(f_{xx}\Delta x^2+2f_{xy}\Delta x\Delta y+f_{yy}\Delta y^2\right)|_{(x_0+\theta\Delta x,y_0+\theta\Delta y)}$$

♡

令 $\mathbf{x}_0=(x_0,y_0)^T,\mathbf{x}_0+\Delta\mathbf{x}=(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)^T$，则 R_1 的系数矩阵为:

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0+\theta\Delta\mathbf{x})=\begin{bmatrix}f_{xx}&f_{xy}\\f_{xy}&f_{yy}\end{bmatrix}$$

该矩阵被称为函数 f 在 $\mathbf{x}_0+\theta\Delta\mathbf{x}$ 处的 Hesse 矩阵。二次型的矩阵形式为

$$R_1=\frac{1}{2!}(\Delta\mathbf{x})^T\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0+\theta\Delta\mathbf{x})\Delta\mathbf{x}$$

定义 1.31 ($C^{(m)}$ 类函数)

$f(\mathbf{x})$ 是区域 $\Omega\subseteq\mathbf{R}^n$ 内的 n 元函数。若:

f 在 Ω 内连续，则 f 是 Ω 上 $C^{(0)}$ 类函数;

f 在 Ω 内具有连续的 m 阶偏导数，则 f 是 Ω 上 $C^{(m)}$ 类函数。

♣

定理 1.12

设 n 元函数 $f\in C^{(2)}(U(x_0)),x_0+\Delta x\in U(x_0)$，$x_0=(x_{0,1},x_{0,2},\cdots,x_{0,n})^T\in\mathbf{R}^n$。存在

$\theta \in (0,1)$，使得：

$$f(x_0+\Delta x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i}\Delta x_i + R_1$$

$$R_1 = \frac{1}{2!}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f(x_0+\theta\Delta x)}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j$$

♡

1.3.2 无约束极值，最大值和最小值

定义 1.32 (无约束极值)

设 $f: U(x_0) \subseteq \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$，$\forall \mathbf{x} \in U(x_0)$:

(1)$f(\mathbf{x}) \le f(\mathbf{x}_0)$:

无约束极大值（极大值）：$f(\mathbf{x}_0)$；极大值点：x_0。

(2)$f(\mathbf{x}) \ge f(\mathbf{x}_0)$:

无约束极小值（极小值）：$f(\mathbf{x}_0)$；极小值点：x_0。

♣

定理 1.13 (极值的必要条件)

设 n 元函数 f 在 x_0 处可微，且 x_0 为 f 的极值点，则必有 $\nabla f(x_0) = 0$。

♡

定理 1.14 (极值的充分条件)

设 n 元函数 $f \in C^{(2)}(U(x_0)), \nabla f(x_0) = 0, H_f(x_0)$ 为 f 在点 x_0 的 Hesse 矩阵。

若 $H_f(x_0)$ 正定，$f(x_0)$ 为极小值；

若 $H_f(x_0)$ 负定，$f(x_0)$ 为极大值。

♡

命题 1.4

对于二元函数 $z = f(x,y)$, 若点 $P_0(x_0,y_0)$ 为 f 的驻点，记 $f_{xx}(P_0) = A, f_{xy}(P_0) = B, f_{yy}(P_0) = C$, 则 f 在 P_0 的 Heese 矩阵为: $\begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$ 根据矩阵正负定和不定的判定方法，有：

(1)$A > 0, AC - B^2 > 0$,$H_f(P_0)$ 正定，$f(P_0)$ 为极小值;

(2)$A < 0, AC - B^2 > 0$,$H_f(P_0)$ 负定，$f(P_0)$ 为极大值;

(3)$AC - B^2 < 0$,$H_f(P_0)$ 不定，$f(P_0)$ 不是极值;

(4)$AC - B^2 = 0$, 为临界情况，需结合其它条件判定。

♠

定义 1.33 (最值问题)

在有界闭区域上，函数 f 必有最大值最小值。只需求出闭区域上 f 的所有极大值（极小值），并与边界上 f 的最大值（最小值）做对比，即可求得 f 在有界闭区域上的最大值（最小值）。♣

1.3.3 有约束极值，Lagrange 乘数法

定义 1.34 (有约束极值)

又称条件极值，指对自变量附有某些约束条件的极值问题。这类问题可通过 Lagrange 乘数法解决。♣

定理 1.15 (Lagrange 乘数法)

设目标函数为 $z=f(x,y)$，约束条件为 $\varphi(x,y)=0$。构造三元函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$。令该三元函数三个偏导数为 0，得:

$$\begin{cases} L_x(x,y,\lambda)=f_x(x,y)+\lambda\varphi_x(x,y)=0 \\ L_y(x,y,\lambda)=f_y(x,y)+\lambda\varphi_y(x,y)=0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda)=\varphi(x,y)=0 \end{cases}$$

解出 x_0,y_0,λ_0。(x_0,y_0) 一般就是我们所要求的极值点。♡

1.4 多元向量值函数的导数和微分

1.4.1 一元向量值函数的导数和微分

定义 1.35 (一元向量值函数的导数)

设 $f:U(x_0)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n, x_0+\Delta x\in U(x_0)$，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在，则 f 在 x_0 处可导，此极限值称为 f 在 x_0 处的导数。考虑到

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\begin{bmatrix} \frac{f_1(x_0+\Delta x)-f_1(x_0)}{\Delta x} \\ \vdots \\ \frac{f_m(x_0+\Delta x)-f_m(x_0)}{\Delta x} \end{bmatrix}$$

故 f 可导（n 阶可导）的充要条件是每个分量可导（n 阶可导）。求 f 的 n 阶导数相当于对每个分量求 n 阶导。♣

定义 1.36 (一元向量值函数的微分)

设 $:U(x_0)\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}^m$ 是一个一元向量值函数，$x_0+\Delta x\in U(x_0)$. 若存在一个与 Δx 无关的 m 维列向量 $=(a_1,a_2,\cdots,a_m)^{\mathrm{T}}$ ，使

$$(x_0+\Delta x)-(x_0)=\Delta x+(\rho),$$

其中 $\rho=|\Delta x|$, (ρ) 是关于 ρ 的高阶无穷小向量，则称 在 x_0 处可微，并称 Δx 为 f 在 x_0 处的微分，记作 $\mathrm{d}\ (x_0)$ ，即 $\mathrm{d}\ (x_0)=\Delta x$.

命题 1.5

设向量值函数 与 都在点 处可微，u 是在 处可微的数量值函数，则有

1. $+$ 在 处可微，并且其导数为
$$\mathrm{D}(+)()=\mathrm{D}()+\mathrm{D}();$$
2. $\langle\,,\,\rangle$ 在 x 处可微，并且其导数为
$$\mathrm{D}\langle\,,\,\rangle()=(())^{\mathrm{T}}\mathrm{D}()+(())^{\mathrm{T}}\mathrm{D}();$$
3. u 在 处可微，并且其导数为
$$\mathrm{D}(u)()=u\mathrm{D}()+()\mathrm{D}u();$$
4. 若 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ ，则向量积 $f\times g$ 在 处可微，并且其导数为
$$\mathrm{D}(\times)()=\mathrm{D}()\times()+()\times\mathrm{D}().$$

定理 1.16 (向量值复合函数求导的链式法则)

设向量值函数 $=\ =(g_1,g_2,\cdots,g_p)^{\mathrm{T}}$ 在点 $_0\in\mathbf{R}^n$ 处可微，向量值函数 $=\ =(f_1,f_2,\cdots,f_m)^{\mathrm{T}}$ 在对应的点 $_0=(_0)\in\mathbf{R}^p$ 处可微，则复合函数 $=\ \circ$ 在点 $_0$ 处可微，并且

$$\mathrm{D}\ (_0)=\mathrm{D}\ (_0)|_{_0=(_0)}\mathrm{D}\ (_0)=\mathrm{D}\ ((_0))\mathrm{D}\ (_0).$$

1.4.2 由方程所确定的隐函数的微分法

定理 1.17 (隐函数存在定理)

设有函数方程组

$$\begin{cases}F_1(x,y,u,v)=0\\F_2(x,y,u,v)=0\end{cases}\tag{1.1}$$

如果函数 F_1,F_2 满足

1. $F_i\in C^{(1)}(U(x_0,y_0,u_0,v_0)),i=1,2$ ；
2. $F_i(x_0,y_0,u_0,v_0)=0,i=1,2$ ；

3. Jacobi 行列式

$$J=\left.\frac{\partial\left(F_1,F_2\right)}{\partial(u,v)}\right|_{\left(x_0,v_0,u_0,v_0\right)}=\left.\begin{vmatrix}\dfrac{\partial F_1}{\partial u} & \dfrac{\partial F_1}{\partial v}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial u} & \dfrac{\partial F_2}{\partial v}\end{vmatrix}\right|_{\left(x_0,v_0,u_0,v_0\right)}\neq 0$$

则在点 $(x_0,y_0,u_0,v_0)\in\mathbb{R}^4$ 的某邻域 $U\left((x_0,y_0,u_0,v_0)\right)$ 内由方程组(1.1)唯一确定了两个单值且有连续偏导数的二元函数

$$u=u(x,y),\quad v=v(x,y),$$

它满足

$$u_0=u\left(x_0,y_0\right),\quad v_0=v\left(x_0,y_0\right)$$

及

$$F_i(x,y,u(x,y),v(x,y))\equiv 0,\quad i=1,2,(x,y)\in U\left(\left(x_0,y_0\right)\right).$$

♡

1.5 多元函数微分学在几何上的应用

定义 1.37 (空间曲线的切线与法平面)

设空间曲线 C 由参数方程

$$\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\qquad t\in[\alpha,\beta]\\ z=z(t)\end{cases}$$

给出，其中 $x(t),y(t)$ 及 $z(t)$ 均在 (α,β) 上可导。又设 $t_0\in(\alpha,\beta)$ 满足

$$x'\left(t_0\right)^2+y'\left(t_0\right)^2+z'\left(t_0\right)^2\neq 0$$

我们来求 C 上的点 $M_0\left(x\left(t_0\right),y\left(t_0\right),z\left(t_0\right)\right)$ 处的切线方程。对于 C 上任一异于 M_0 的点 $M(x(t),y(t),z(t))$ 而言，割线 M_0M 的方向可由向量

$$\left(x(t)-x\left(t_0\right),y(t)-y\left(t_0\right),z(t)-z\left(t_0\right)\right)$$

表示，当然也可用向量

$$\left(\frac{x(t)-x\left(t_0\right)}{t-t_0},\frac{y(t)-y\left(t_0\right)}{t-t_0},\frac{z(t)-z\left(t_0\right)}{t-t_0}\right)$$

表示。现令 $t\to t_0$，那么割线 M_0M 的极限位置便是 M_0 处的切线，从而对上式在 $t\to t_0$ 时求极限知切线的方向可由向量

$$\left(x'\left(t_0\right),y'\left(t_0\right),z'\left(t_0\right)\right)$$

确定，我们称这一向量为 C 在 M_0 处的切向量。相应地，C 在 M_0 处的切线方程为

$$\frac{x-x\left(t_0\right)}{x'\left(t_0\right)}=\frac{y-y\left(t_0\right)}{y'\left(t_0\right)}=\frac{z-z\left(t_0\right)}{z'\left(t_0\right)}$$

如果我们将过 M_0 且与 M_0 处切线垂直的平面称为曲线 C 在 M_0 处的法平面，那么上述切向量自然就是这一法平面的法向量，于是该法平面的方程也即

$$x'\left(t_0\right)\left(x-x\left(t_0\right)\right)+y'\left(t_0\right)\left(y-y\left(t_0\right)\right)+z'\left(t_0\right)\left(z-z\left(t_0\right)\right)=0.$$

♣

1.5.1 弧长

定义 1.38 (弧长)

设曲线 $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\alpha<t<\beta$。若 $\dot{\mathbf{r}}(t)$ 连续且 $\dot{\mathbf{r}}(t)\neq 0$，则曲线 $\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t)),\alpha<t<\beta$ 可求长，长度为：

$$s=\int_\alpha^\beta\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2+[\dot{z}(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

- 若为平面曲线，只需考虑 $z=0$

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

- 若平面曲线为 $y=y(x)$，则有：

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{1+[y'(x)]^2}\,\mathrm{d}t$$

- 若平面曲线为 $\rho=\rho(\theta),x=\rho(\theta)\cos\theta,y=\rho(\theta)\sin\theta$。则有：

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta=\int_\alpha^\beta\sqrt{[\rho(\theta)]^2+[\rho'(\theta)]^2}\,\mathrm{d}\theta$$

显然，s(t) 单调增且连续可导。记下式为弧微分：

$$\mathrm{d}s=\|\dot{\mathbf{r}}(t)\|\mathrm{d}t=\sqrt{[\dot{x}(t)]^2+[\dot{y}(t)]^2+[\dot{z}(t)]^2}\,\mathrm{d}t$$

s(t) 单调增且连续可导，故存在反函数 t(s)。将 t(s) 代入 Γ 中，得 $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t(s))$。s 称为自然参数。s 与曲线 Γ 一一对应。设切向量与曲线 x, y, z 轴正向的夹角分别为 α,β,γ，则有：

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}s}=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right),\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}=\cos\alpha,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}=\cos\beta,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}=\cos\gamma$$

♣

1.5.2 曲面的切平面与法线

定义 1.39 (曲面的切平面与法线)

设曲面 Γ 的方程为

$$F(x,y,z)=0$$

$M_0\left(x_0,y_0,z_0\right)$ 是 Γ 上一点，且满足 $\operatorname{grad}F\left(M_0\right)\neq\mathbf{0}$。又设 F 在 M_0 的某邻域内连续

可微。现考虑曲面 Γ 上过 M_0 的任意一条曲线 C，设其由参数方程

$$\left\{\begin{array}{ll} x=x(t) & \\ y=y(t) & t\in[\alpha,\beta] \\ z=z(t) & \end{array}\right.$$

给出，并设点 M_0 对应于参数 t_0。由于 C 位于 Γ 上，故而 $F(x(t),y(t),z(t))=0$，对这一式子在 t_0 处求导可得

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)\cdot x'(t_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)\cdot y'(t_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)\cdot z'(t_0)=0$$

也即

$$\langle \operatorname{grad} F(M_0),(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))\rangle=0,$$

这说明 C 在 M_0 处的切向量与 F 在 M_0 处的梯度向量垂直。注意到 $\operatorname{grad} F(M_0)$ 是一个确定的向量，故而曲面 Γ 上过 M_0 的所有曲线在 M_0 的切线是共面的，我们把这一平面称为 Γ 在 M_0 处的切平面，由于 $\operatorname{grad} F(M_0)$ 是它的法向量，所以其方程为

$$\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)\cdot(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)\cdot(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)\cdot(z-z_0)=0.$$

该切平面在 M_0 处的法线被称作曲面 Γ 在 M_0 处的法线，其方程为

$$\frac{x-x_0}{\frac{\partial F}{\partial x}(M_0)}=\frac{y-y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}(M_0)}=\frac{z-z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}(M_0)}$$

♣

1.6 练习

1.6.1 题目

1. 设函数为:

$$f(x,y)=\left\{\begin{array}{c} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0) \\ 0,(x,y)=(0,0) \end{array}\right.$$

   证明 $f''_{xy}\neq f''_{yx}$

2. 2. 已知 $Z=u^v,u=\ln\sqrt{x^2+y^2},v=\arctan\dfrac{y}{x}$，求 $\mathrm{d}Z$
3. 讨论函数

$$z=f(x,y)=\left\{\begin{array}{c} (x^2+y^2)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right),x^2+y^2=\neq 0 \\ 0,x^2+y^2=0 \end{array}\right.$$

   在坐标原点:

   (a). 是否连续;

   (b). 偏导数是否存在;

   (c). 是否可微;

(d). 偏导数是否连续；

4. 设 $z = u * v, x = e^u \cos v, y = e^v \cos u$，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$。

5. 设 $u = f(x, y, z)$ 有连续的一阶偏导数，又函数 $y = y(x)$ 和 $z = z(x)$ 分别由下列两式确定:$e^{xy} - xy = 2$ 和 $e^x = \int\limits_0^{x-z} \frac{\sin t}{t} \mathrm{d}t$，求 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$

6. 证明曲面 $f(x - az, y - bz) = 0$ 在任一点处的切平面与直线 $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = z$ 平行。

7. 设函数 $u(x, y, z) = 1 + \frac{x^2}{6} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{18}$，单位向量 $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$，求 $\frac{\partial u}{\partial n}|_{(1,2,3)}$。

8. 设 $z = z(x, y)$ 是由 $x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$ 确定的函数, 求 $z = z(x, y)$ 的极值点和极值。

9. 在椭圆 $x^2 + 4y^2 = 4$ 上求一点，使其到直线 $2x + 3y - 6 - 0$ 的距离最短。

10. 求函数 $f(x, y) = 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5$ 在 $(1, -2)$ 的泰勒公式。

1.6.2 答案

1. 当 $(x, y) \neq (0, 0)$ 时，

$$f'_x(x, y) = y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} + xy\frac{2x(x^2 + y^2) - 2x(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y(x^4 - y^4 + 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{x(x^4 - y^4 - 4x^2y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

当 $(x, y) = (0, 0)$ 时，由偏导数定义得:

$$f'_x(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta x} = 0$$

$$f'_y(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{0 - 0}{\Delta y} = 0$$

$$f''_{xy}(x, y) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f'_x(x, y)(0, 0 + \Delta y) - f'_x(x, y)(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\frac{\Delta y(-\Delta y^4)}{\Delta y^4} - 0}{\Delta y} = -1$$

$$f''_{yx}(x, y) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f'_y(x, y)(0 + \Delta x, 0) - f'_y(x, y)(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{\Delta x \Delta x^4}{\Delta x^4} - 0}{\Delta x} = 1$$

显然，$f''_{xy} \neq f''_{yx}$

2.

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} = (vu^{v-1})\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2 + y^2} + (u^v \ln u)\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(-\frac{y}{x^2}\right) = \frac{u^v}{x^2 + y^2}\left(\frac{xv}{u} - y\ln u\right)$$

$$\frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} = (vu^{v-1})\frac{1}{2}\frac{2y}{x^2 + y^2} + (u^v \ln u)\frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2}\frac{1}{x} = \frac{u^v}{x^2 + y^2}\left(\frac{yv}{u} + x\ln u\right)$$

$$\mathrm{d}Z = \frac{u^v}{x^2 + y^2}\left[\left(\frac{xv}{u} - y\ln u\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{yv}{u} + x\ln u\right)\mathrm{d}y\right]$$

3. (a). 当 (x,y)$\neq (0, 0)$ 时，$|f(x, y)^2 + y^2|$，故 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = 0$，所以函数在坐标原点处连续。

(b). 在 $(0,0)$ 点，$\dfrac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\dfrac{x^2\sin\frac{1}{\sqrt{x^2}}}{x}$，所以

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}x*\sin\frac{1}{\sqrt{x^2}}=0$$

即偏导数 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}$ 存在，且 $\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=0$。

同理，$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}$ 存在，且为 0。

(c). 由 (b) 知，$\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x}=\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y}=0$，故:

$$\Delta z-[\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\Delta y]=f(\Delta x,\Delta y)-f(0,0)-[0\Delta x+0\Delta y]=$$

$$[(\Delta x)^2+(\Delta y)^2]\sin\frac{1}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}$$

因为 $\lim\limits_{\rho\to 0^+}=\dfrac{\Delta z-[\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}*\Delta x+\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\Delta y]}{\rho}=\lim\limits_{\rho\to 0^+}\rho\sin\dfrac{1}{\rho}=0$

故函数 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，且 $\mathrm{d}z=0*\mathrm{d}x+0*\mathrm{d}y=0$

(d). 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2y\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

由于 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}2x\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=0$,

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y=x\to 0}}\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\cos\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\sqrt{2}}\cos 1\sqrt{2}\,|2|$ 不存在。

故偏导数 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ 在原点不连续。同理，$\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}$ 在原点不连续。

4. 按复合函数求导法则有:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=v\frac{\partial u}{\partial x}+u\frac{\partial v}{\partial x}$$

将 $x=e^u\cos v, y=e^v\cos u$ 两边对 x 求导得:

$$z=f(x,y)=\begin{cases}1=e^u\dfrac{\partial u}{\partial x}\cos v-e^u\dfrac{\partial v}{\partial x}\sin v\\ 0=e^u\dfrac{\partial u}{\partial x}\sin v+e^u\dfrac{\partial v}{\partial x}\cos v\end{cases}$$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\cos v}{e^u}$, $\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\sin v}{e^u}$

将 $x=e^u\cos v, y=e^v\cos u$ 两边对 y 求导得:

$$z=f(x,y)=\begin{cases}0=e^u\dfrac{\partial u}{\partial y}\cos v-e^u\dfrac{\partial v}{\partial y}\sin v\\ 1=e^u\dfrac{\partial u}{\partial y}\sin v+e^u\dfrac{\partial v}{\partial y}\cos v\end{cases}$$

解得 $\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\sin v}{e^u},\frac{\partial v}{\partial y}=\frac{\cos v}{e^u}$ 因此

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{v\cos v-u\sin v}{e^u}$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{v\sin v+u\cos v}{e^u}$$

5. 注意到

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

，由 $e^{xy}-xy=2$ 两边对 x 求导，得

$$e^{xy}(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})-(y+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})=0$$

即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{y}{x}$。又由 $e^x=\int\limits_0^{x-z}\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ 两边对 x 求导得:

$$e^x=\frac{\sin(x-z)}{x-z}(1-\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x})$$

即 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=1-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}$ 代入，得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial f}{\partial x}-\frac{y}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left[1-\frac{e^x(x-z)}{\sin(x-z)}\right]\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$$

6. 设 $F(x,y,z)=f(x-az,y-bz)$ 则 $F'_x(x,y,z)=f'_1,F'_y(x,y,z)=f'_2,F'_z(x,y,z)=-af'_1-bf'_2$，所以 $\vec{n}=f'_1,f'_2,-af'_1-bf'_2$，直线 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=z$ 方向向量为 $\vec{s}=a,b,1$，于是 $\vec{n}\vec{s}=af'_1+bf'_2-af'_1-bf'_2=0$ 因此曲面 $f(x-az,y-bz)=0$ 在任一点处的切平面与直线 $\frac{x}{a}=\frac{y}{b}=z$ 平行，证毕。

7. $\frac{\partial u}{\partial x}|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3},\frac{\partial u}{\partial y}|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3},\frac{\partial u}{\partial z}|_{(1,2,3)}=\frac{1}{3}$

由单位向量 $\vec{n}$ 知，$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}},\cos\gamma=\frac{1}{\sqrt{3}}$

因此 $\frac{\partial u}{\partial n}|_{(1,2,3)}=\cos\alpha\frac{\partial u}{\partial x}|_{(1,2,3)}+\cos\beta\frac{\partial u}{\partial y}|_{(1,2,3)}+\cos\gamma\frac{\partial u}{\partial z}|_{(1,2,3)}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

8. 方程 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$ 两边分别对 x,y 求偏导数，得

$$z=f(x,y)=\begin{cases}2x-6y-2y\frac{\partial z}{\partial x}-2z\frac{\partial z}{\partial x}=0(1)\\-6x+20y-2z-2y\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial z}{\partial y}=0(2)\end{cases}$$

令 $\frac{\partial z}{\partial x}=0,\frac{\partial z}{\partial y}=0$，得

$$z=f(x,y)=\begin{cases}x-3y=0\\-3x+10y-z=0\end{cases}$$

即 $x=3y,z=y$。

将上式代入 $x^2-6xy+10y^2-2yz-z^2+18=0$，可得 $x=9,y=3,z=3$，或

$x=-9,y=-3,z=-3$

(1) 式对 x 求偏导，得 $2-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0$

(1) 式对 y 求偏导，得 $-6-2\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y}-2z\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0$

(2) 式对 y 求偏导，得 $20-2\frac{\partial z}{\partial y}-2\frac{\partial z}{\partial y}-2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-2\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2-2z\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$

所以 $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(9,3,3)}=\frac{1}{6},B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(9,3,3)}=-\frac{1}{2},C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(9,3,3)}=\frac{5}{3}$

故 $B^2-AC=-\frac{1}{36}<0,A>0$，从而点 $(9,3)$ 是 $z(x,y)$ 的极小值点，极小值为 z(9,3)=3.

类似的，由 $A=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{1}{6},B=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}|_{(-9,-3,-3)}=\frac{1}{2},C=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}|_{(-9,-3,-3)}=-\frac{5}{3}$

故 $B^2-AC=-\frac{1}{36}<0,A<0$，从而点 $(-9,-3)$ 是 $z(x,y)$ 的极大值点，极大值为 z(-9,-3)=-3.

9. 设 $P(x,y)$ 是椭圆 $x^2+4y^2=4$ 上任意一点，则 P 到直线 $2x+3y-6-0$ 的距离为:

$$d=\frac{|2x+3y-6|}{\sqrt{13}}$$

求 d 的最小值点即求 d^2 的最小值点。作

$$F(x,y,\lambda)=\frac{1}{13}(2x+3y-6)^2+\lambda(x^2+4y^2=4)$$

由拉格朗日数乘法，有 $\frac{\partial F}{\partial x}=0,\frac{\partial F}{\partial y}=0,\frac{\partial F}{\partial \lambda}=0$，即:

$$z=f(x,y)=\begin{cases}\frac{4}{13}(2x+3y-6)+2\lambda x=0\\ \frac{6}{13}(2x+3y-6)+8\lambda y=0\\ x^2+4y^2-4=0\end{cases}$$

解得:$x_1=\frac{8}{5},y_1=\frac{3}{5};x_1=-\frac{8}{5},y_1=-\frac{3}{5}$ 于是 $d|_{(x_1,y_1)}=\frac{1}{\sqrt{13}},d|_{(x_2,y_2)}=\frac{11}{\sqrt{13}}$，故点 $(\frac{8}{5},\frac{3}{5})$ 即为所求的点。

10. $f(1,-2)=5$,

$$f'_x(1,-2)=(4x-y-6)|_(1,-2)=0,f'_y(1,-2)=(-x-2y-3)|_(1,-2)=0$$

$$f''_{xx}(1,-2)=4,f''_{xy}(1,-2)=-1,f''_{yy}(1,-2)=-3$$

阶数为 3 的各阶偏导数为 0。故

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= f[1+(x-1),-2+(y+2)] \\
&= f(1,-2)+(x-1)f'_x(1,-2)+(y+2)f'_y(1,-2)+\frac{1}{2!}[(x-1)^2f''_{xx}(1,-2) \\
&\quad +2(x-1)(y+2)f''_{xy}(1,-2)+(y+2)^2f''_{yy}(1,-2)] \\
&= 5+\frac{1}{2!}[4(x-1)^2-2(x-1)(y+2)-2(y+2)^2] \\
&= 5+2(x-1)^2-(x-1)(y+2)-(y+2)^2
\end{aligned}$$

第 2 章 多元函数积分学

内容提要

- 二重积分
- 三重积分
- 一型线积分和面积分
- 二型线积分和面积分
- 各种积分的联系和在场论中的应用

2.1 二重积分

2.1.1 多元数量值函数积分的性质

- 线性性质

$$\int_\Omega kf(M)d\Omega = k\int_\Omega f(M)d\Omega$$

$$\int_\Omega [f(M)+g(M)]d\Omega = \int_\Omega f(M)d\Omega + \int_\Omega g(M)d\Omega$$

- 对积分域的可加性设 $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2$

$$\int_\Omega f(M)d\Omega = \int_{\Omega_1} f(M)d\Omega + \int_{\Omega_2} f(M)d\Omega$$

- 积分不等式
  - 若 $f(M) \le g(M)$，$\forall M \in \Omega$，则:

  $$\int_\Omega f(M)d\Omega \le \int_\Omega g(M)d\Omega$$

  - $\left|\int_\Omega f(M)d\Omega\right| \le \int_\Omega |f(M)|d\Omega$
  - 若 $l \le f(M) \le L$，$\forall M \in \Omega$，则:

  $$l\cdot V(\Omega) \le \int_\Omega f(M)d\Omega \le L\cdot V(\Omega)$$

- 中值定理设 $f \in C(\Omega)$，Ω 为有界连通闭区域，则 $\exists P \in \Omega$，使

$$\int_\Omega f(M)d\Omega = f(P)\cdot V(\Omega)$$

笔记 性质往往不会单独出题，而是作为技巧和方法融合在更复杂的题目中。

2.1.2 直角坐标系下二重积分的计算

- x 型区域积分：过 $[a,b]$ 上任意一点 x_1，作与 y 轴平行的直线，与区域边界至多交于两点 $(x_1,y_1(x_1))$，$(x_1,y_2(x_1))$，公式为：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)d\sigma = \int_a^b \left[\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right] dx$$

- y 型区域积分：过 $[c,d]$ 上任意一点 y_1，作与 x 轴平行的直线，与区域边界至多交于两点 $(x_1(y_1),y_1)$，$(x_2(y_1),y_1)$，公式为：

$$\iint_{\Omega} f(x,y)d\sigma = \int_c^d \left[\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx\right] dy$$

笔记 解题时建议先绘制区域草图，判断采用 x 型或 y 型积分更简便。

例题 2.1(经典例题) 计算 $\iint_{\sigma} x^2y\,d\sigma$，其中 σ 由 $x=0$，$y=1$ 和 $x=\sqrt{y}$ 围成。

证明 区域 σ 可表示为：$0\le x\le 1$，$x^2\le y\le 1$。将重积分化为累次积分：

$$\begin{aligned}\iint_{\sigma} x^2y\,d\sigma &= \int_0^1 x^2dx\int_{x^2}^1 y\,dy\\ &= \int_0^1 x^2\cdot\frac{1-x^4}{2}dx\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^7}{7}\right)\Big|_0^1\\ &= \frac{2}{21}\end{aligned}$$

□

3. 极坐标法

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma = \iint_{(\sigma)} f(\rho cos\theta,\rho sin\theta)\rho d\rho d\theta.$$

笔记 在公式中要注意几个细节：

1.$x=\rho cos\theta$

2.$y=\rho sin\theta$

3.$d\sigma = d\rho d\theta$

正确使用极坐标法可以很大程度上降低计算难度，这里给出几个可以使用极坐标法的标志：

积分域为圆，圆环，还有扇形时；

被积函数有 $f(\sqrt{x^2+y^2})$,$f(\dfrac{y}{x})$,$f(\dfrac{x}{y})$ 类似形式时。

2.1.3 二重积分计算技巧

1. 换元法

正则变换:

条件:

·$u,v \in C^{(1)}(\sigma)$

·Jacobl 行列式 $\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)} \neq 0$,∀(x,y)∈ (σ)

结论: 变换为一一变换，将内部映射为内部，外部映射为外部。

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y)d\sigma = \iint_{(\sigma)} f[x(u,v),y(u,v)]\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv.$$

笔记 正则变换 $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}dudv$ 部分容易被遗忘，需要同学着重记忆。

极坐标变换也应用了正则变化换元法，解释了为什么会有 $d\sigma = d\rho d\theta$，感兴趣的同学可以自行证明。

2. 利用奇偶性和对称性简化重积分的运算

若积分域 (D) 关于 y 轴对称:

$$\iint_{(D)} f(x,y)dD = \begin{cases} 2\iint_{(D_1)} f(x,y)dD_1 & f(-x,y)=f(x,y) \\ 0 & f(-x,y)=-f(x,y) \end{cases} \tag{2.1}$$

笔记 其中 D_1 为 D 大于 0 的部分；若 f(x,y) 关于 x 轴对称时同理；

若积分域 (D) 关于 y=x 轴对称:

$$\iint_{(D)} f(x,y)dD = \iint_{(D)} f(y,x)dD \tag{2.2}$$

例题 2.2(经典例题) 交换累次积分:

$I = \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f(x,y)dy$

解

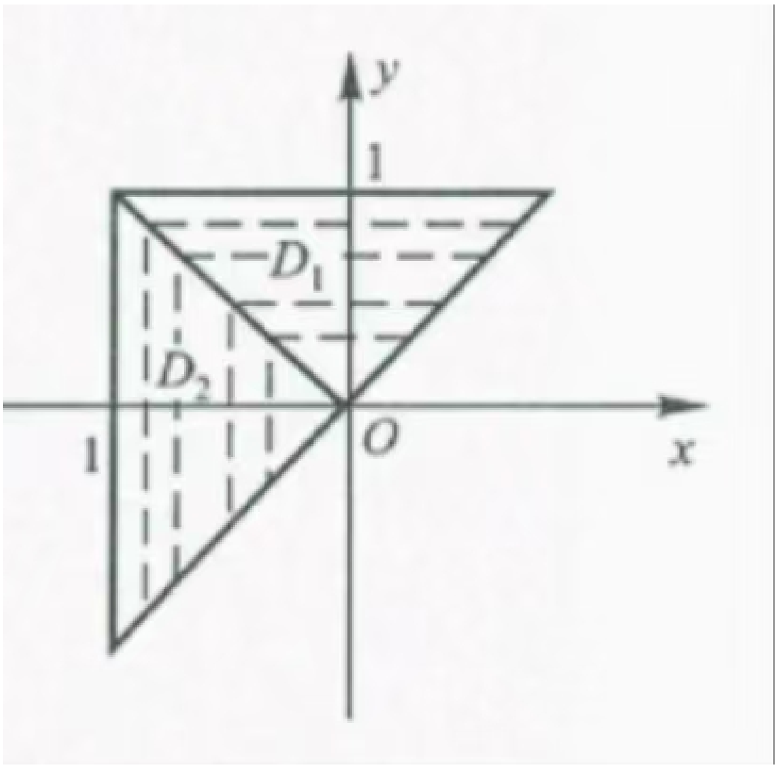
步骤 1: 分析原始积分区域

原始积分式是:

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx + \int_1^2 \int_0^{2-x} f(x,y)\,dy\,dx$$

步骤 2: 找出联合区域

通过图形分析得到: - 对于 $0 \leq y \leq 1$，x 的范围是 $0 \leq x \leq \sqrt{2y-y^2}$。- 对于 $1 \leq y \leq 2$，x 的范围是 $2-y \leq x \leq 1$。



步骤 3： 交换积分顺序

交换积分顺序后的表达式是：

$$I = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{2y-y^2}} f(x,y)\,dx\,dy + \int_1^2 \int_{2-y}^1 f(x,y)\,dx\,dy$$

笔记 这种题型的技巧在于可以通过原积分画出积分域，再进行积分变换操作

例题 2.3(经典例题) 计算下列二重积分：

$I = \iint_D y[1+xcos(x^4+y^4)]d\sigma$, 其中 D 由直线 y=x,y=1,x=-1 围成。

解 $y[1+xcos(x^4+y^4)] = y + yxcos(x^4+y^4)$ 注意到 $yxcos(x^4+y^4)$ 是关于 x 或者 y 的奇函数。

积分域对应的图形可以被 $y=-x$ 划分，其中上半部分 D1 关于 y 轴对称，下半部分 D2 关于 x 轴对称，由运算技巧第二条可知我们可以应用积分的对称性来解决这道题。

$$\iint_D yxcos(x^4+y^4)]d\sigma = \iint_{D_1} yxcos(x^4+y^4)]d\sigma + \iint_{D_2} yxcos(x^4+y^4)]d\sigma$$

$$= 0 + 0 = 0$$

故原式可化简为

$$\iint_D yd\sigma = \frac{2}{3}$$

3 带绝对值的重积分计算

这类题型一般被积函数都带有绝对值，他们的解决思想是现根据绝对值内函数在积分域内的正负划分原始积分域，去掉被积函数中的绝对值，然后计算。

例题 2.4(经典例题) $I=\iint_D |y-x^2|dxdy$, 其中积分域为 $D=\{(x,y)||x|\leq 1, 0\leq y\leq 2\}$

解 根据绝对值划分区域

$D_1=\{(x,y)||x|\leq 1, 0\leq y\leq x^2\}$,

$D_2=\{(x,y)||x|\leq 1, x^2\leq y\leq 2\}$,

则可将积分转化为:

$$I=\iint_D |y-x^2|dxdy=I=I=\iint_{D_1}(x^2-y)dxdy+\iint_{D_2}(y-x^2)dxdy$$

$$=\frac{46}{15}$$

(编者在这里省略了具体的积分计算步骤，同学们在复习时可以自行完成)

4 综合题型：考察学生对二重积分相关性质技巧的掌握

例题 2.5(经典例题) 设 $f(x)$ 在 [a,b] 上连续，且 $f(x)>0$, 证明

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}\geq (b-a)^2$$

解

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx=\iint_D \frac{f(x)}{f(y)}dxdy=\iint_D \frac{f(y)}{f(x)}dxdy$$

其中 $D=\{(x,y)\mid a\leq x\leq b, a\leq y\leq b\}$

$$\int_a^b f(x)dx\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx=\frac{1}{2}\iint_D\left[\frac{f(x)}{f(y)}+\frac{f(y)}{f(x)}\right]dxdy=\frac{1}{2}\iint_D \frac{f^2(x)+f^2(y)}{f(x)f(y)}dxdy$$

$$\frac{1}{2}\iint_D \frac{f^2(x)+f^2(y)}{f(x)f(y)}dxdy\geq\frac{1}{2}\iint_D \frac{2f(x)f(y)}{f(x)f(y)}dxdy=\iint_D dxdy=(b-a)^2$$

2.2 三重积分

2.2.1 三重积分的计算

1. 先单后重

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV=\iint[\int_{z1(x,y)}^{z2(x,y)} f(x,y,z)]d\sigma$$

2. 先重后单

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dV = \int [\iint_{z1(x,y)}^{z2(x,y)} f(x,y,z)]d\sigma$$

笔记 我们常常形象地把先单后重看作是切条，把先重后单看作是切片

3. 柱面坐标代换公式:

$x = \rho\cos\theta, y = \rho\sin\theta, z = z(\rho \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\inf \leq z \leq \inf)$

$dV = \rho d\rho d\theta dz$

$\iiint_{(V)} f(x,y,z)\,dV = \iiint_{(V)} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta, z)\rho\,d\rho\,d\theta\,dz$

4. 球面公式

$$x = r\sin\varphi\cos\theta,$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta,$$
$$z = r\cos\varphi$$
$$(r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

$$dV = r^2 sin\varphi\theta$$

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)\,dV = \iiint_{(V)} f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)r^2\sin\varphi\,dr\,d\varphi\,d\theta$$

2.2.2 三重积计算技巧

1. 利用积分的对称性

若积分域 (V) 关于 xoy 坐标面对称:

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)dV = \begin{cases} 2\iiint_{D_{z\geq 0}} f(x,y,z)dV & f(x,y,-z) = f(x,y,z) \\ 0 & f(x,y,-z) = -f(x,y,z) \end{cases}$$

若积分域 (V) 关于 xoz，yoz 坐标面对称时，同理。

若积分区域 (V) 关于变量 x, y, z 具有轮换对称性，则

$$\iiint_{(V)} f(x,y,z)dV = \iiint_{(V)} f(y,z,x)dV = \iiint_{(V)} f(z,x,y)dV$$
$$= \frac{1}{3}\iiint_{(V)} [f(x,y,z) + f(y,z,x) + f(z,x,y)]dV$$

例题 2.6(作业例题) $\iiint_{(V)} (x^2+y^2)\,dV$，其中 (V) 由 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$，$z = \sqrt{A^2 - x^2 - y^2}$，$z = 0$ 所围成，且 $A > a > 0$

解 $\iiint_{(V)} (x^2+y^2)\, dV$（采用球坐标）

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_a^A r^2 \sin^2\theta r^2 \sin\theta dr$$
$$= \frac{4}{15}\pi(A^5-a^5)$$

例题 2.7(习题课例题) 计算 $\iiint_\Omega (x^2+z^2)dV, \Omega : x^2+y^2+z^2 \le 1$

解 在空间区域 $\Omega : x^2+y^2+z^2 \le 1$ 中，关于 x、y、z 具有轮换对称性，即把 x 换成 y，y 换成 z， z 换成 x 后，区域 Ω 不变。根据轮换对称性有

$$\iiint_\Omega x^2 dV = \iiint_\Omega y^2 dV = \iiint_\Omega z^2 dV$$

$$\iiint_\Omega (x^2+z^2)dV = \frac{2}{3}\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)dV$$

利用球坐标计算积分球坐标变换公式为 $x = r\sin\varphi\cos\theta$，$y = r\sin\varphi\sin\theta$，$z = r\cos\varphi$，体积元素 $dV = r^2\sin\varphi dr d\varphi d\theta$，且 $x^2+y^2+z^2 = r^2$。积分区域 $\Omega : x^2+y^2+z^2 \le 1$ 在球坐标下为 $0 \le r \le 1$，$0 \le \varphi \le \pi$，$0 \le \theta \le 2\pi$。

则原式可变为:

$\frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^2 \cdot r^2 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta = \frac{2}{3}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{1} r^4 \sin\varphi\, dr\, d\varphi\, d\theta 3.$

计算积分结果 $\frac{8\pi}{15}$

2.3 一型线积分和一型面积分

2.3.1 一型线积分

计算公式: 设有一简单的光滑空间曲线 C

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (\alpha \le t \le \beta)$$

若函数 $f(x,y,z)$ 在 C 上连续，则

$$\int_C f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[x(t),y(t),z(t)]\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\,\mathrm{d}t$$

笔记 一行线积分的关键在于找到参数方程，一般有三种基本方法:

1. 找到 $f(x,y)$ 中两个变量之间的函数关系 $x = h(y)$ 转化为变量只有 y 的函数。(三个变量时同理)

2. 找到 x,y,z 共同变量 t,$f(x,y,z) = f(t)$。

3. 利用极坐标 $x = \rho cos\theta$,$y = \rho sin\theta$ 将 f 转化为单变量函数（一般应用在与圆有关的题

目中)。

例题 2.8(经典例题)

计算 $\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)ds$，其中 L 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$，其周长为 a。

解 $\oint_L 2xyds=0$。

则

$$
\begin{aligned}
&\oint_L (2xy+3x^2+4y^2)ds\\
=&\oint_L (3x^2+4y^2)ds\\
=&12\oint_L (\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3})ds\\
=&12\oint_L ds=12a
\end{aligned}
$$

笔记 本题很关键的一步是利用了被积函数的奇偶性和积分曲线的对称性，这也是第一型线积分计算中常用的一种方法。

需要注意的是并非所有的线面积分都可以用奇偶性，对称性，后文会详细介绍。

2.3.2 一型面积分

第一型面积分的计算

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim_{d\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k,\zeta_k)\Delta S_k.$$

如果 $f(x,y,z)$ 在光滑曲面 (S) 上连续，(S) 的方程为

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(u,v)=x(u,v)\mathbf{i}+y(u,v)\mathbf{j}+z(u,v)\mathbf{k},\quad (u,v)\in(\sigma),$$

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{(\sigma)} f[x(u,v),y(u,v),z(u,v)]\|\mathbf{r}_u\times\mathbf{r}_v\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

若 (s) 的方程为：$z=z(x,y)$，$(x,y)\in(\sigma)$.

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{(\sigma)} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

例题 2.9(经典例题) 计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(ax+by+cz+d)^2dS$, 其中 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$。

解 由于 $(ax+by+cz+d)^2=a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+d^2+2abxy+2acxz+2bcyz+2adx+2bdy+2cdz$。由函数的奇偶性和积分域的对称性知 $\iint\limits_{\Sigma} xydS=\iint\limits_{\Sigma} yzdS=\iint\limits_{\Sigma} xzdS=0$, $\iint\limits_{\Sigma} xdS=\iint\limits_{\Sigma} ydS=\iint\limits_{\Sigma} zdS=0$。由变量的对称性知 $\iint\limits_{\Sigma} x^2dS=\iint\limits_{\Sigma} y^2dS=\iint\limits_{\Sigma} z^2dS$。

则

$$
\begin{aligned}
&\iint\limits_{\Sigma}(ax+by+cz+d)^2dS\\
=&\iint\limits_{\Sigma}(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2)dS+\iint\limits_{\Sigma}d^2dS\\
=&\iint\limits_{\Sigma}(a^2x^2+b^2x^2+c^2x^2)dS+4\pi R^2d^2\\
=&(a^2+b^2+c^2)\iint\limits_{\Sigma}x^2dS+4\pi R^2d^2\\
=&\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)dS+4\pi R^2d^2\\
=&\frac{a^2+b^2+c^2}{3}\iint\limits_{\Sigma}R^2dS+4\pi R^2d^2\\
=&\frac{4\pi}{3}(a^2+b^2+c^2)R^4+4\pi R^2d^2
\end{aligned}
$$

笔记 本题如果将原面积分直接化为二重积分计算显然不方便，这里应注意球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 有很好的对称性，而将 $(ax+by+cz+d)^2$ 展开后，其中有很多项有奇偶性，由此可简化原积分的计算。

2.4 二型线积分和面积分

2.4.1 二型线积分的性质

性质 1: $\int_{(C)}\mathbf{A}(M)\cdot d\mathbf{s}=-\int_{(-C)}\mathbf{A}(M)\cdot d\mathbf{s}$

第二型线积分与曲线的方向有关。C 和 –C 表示同一条曲线但方向相反。该性质表明，当曲线的方向反转时，第二型线积分的值变号。

性质 2: $\int_{(\overset{\frown}{AB})}=\int_{(\overset{\frown}{AP})}+\int_{(\overset{\frown}{PB})}$

如果有一条曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$，中间有一点 P 把它分成两段 $\overset{\frown}{AP}$ 和 $\overset{\frown}{PB}$，那么沿曲线弧 $\overset{\frown}{AB}$ 的第二型线积分，等于沿子曲线弧 $\overset{\frown}{AP}$ 的线积分与沿子曲线弧 $\overset{\frown}{PB}$ 的线积分之和。体现了第二型线积分在曲线可拆分情况下的可加性，方便将复杂曲线的线积分拆分为简单曲线的线积分计算。

性质 3: $\oint_{(C)}Pdx+Qdy=\oint_{(C_1)}Pdx+Qdy+\oint_{(C_2)}Pdx+Qdy$

对于闭曲线 C，若它可被分成两条闭曲线 C_1 和 C_2（它们组合起来构成 C），那么沿闭曲线 C 的第二型曲线积分（通常称为环量），等于沿 C_1 的环量与沿 C_2 的环量之和。

2.4.2 二型线积分的计算

设光滑有向曲线 (C) 的参数方程是

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))\quad(\alpha\le t\le\beta)$$

$t=\alpha$ 对应于 (C) 的起点 A，$t=\beta$ 对应于 (C) 的终点 B。又设向量值函数

$$\mathbf{A}=\mathbf{A}(x,y,z)=(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$

在曲线 (C) 上连续，则

$$\int_{(C)}P(x,y,z)\mathrm{d}x=\int_{\alpha}^{\beta}P[x(t),y(t),z(t)]x'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_{(C)}Q(x,y,z)\mathrm{d}y=\int_{\alpha}^{\beta}Q[x(t),y(t),z(t)]y'(t)\mathrm{d}t$$

$$\int_{(C)}R(x,y,z)\mathrm{d}z=\int_{\alpha}^{\beta}R[x(t),y(t),z(t)]z'(t)\mathrm{d}t$$

$$\begin{aligned}\int_{(C)}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}&=\int_{C}P(x,y,z)dx+Q(x,y,z)dy+R(x,y,z)dz\\&=\int_{\alpha}^{\beta}\{P(x(t),y(t),z(t))\dot{x}(t)+Q(x(t),y(t),z(t))\dot{y}(t)+R(x(t),y(t),z(t))\dot{z}(t)\}\,dt\end{aligned}$$

2.4.3 第二型面积分的性质

性质 1: $\displaystyle\iint_{(+S)}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=-\iint_{(-S)}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$

$+S$ 和 $-S$ 表示同一张曲面的两个不同侧。该性质表明，当曲面的侧改变时，第二型面积分的值变号。这是因为第二型面积分考虑了向量场 $\mathbf{A}$ 与曲面微元 $d\mathbf{S}$ 的方向关系，曲面侧改变，向量场与曲面微元的相对方向改变，积分值也就改变符号。

性质 2: $\displaystyle\iint_{(S)}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\iint_{(S_1)}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}+\iint_{(S_2)}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$

性质 3: $\displaystyle\iint_{(S)}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}=\iint_{(S_1)}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}+\iint_{(S_2)}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{S}$

如果一张曲面 S 可被分成两片曲面 S_1 和 S_2，那么沿曲面 S 的第二型面积分，等于沿子曲面 S_1 的面积分与沿子曲面 S_2 的面积分之和。

2.4.4 二型面积分的计算

设有向曲面 (S) 的方程为 $z=z(x,y)$，(S) 在 xOy 坐标平面上的投影区域为 (σ_{xy})

$$\iint_{(S)}R(x,y,z)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\pm\iint_{(\sigma_{xy})}R[x,y,z(x,y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

.
$$\iint\limits_{(S)} P(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z = \pm\iint\limits_{(\sigma_{yz})} P[x(y,z),y,z]\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
.
$$\iint\limits_{(S)} Q(x,y,z)\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x = \pm\iint\limits_{(\sigma_{zx})} Q[x,y(z,x),z]\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$
.
$$\iint\limits_{(S)} \mathbf{A}(M)\cdot d\mathbf{S} = \iint\limits_{(S)} P(x,y,z)dy\wedge dz + Q(x,y,z)dz\wedge dx + R(x,y,z)dx\wedge dy$$

2.5 各种积分的联系及其在场论中的应用

在多元函数中，我们已经学过了二重积分，三重积分，两种线积分和两种面积分，接下来我们需要建立它们之间的联系。

1. 两种线积分之间的联系

$$\|\mathrm{d}\vec{s}\| = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2+(\mathrm{d}y)^2+(\mathrm{d}z)^2} = \mathrm{d}s$$
$$\mathrm{d}\vec{s} = \vec{e}_\tau \mathrm{d}s$$
$$\int_{(C)} \vec{A}(M)\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \int_{(C)} \vec{A}(M)\cdot\vec{e}_\tau\mathrm{d}s$$
$$\vec{A}(M) = (P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))$$
$$\int_{(C)} P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z = \int_{(C)} (P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\mathrm{d}s$$

笔记 为了方便记忆和理解我们引入几类线面积分的物理意义:

第一类线积分的物理意义：曲线的质量;

第二类线积分的物理意义：力做功;

第一类面积分的物理意义：曲面的质量;

第二类面积分的物理意义：流体的流量。

注意在计算技巧中第一类线面积分可以通过对称性来进行化简，第二类用的时候需要考虑积分方向来简化题目。我们可以用物理意义中标量和矢量的区别来解释。

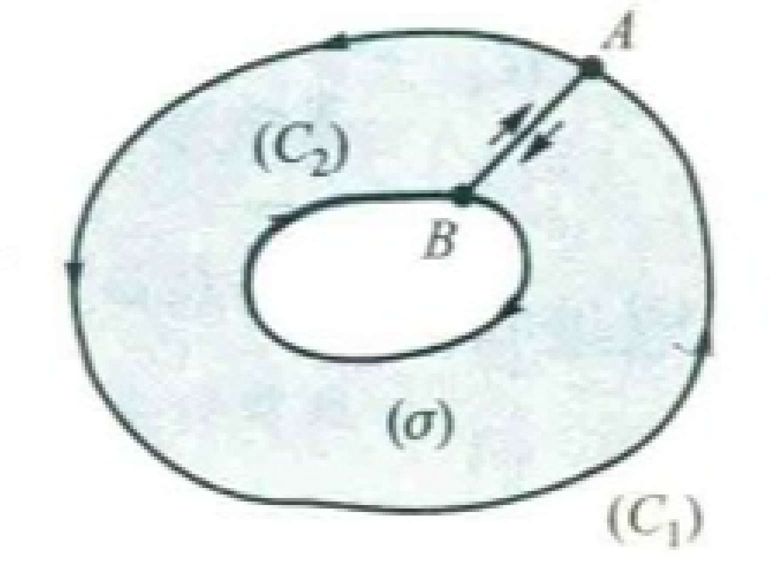
2. 两种面积分之间的联系

$$\iint_{(S)} \vec{A}(M)\cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} [P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\gamma]dS$$

3.Green 公式

$$\iint\limits_{(\sigma)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)d\sigma = \oint\limits_{(+C)} P(x,y)dx+Q(x,y)dy$$

格林公式对有洞的区域也成立.



我们可以用切割法把积分域切割成单连通域。例如图中的正向边界曲线由正向的闭曲线（$+C1$）与负向的闭曲线（$-C2$）所组成，即 $(+C) = (+C1) \cup (-C2)$. 为了将它切割成单联通与任做割线 $A\bar{B}$. 此时可以看作是：

$$(\bar{C}) = (C1) \cup A\bar{B} \cup (-C2) \cup B\bar{A}$$

例题 2.10(经典例题) 计算 $\int_{(C)} xy^2dy - yx^2dx$，其中 (C) 为上半圆周 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$，方向从 $A(R, 0)$ 到 $B(-R, 0)$。

解 (C) 不是闭曲线，不能直接利用 Green 公式，我们先补上有向直线段 $\overline{BA}$ 使其封闭且保持正向，从而有

$$\int_{(C)} xy^2dy - yx^2dx = \oint_{(C)\cup\overline{BA}} (xy^2dy - yx^2dx) - \int_{\overline{BA}} (xy^2dy - yx^2dx)$$

应用 Green 公式得

$$\oint_{(C)\cup\overline{BA}} xy^2dy - yx^2dx = \iint_{(\sigma)} (y^2 + x^2)d\sigma = \frac{\pi R^4}{4}$$

而

$$\int_{(\overline{BA})} xy^2dy - yx^2dx = \int_{-R}^{R} 0dx = 0$$

所以

$$\int_{(C)} xy^2dy - yx^2dx = \frac{\pi R^4}{4}$$

4.Stokes 公式

Stokes 公式展现了第二型曲线积分与第二型曲面积分之间的联系

$$\oint_{(C)} \vec{A} \cdot d\vec{s} = \iint_{(S)} (\nabla \times \vec{A}) \cdot d\vec{S} = \iint_{(S)} (\nabla \times \vec{A}) \cdot \vec{e}_n dS$$

5.Gauss 公式

高斯公式展现了三重面积分与二型面积分之间的联系

$$\iiint\limits_{(V)} \nabla \cdot \vec{A} dV = \oiint\limits_{(S)} \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$$\iiint\limits_{(V)} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dV = \oiint\limits_{(S)} P dy \wedge dz + Q dz \wedge dx + R dx \wedge dy$$

6. 两个重要的概念:

定义 2.1 (散度)

设有连续向量场 $A(M)(M \in (V) \subseteq \mathbf{R}^3)$，在 (V) 内点 M 的邻域任作一包含点 M 而法向量朝外的闭曲面 $(\Delta S) \subseteq (V)$，(ΔS) 所围区域为 (ΔV)，其体积为 ΔV。如果让 (ΔS) 所围区域 (ΔV) 以任意方式缩小为点 M 时，比式

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta V} = \frac{1}{\Delta V} \oiint\limits_{(\Delta S)} A(M) \cdot dS$$

的极限存在，则此极限值称为场 $A(M)$ 在点 M 的散度，记作

$$\mathrm{div} A(M) = \lim_{(\Delta V) \to M} \frac{1}{\Delta V} \oiint\limits_{(\Delta S)} A(M) \cdot dS.$$

由定义可见，散度就是通量密度，也就是在点 M 处通量对体积的变化率。♣

2.5.1 散度的计算

$$\mathrm{div}\mathbf{A} = \nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

2.5.2 散度的运算法则和公式

(1) $\mathrm{div}(C\mathbf{A}) = C\mathrm{div}\mathbf{A}$ 或 $\nabla \cdot (C\mathbf{A}) = C\nabla \cdot \mathbf{A}$，其中 C 为常数;

(2) $\mathrm{div}(\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \mathrm{div}\mathbf{A} \pm \mathrm{div}\mathbf{B}$ 或 $\nabla \cdot (\mathbf{A} \pm \mathbf{B}) = \nabla \cdot \mathbf{A} \pm \nabla \cdot \mathbf{B}$;

(3) $\mathrm{div}(u\mathbf{A}) = u\mathrm{div}\mathbf{A} + \mathrm{grad}\, u \cdot \mathbf{A}$ 或 $\nabla \cdot (u\mathbf{A}) = u\nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla u \cdot \mathbf{A}$。

定义 2.2 (旋度)

若在场 $\mathbf{A}(M)$ 中一点 M 处存在这样一个向量，其方向为使 $\mathbf{A}$ 在点 M 环量密度最大的方向，其模等于该点处环量密度的最大值，则称此向量为场 $\mathbf{A}(M)$ 在点 M 的旋度，记作 $\mathrm{rot}\, \mathbf{A}$。♣

2.5.3 旋度的计算

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\mathbf{A} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&= \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k}
\end{aligned}$$

2.6 三个重要的场

定义 2.3 (有势场)

设有向量场 $\mathbf{A}(M)\in C((G))$，$(G)\subseteq\mathbf{R}^3$。

(1) 若线积分 $\displaystyle\int_{(A)}^{(B)}\mathbf{A}(M)\cdot d\mathbf{s}$ 的值在 (G) 内与路径无关，则称 $\mathbf{A}$ 为保守场，其中 A,B 为 (G) 内任意两点;

(2) 若在 (G) 内恒有 $\nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{0}$，则称 $\mathbf{A}$ 为无旋场;

(3) 若存在定义在 (G) 上的函数 u，使 $\mathbf{A}=\nabla u$，则称 $\mathbf{A}$ 为有势场，并称 u 为 $\mathbf{A}$ 的势函数或位。♣

定义 2.4 (无源场)

若在向量场 $\mathbf{A}$ 的场域中处处有

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=0$$

则称 $\mathbf{A}$ 为无源场。♣

定义 2.5 (调和场)

既无源又无旋的向量场 $\mathbf{A}$ 称为调和场，即在场域内恒有

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=0,\quad \nabla\times\mathbf{A}=\mathbf{0}.$$

♣

由于调和场 $\mathbf{A}(M)$ 是无旋场，所以也是有势场，即存在势函数 $u(M)$，$M\in(G)$，使

$$\mathbf{A}=\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right).$$

又由于 $\mathbf{A}$ 是无源场，所以有

$$\nabla\cdot\mathbf{A}=\nabla\cdot(\nabla u)=0,$$

即

$$\Delta u=0, \text{或} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

例题 2.11(作业例题) 证明：场 $\mathbf{A}=-2y\mathbf{i}-2x\mathbf{j}$ 为平面调和场，并求其势函数。

解 1. **计算散度**

$$\mathrm{div}\mathbf{A}=\frac{\partial(-2y)}{\partial x}+\frac{\partial(-2x)}{\partial y}=0+0=0$$

2. **计算旋度**

$$\mathrm{rot}\mathbf{A}=\left(\frac{\partial(-2x)}{\partial x}-\frac{\partial(-2y)}{\partial y}\right)\mathbf{k}=(-2+2)\mathbf{k}=0$$

散度为 0 且旋度为 0，故 $\mathbf{A}$ 是平面调和场。

3. **求势函数**设势函数 $u(x,y)$，则 $\nabla u=\mathbf{A}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=-2y,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2x$ 对 x 积分得 $u=-2yx+f(y)$ 对 y 求导并比较得 $-2x+f'(y)=-2x\Rightarrow f'(y)=0\Rightarrow f(y)=C$ 故势函数为 $u(x,y)=-2xy+C$。场 $\mathbf{A}=-2y\mathbf{i}-2x\mathbf{j}$ 是平面调和场，势函数为 $-2xy+C$。

8. 两个重要的定理

定理 2.1 (有势场四个等价命题)

设 (G) 是一维单连域，$\mathbf{A}=(P,Q,R)\in C^{(1)}((G))$，则下列四个命题等价：

(1) $\mathbf{A}$ 是一无旋场，即在 (G) 内恒有

$$\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial z},\quad\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial x},\quad\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

即

$$\mathrm{rot}\mathbf{A}=0$$

(2) 沿 (G) 内任一简单的闭曲线 (C) 均有环量

$$\oint_{(C)}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}=\oint_{(C)}Pdx+Qdy+Rdz=0$$

(3) $\mathbf{A}$ 是一保守场，即在 (G) 内线积分 $\int_{(A)}^{(B)}\mathbf{A}\cdot d\mathbf{s}$ 与路径无关；

(4) $\mathbf{A}$ 是一有势场，即在 (G) 内 $Pdx+Qdy+Rdz$ 为某一函数的全微分。

笔记 这里的每一个等价命题都可以单独使用，简化计算。

例如第三条中在验证为保守场积分与路径无关时可以使积分得以化简。

定理 2.2 (无源场的三个等价命题)

设 $G\subseteq\mathbf{R}^3$ 是三维单连通区域，$\in C^{(1)}(G)$，则下列三个命题是等价的：

(1) 是无源场，即在 (G) 内恒有 $\nabla\cdot\ =0$；

(2) 沿 (G) 内任一不自相交闭曲面 (S) 的通量为零，即 $\oiint_{(S)}\cdot d\ =0$；

(3) 在 (G) 内存在一向量函数 (M)，使 $=\nabla\times$ ，即 是某向量场 的旋度场，其中称为 的一个向量势。

例题 2.12(经典例题) 设

$$I=\int_{ACB}[\phi(y)\cos x-\pi y]dx+[\phi'(y)\sin x-\pi]dy$$

其中 ACB 是任意从 $A(\pi,2)\to B(3\pi,4)$ 的任意曲线，且以该曲线和直线 AB 为边界的区域的面积为 2。

解 添加一条边 $\overline{BA}$，则

$$\begin{aligned}I=&\oint_{\Gamma+\overline{BA}}[\varphi(y)\cos x-\pi y]dx+[\varphi'(y)\sin x-\pi]dy\\&+\int_{\overline{BA}}[\varphi(y)\cos x-\pi y]dx+[\varphi'(y)\sin x-\pi]dy\end{aligned}$$

曲线与直线 AB 所围成的区域记为 D，由格林公式可得

$$\begin{aligned}&\oint_{\Gamma+\overline{BA}}[\varphi(y)\cos x-\pi y]dx+[\varphi'(y)\sin x-\pi]dy\\=&\iint_D\left(\frac{\partial[\varphi'(y)\sin x-\pi]}{\partial x}-\frac{\partial[\varphi(y)\cos x-\pi y]}{\partial y}\right)dxdy\\=&\iint_D\pi dxdy\end{aligned}$$

由于 D 的面积为 2，可知 $\iint_D\pi dxdy=2\pi$。直线 AB 的方程为 $y=\frac{x}{\pi}+1$，则

$$\begin{aligned}&\int_{\overline{BA}}[\varphi(y)\cos x-\pi y]dx+[\varphi'(y)\sin x-\pi]dy\\=&\int_{\pi}^{3\pi}\left\{\left[\varphi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\cos x-\pi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\right]+\left[\varphi'\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\sin x-\pi\right]\frac{1}{\pi}\right\}dx\\=&\int_{\pi}^{3\pi}\left[\varphi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\cos x+\frac{1}{\pi}\varphi'\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\sin x-\pi\left(\frac{x}{\pi}+1+\frac{1}{\pi}\right)\right]dx\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}&\int_{\pi}^{3\pi}\left[\varphi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\cos x+\frac{1}{\pi}\varphi'\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\sin x\right]dx=\left[\varphi\left(\frac{x}{\pi}+1\right)\sin x\right]\Big|_{\pi}^{3\pi}=0\\&-\int_{\pi}^{3\pi}\pi\left(\frac{x}{\pi}+1+\frac{1}{\pi}\right)dx=-2\pi(1+3\pi)\end{aligned}$$

从而 $I=-2\pi(1+3\pi)+2\pi=-6\pi^2$。

例题 2.13(经典例题) 设 $f\in C^{(1)}(-\infty,+\infty)$，$L$ 是分段光滑有向曲线，且位于上半平面，起点为 (a,b)，终点为 (c,d)，记

$$I=\int_{(L)}\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]dx+\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]dy$$

(1) 证明积分与路径无关；(2) 如果 $ab=cd$，求 I。

解 (1) 因为

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}\left\{\frac{1}{y}[1+y^2f(xy)]\right\}&=f(xy)-\frac{1}{y^2}+xyf'(xy)\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{x}{y^2}[y^2f(xy)-1]\right\}\end{aligned}$$

在上半平面这个单连通区域内处处成立，所以在上半平面内曲线积分与路径 L 无关。

(2) 由于 I 与路径无关，故可取积分路径 L 为由点 (a,b) 到点 (c,b) 再到点 (c,d) 的有向折线，从而得

$$\begin{aligned} I &= \int_a^c \frac{1}{b}[1+b^2f(bx)]dx + \int_b^d \frac{c}{y^2}[y^2f(cy)-1]dy \\ &= \frac{c-a}{b} + \int_a^c bf(bx)dx + \int_b^d cf(cy)dy + \frac{c}{d} - \frac{c}{b} \\ &= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_{ab}^{bc} f(t)dt + \int_{bc}^{cd} f(t)dt \\ &= \frac{c}{d} - \frac{a}{b} + \int_{ab}^{cd} f(t)dt \end{aligned}$$

当 $ab=cd$ 时，$\displaystyle\int_{ab}^{cd} f(t)dt = 0$，由此得

$$I = \frac{c}{d} - \frac{a}{b}$$

例题 2.14(经典例题) 对于半空间 $x>0$ 内的任意光滑简单闭曲面 S，都有

$$\oiint_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}zdxdy = 0$$

其中 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内有连续的一阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=1$，求 $f(x)$。

解 对于任意的光滑有向封闭曲面 S，设 Ω 为其所围区域，利用高斯公式可得，

$$\begin{aligned} 0 &= \oiint_S xf(x)dydz - xyf(x)dzdx - e^{2x}zdxdy \\ &= \pm\iiint_\Omega (xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x})dxdydz \end{aligned}$$

由 S 的任意性，可得

$$xf'(x)+f(x)-xf(x)-e^{2x}=0,\ (x>0)$$

即

$$f'(x)+\left(\frac{1}{x}-1\right)f(x) = \frac{1}{x}e^{2x},\ (x>0) \quad (*)$$

利用分离变量法可得，齐次方程 $f'(x)+\left(\dfrac{1}{x}-1\right)f(x)=0$ 的通解为

$$f(x) = \frac{Ce^x}{x}$$

利用常数变易法，设 $f(x)=\dfrac{C(x)e^x}{x}$，代入 $(*)$ 中整理可得，

$$C'(x) = e^x$$

从而 $C(x)=e^x+C$，

$$f(x) = \frac{e^x}{x}(e^x+C),\ (x>0)$$

因为 $\lim_{x\to0^+} f(x)=1$，即 $\lim_{x\to0^+}\frac{e^x}{x}(e^x+C)=\lim_{x\to0^+}\frac{e^x(e^x+C)}{x}=1$，所以 $\lim_{x\to0^+}e^x(e^x+C)=0$，即 $1+C=0$。所以 $C=-1$，

$$f(x)=\frac{e^x}{x}(e^x-1)$$

第 2 章 练习

1. $\iiint_{(V)}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}dV$，其中 $(V)=\{(x,y,z)|x^2+y^2+(z-1)^2\le1,z\ge1,y\ge0\}$
2. 设 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上单调减的正值函数，证明：
$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)dx}{\int_0^1 xf(x)dx}\le\frac{\int_0^1 f^2(x)dx}{\int_0^1 f(x)dx}$$
3. 计算 $\iiint_{(V)}(x^2+y^2)dV$，其中 (V) 是由曲线 $\begin{cases}y^2=2z\\x=0\end{cases}$ 绕 Oz 轴旋转一周所成的曲面与两平面 $z=2,z=8$ 所围的立体。
4. 计算 $\iiint_{(V)}(mx+ly+nz)^2dV$，其中 $(V):x^2+y^2+z^2\le a^2$ 。
5. 计算 $\iint_\Sigma(xy+yz+xz)ds$，其中 Σ 为锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被圆柱面 $x^2+y^2=2ax(a>0)$ 所截下的部分。
6. 计算线积分 $I=\int_L ye^{x^2}dx+(xe^{y^2}+2xy^2e^{y^2})dy$，其中 L 为 $y=\sqrt[3]{x}$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的曲线段。
7. 求密度为 1 的抛物体 $V:x^2+y^2\le z\le1$ 绕 z 轴的转动惯量。
8. 计算积分 $I=\oint_C zdx+xdy+ydz$，其中 C 为 $x+y+z=1$ 被三个坐标面所截的三角形的边界，方向与三角形上侧的法向量构成右手法则。
9. 已知 $y_1=x$，$y_2=x+e^x$，$y_3=1+x+e^x$ 是 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=Q(x)$ 的解，试求此方程的通解。
10. 求微分方程 $y'''-y''+2y'-2y=0$ 的通解。
11. 计算二重积分 $I=\iint_D(xy+|y|)dxdy$，其中 $D=\{(x,y):|x|+|y|\le1\}$。

第 3 章 无穷级数

内容提要

- ❑ 常数项级数
- ❑ 函数项级数
- ❑ 幂级数
- ❑ Fourier 级数

3.1 常数项级数

3.1.1 常数项级数的概念、基本性质以及收敛性判断

重点： 对于这个部分，概念以及性质都不是考察的重点，而是都是为了判断敛散性而服务的，掌握各种判断敛散性的方法才是关键。

P.S. 首先明确收敛的前提是 $n \to \infty$ 时通项等于 0，否则这个级数必定发散。

例题 3.1(经典例题) 判断下列级数敛散性

1. $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}}$

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^{n+\frac{1}{n}}}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^{n}}$

解： (1) 令 $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[n]{\ln n}} = e^{-\frac{\ln(\ln n)}{n}}$，而且

$$\lim_{x\to\infty} -\frac{\ln(\ln x)}{x} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x\ln x} = 0$$

通项不趋近于零，所以级数发散。

(2) 令 $U_n = \dfrac{n^{\frac{1}{n}}}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n}}$，因为

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{\ln n}{n}} = 1$$

而且

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n} = 1, \text{则} \lim_{n\to\infty} U_n = 1，\text{通项不为零，发散。}$$

3.1.2 正项级数审敛方法

正项级数考的最多，方法也比较灵活，常用的是：

1. **比较审敛法**：设 $\sum b_n$ 为一收敛的无穷级数，当中每项 b_n 都是正实数，而无穷级数 $\sum a_n$ 中的 a_n 可为复数。假定对任意 n 有 $|a_n| \le b_n$（这里代表取复数的模）。

(1) 若 $\sum b_n$ 收敛，则 $\sum a_n$ 收敛。

(2) 若 $\sum |a_n| = +\infty$，则级数 $\sum b_n = +\infty$。

2. **比值审敛法**：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，其中每一项皆为非 0 的实数，如果

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$$

(1) 当 $\rho < 1$ 时级数收敛；

(2) 当 $\rho > 1$ 时级数发散；

(3) 当 $\rho = 1$ 时级数可能收敛也可能发散。

3. **根值审敛法**：设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 为一无穷级数，如果 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$，则

(1) $L < 1$ 时级数绝对收敛；

(2) $L > 1$（包括 $L = +\infty$）时级数发散；

(3) $L = 1$ 时级数可能收敛也可能发散。

4. **极限审敛法**：设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数，

(1) 如果 $\lim_{n\to\infty} nu_n = l > 0$（或 $\lim_{n\to\infty} nu_n = +\infty$），那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散；

(2) 如果 $p > 1$，而 $\lim_{n\to\infty} n^p u_n = l$（$0 \le l < +\infty$），那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

在遇到题目的时候要灵活运用以上方法。

例题 3.2(经典例题) 判断下列级数的敛散性：

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + \ln n + 1)^{\frac{n+1}{2}}}$

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh n}{2^n}$

3. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$

4. $\sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \cdots$

解：

1. 因为

$$a_n = \frac{n^{n-1}}{(2n^2 + \ln n + 1)^{\frac{n+1}{2}}} \le \frac{1}{n^2},$$

所以根据比较审敛法可知，该级数收敛。

2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cosh n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^n + e^{-n}}{2^{n+1}}$，根据比值审敛法可知，该级数发散。

3. 令 $f(n) = \dfrac{n^n}{n!}$，利用根值审敛法，

$$\sqrt[n]{f(n)} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

根据斯特林公式 ($n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$)，该极限为e，所以该级数发散。

4. 由于

$$\sqrt{2+2\cos t} = 2\cos\frac{t}{2} \quad \left(0 \le t \le \frac{\pi}{2}\right),$$

且 $\sqrt{2} = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$，可知

$$a_n = \sqrt{2 - 2\cos\frac{\pi}{4\cdot 2^{n-1}}} = 2\sin\frac{\pi}{2^{n+2}}.$$

再根据比值审敛法可知原级数收敛。

3.1.3 交错级数

对于交错级数，敛散性的判断是重点，但需进一步讨论是绝对收敛还是条件收敛（相比正项级数更深入）。

定理 3.1 (莱布尼茨判别法)

如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$ 满足:

1. 数列 u_n 单调递减;
2. $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$;

则该级数收敛，且其和满足 $S \le u_1$。

注 莱布尼茨定理的条件 (1) 是**充分非必要**的。即使 u_n 非单调递减，交错级数仍可能收敛或发散。该定理仅提供收敛的充分条件，无法判断发散、绝对收敛或条件收敛。

定义 3.1 (收敛性质)

对任意项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$:

- 若 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛，则称原级数**绝对收敛**;
- 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛但 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散，则称**条件收敛**。

例题 3.3(经典例题) 设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 的邻域内有连续的一阶导数，且 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = a$ $(a>0)$。证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} f\left(\frac{1}{n}\right)$ 条件收敛。

证:

1. 由题意知 $f(0)=0$，$f'(0)=a$。当 $n\to\infty$ 时，在 $x=0$ 的邻域内:

$$f\left(\frac{1}{n+1}\right) < f\left(\frac{1}{n}\right),$$

且 $\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{n}\right)=0$，故由莱布尼茨定理知级数收敛。

2. 考虑绝对值级数：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \approx \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a}{n}=+\infty \quad （发散）$$

综上，原级数条件收敛。

例题 3.4(经典例题) 设常数 $\lambda>0$，且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，证明 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}}$ 绝对收敛。

证： 利用不等式：

$$\frac{|a_n|}{\sqrt{n^2+\lambda}} \leq \frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2+\lambda}\right),$$

由比较审敛法知 $\sum\frac{1}{n^2+\lambda}$ 和 $\sum a_n^2$ 均收敛，故原级数绝对收敛。

3.2 函数项级数

函数项级数的概念、收敛性、收敛半径和收敛域。其知识点与常数项级数类似，但增加了收敛半径和收敛域的讨论，需特别注意边界点的收敛性。

定义 3.2 (收敛半径与收敛域)

对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$：

- 存在收敛半径 R，使得级数在 $|x|<R$ 时绝对收敛，$|x|>R$ 时发散；
- 收敛域需单独判断 $x=\pm R$ 时的收敛性。

♣

例题 3.5(经典例题) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^n$ 的收敛半径。

解： 该题不能直接运用幂级数的基本定理，可以依据幂级数收敛的定义进行求解：

我们设级数的一般项为

$$u_n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}x^{2n}$$

根据幂级数收敛的定义，考虑：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2}\cdot\frac{(n!)^2}{(2n)!}x^2\right|$$

对阶乘进行整理：

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^2(n!)^2(2n)!}x^2\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2}x^2\right|$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1}x^2\right|=4|x|^2$$

当 $4|x|^2<1$ 时，级数收敛；当 $4|x|^2>1$ 时，级数发散。

因此收敛半径为:

$$R=\frac{1}{2}$$

例题 3.6(经典例题) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n+b^n}{n}x^n$（$a>0,b>0$）的收敛域。

解:

1. 计算收敛半径:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n}{n}}=\max\{a,b\},\quad R=\frac{1}{\max\{a,b\}}$$

2. 判断边界点:

当 $x=R$ 时，级数变为 $\sum\frac{a^n+b^n}{n}R^n$，由比较审敛法知发散;

当 $x=-R$ 时，成为交错级数 $\sum(-1)^n\frac{a^n+b^n}{n}R^n$，由莱布尼茨判别法知收敛。

故收敛域为 $\left[-\frac{1}{\max\{a,b\}},\frac{1}{\max\{a,b\}}\right)$。

例题 3.7(经典例题) 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，且 $a_{n+1}\leq a_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$，试证:

(1) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n(a_n-a_{n+1})$ 收敛;

(2) $\lim_{n\to\infty}na_n=0$。

解:

(1) 设级数的部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n}k(a_k-a_{k+1})$，则:

$$S_n=(a_1-a_2)+2(a_2-a_3)+\cdots+n(a_n-a_{n+1})=\sum_{k=1}^{n}a_k-na_{n+1}$$

由正项数列单调递减 $a_{n+1}\leq a_n$，知 S_n 单调递增，且:

$$S_n\leq\sum_{k=1}^{n}a_k\leq\sum_{k=1}^{\infty}a_k<+\infty$$

故 $\{S_n\}$ 单调有界，极限存在，即级数收敛。

(2) 由 (1) 知极限 $\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k-na_{n+1}\right)$ 存在。设 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k=S$，则:

$$\lim_{n\to\infty}na_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k-\left(\sum_{k=1}^{n}a_k-na_{n+1}\right)\right)=S-\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}a_k-na_{n+1}\right)$$

设此极限为 L。若 $L>0$，则存在 N，当 $n\geq N$ 时 $a_{n+1}>\frac{L}{2n}$。但 $\sum\frac{1}{n}$ 发散，由比较判别法知 $\sum a_n$ 发散，矛盾。故 $L=0$，即:

$$\lim_{n\to\infty}na_{n+1}=0$$

从而:

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n-1}\cdot(n-1)a_n=1\cdot\lim_{n\to\infty}(n-1)a_n=\lim_{n\to\infty}(n-1)a_{(n-1)+1}=0$$

例题 3.8(经典例题) 设 $a_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx$,

(1) 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{n}$ 的值;

(2) 试证：当 $\lambda > 0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛。

解:

(1) 计算 $a_n + a_{n+2}$:

$$
\begin{aligned}
a_n + a_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{n+2} x dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x(1 + \tan^2 x) dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \sec^2 x dx \\
&= \int_0^{1} t^n dt \quad (令 t = \tan x) \\
&= \frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n + a_{n+2}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1
$$

(2) 因为 $a_{n+2} > 0$，所以 $a_n < \frac{1}{n+1}$,

$$
0 < \frac{a_n}{n^\lambda} < \frac{1}{n^\lambda (n+1)} < \frac{1}{n^{\lambda+1}}
$$

由比较审敛法可得，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^\lambda}$ 收敛。

3.3 幂级数

通项为幂函数的函数项级数称为幂级数。

1. 由阿贝尔定理推知，幂级数在数轴上仅有三种收敛情况:

- 仅在 $x = 0$ 处收敛
- 在整个数轴上都收敛
- 存在一个正数 R，为幂级数收敛与否的分界线

我们称 R 为收敛半径，开区间 $(-R, R)$ 为收敛区间。(收敛域可能包含收敛区间的端点。)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $(a_n \neq 0)$，则

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad 或 \quad R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$$

注意：已知 R 不能推知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ 的极限存在。

2. 幂级数有内闭一致收敛性。

3. 幂级数展开的唯一性定理。

4. 求幂级数的和函数有直接法和间接法，间接法的理论基础是幂函数展开的唯一性定理。根据这个定理，不论使用什么方法，只要所得到的幂函数有正的收敛半径就可以了，可使用四则运算和微积分运算。

5. 要记常用初等函数 Maclaurin 展开式：

$$(1)\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

$$(2)\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

$$(3)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$$

$$(4)\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

6. 对于一些原函数不能用初等函数表示的定积分（如 $\dfrac{\sin x}{x}$），现阶段可以将被积函数展开为幂级数，逐项积分求近似值。

例题 3.9(经典例题) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x=-3$ 处条件收敛，则可知该幂级数的收敛半径为：

解：

如果收敛半径 $R>3$，则由阿贝尔定理，$x=-3$ 处幂级数绝对收敛，故 $R\leq 3$

同理，若收敛半径 $R<3$，则 $x=-3$ 处该幂级数发散，得 $R\geq 3$

综上所述，$R=3$

例题 3.10(经典例题) 设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$ 的收敛域为 $(-4,2)$，求 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 的收敛域。

解：

对于 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+1)^n$，$-4<x<2$ 时，它绝对收敛

即 $-3<x+1<3$ 时级数收敛

故 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域为 $(-3,3)$

所以 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-3)^n$ 满足 $-3<x-3<3$，即 $x\in(0,6)$ 时收敛

例题 3.11(经典例题) 已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R=1$，试求 $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} x^n$ 的收敛半径。

解:

设目标级数为 $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$，其中 $b_n=\frac{a_n}{n+1}$。

由根值法，原级数收敛半径为:

$$\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}=1 \quad\Rightarrow\quad \limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=1$$

目标级数的收敛半径为:

$$R_g=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}}=\frac{1}{\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}}}$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$，结合上极限的性质有:

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|b_n|}=\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}=1\cdot 1=1$$

故收敛半径为:

$$R_g=\frac{1}{1}=1$$

因此，$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^n$ 的收敛半径仍为 1。

例题 3.12(经典例题) 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$（其中 $b_n=\begin{cases}0, & n\text{为奇数}\\ a_{n/2}, & n\text{为偶数}\end{cases}$）的收敛半径。

解:

这是一个" 缺项" 幂级数，设原级数为 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{2k}$

使用根值法: $\limsup\sqrt[n]{|b_n|}=\limsup\sqrt[2k]{|a_k|}$

故收敛半径 $R=\frac{1}{\limsup\sqrt[2k]{|a_k|}}=R_0^2$，其中 R_0 是 $\sum a_k x^k$ 的收敛半径

注意：求导数幂级数时要注意 $b(0)$ 的值

例题 3.13(经典例题) 将函数 $f(x)=\arctan\frac{1-2x}{1+2x}$ 展开成 x 的幂级数，并求 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)2^n}$

的和。**解：**

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+\left(\frac{1-2x}{1+2x}\right)^2}\cdot\frac{-2(1+2x)-2(1-2x)}{(1+2x)^2} \\
&= \frac{(1+2x)^2}{(1+2x)^2+(1-2x)^2}\cdot\frac{-4}{(1+2x)^2} \\
&= \frac{-4}{1+4x^2+1+4x^2} \\
&= -\frac{2}{1+4x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -2\sum_{n=0}^{\infty}(-4x^2)^n \quad \text{（幂级数展开）} \\
&= -2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n 4^n x^{2n}
\end{aligned}$$

$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt=-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1}$$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n4^n}{2n+1}x^{2n+1},\quad |x|<\frac{1}{2}$$

令上式中$x=\frac{1}{2}$，整理得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$$

例题 3.14(经典例题) 求函数 $f(x)=e^{x\sin x}$ 的麦克劳林级数展开式。

解：使用直接展开法:

$$\begin{aligned}
f(x) &= e^{x\sin x} \\
&= 1+x\sin x+\frac{x^2\sin^2 x}{2!}+\frac{x^3\sin^3 x}{3!}+\cdots \\
&= 1+x\left(x-\frac{x^3}{6}+\cdots\right)+\frac{x^2}{2}\left(x^2+\cdots\right)+\cdots \\
&= 1+x^2+\frac{x^4}{6}+\cdots
\end{aligned}$$

在某些情况下，直接展开可能比间接展开更简单。

3.4 Fourier 级数

定义 3.3 (Fourier 级数)

设 $f(x)$ 是周期为 $2l$ 的函数，其 Fourier 级数展开为：

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right)$$

其中系数由 Euler-Fourier 公式确定：

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx \\ b_n = \dfrac{1}{l} \displaystyle\int_{-l}^{l} f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \end{cases} \qquad (n = 0, 1, 2, ...)$$

♣

定理 3.2 (Dirichlet 收敛定理)

若 $f(x)$ 在 $[-l, l]$ 上：

1. 连续或只有有限个第一类间断点
2. 只有有限个极值点

则 Fourier 级数在连续点收敛于 $f(x)$，在间断点收敛于 $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$。

♡

例题 3.15(分段函数的 Fourier 展开) 将 $f(x) = \begin{cases} -x, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi \end{cases}$ 展开为 Fourier 级数。

解：

1. 确定系数：

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \pi$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{n^2 \pi} [(-1)^n - 1]$$

2. 由奇函数性质知 $b_n = 0$
3. 最终展开式：

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}$$

例题 3.16(周期延拓展开) 将 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 1, & 1 < x < 2 \\ 3 - x, & 2 \le x \le 3 \end{cases}$ 展开为周期 3 的 Fourier 级数。

解：

将在 [0,3] 上按周期为 3 的函数作周期延拓后是偶函数，从而 $b_n = 0$。同理有：

$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi x}{3}dx + \frac{2}{3}\int_1^2 \cos\frac{2n\pi x}{3}dx + \frac{2}{3}\int_2^3 (3-x)\cos\frac{2n\pi x}{3}dx$$

化简后得到：

$$a_n = \frac{3}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n\cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3}\right]$$

则函数 $f(x)$ 在 $0 \le x \le 3$ 上的表达式为：

$$f(x) = \frac{2}{3} - \frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\left[(-1)^n\cos\frac{n\pi}{3} - \cos\frac{2n\pi}{3}\right]\cos\frac{2n\pi x}{3}$$

第 3 章 练习

1. 判定下列级数的收敛性：
   (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+2^n}{n^2 2^n}$
   (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[3]{n+1}}\ln\frac{n+2}{n}$
   (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{n-1}}{(2n^2+\ln n+1)^{\frac{n+1}{2}}}$
   (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^5\ln\frac{n-1}{n+1}$
2. 讨论级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left[1+\frac{(-1)^n}{n^p}\right]$ $(p>0)$ 的收敛性。
3. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-1}$ 的收敛域及和函数，并求数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}$ 的和。
4. 将函数 $f(x)=\arctan\frac{1+x}{1-x}$ 展为 x 的幂级数。
5. 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n+1)}{(2n+3)!}x^{2n}$ 的和函数。
6. 下列函数在指定点 x_0 处展开成幂级数并指出展开式成立的区间：
   $\frac{1}{x^2}, x_0=1$
   $\frac{1}{x^2+3x+2}, x_0=-4$
   $\sin 2x, x_0=\frac{\pi}{2}$
7. 将 $f(x)=\pi^2-x^2$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上展开成 Fourier 级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ 的和。