2025 年工科数学分析-II 期中考试水平测试卷

命题人：钱院学辅　　审题人：钱院学辅　　考试用时：70 分钟

试卷说明

本试卷仅作为钱院学辅考前辅导水平测试卷，与期中考试真实题型相差较远，主要反映学生的基础知识掌握水平.

试卷由 10 道计算，证明题组成，每道题目均为 10 分.

1.(多元函数极限) 求极限 $\lim\limits_{(x,y)\to\left(2,-\frac{1}{2}\right)}(2+xy)^{\frac{1}{y+xy^2}}$.

2.(多元函数连续性) 讨论函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

在原点处的连续性.

3.(偏导数)

1. 设 $z=f(x,y)=\dfrac{x\cos(y-1)-(y-1)\cos x}{1+\sin x+\sin(y-1)}$, 求 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(0,1)}$ 与 $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{(0,1)}$.
2. 设 $z=f(u,v)$ 可微，试求复合函数 $z=f(x^2-y^2,\mathrm{e}^{xy})$ 的两个一阶偏导数.

4.(偏导数记号的应用) 设 $F(x,y,z)$ 可微，$x=x(y,z)$,$y=y(x,z)$,$z=z(x,y)$ 都是方程 $F(x,y,z)=0$ 所确定的隐函数，试求值 $\dfrac{\partial x}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial z}\cdot\dfrac{\partial z}{\partial x}$.

5.(全微分) 已知某函数 u 的全微分为 $\mathrm{d}u=\dfrac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 试求 u 的表达式.

6.(极值问题)

1. 求函数的极值点与极值：$z=(1+\mathrm{e}^y)\cos x-y\mathrm{e}^y$.
2. 求 $u=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}$ 在条件 $\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{z^2}=\dfrac{1}{a^2}$ 下的极值.

7.(多元函数微分学的几何应用)

1. 求曲线 $l:x=t-\sin t,y=1-\cos t,z=4\sin\dfrac{t}{2}$ 在点 $\left(\dfrac{\pi}{2}-1,1,2\sqrt{2}\right)$ 处的法平面;
2. 求曲面 $\mathrm{e}^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的法线.

8.(二重积分计算) 求二重积分 $I=\iint\limits_D\dfrac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+a^2)^{3/2}}$, 其中 $D=\{(x,y)|0\le x\le a,0\le y\le a\}$.

9.(三重积分计算) 求三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} y^4 \mathrm{d}V$, 其中 Ω 由 $x=az^2, x=bz^2(z>0, b>a>0), x=\alpha y, x=\beta y(\beta>\alpha>0)$ 以及 $x=h(h>0)$ 围成.

10.(重积分综合应用) 已知函数 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上单调递减的正连续函数, 求证:

$$\frac{\int_0^1 xf^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 xf(x)\mathrm{d}x} \le \frac{\int_0^1 f^2(x)\mathrm{d}x}{\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x}.$$