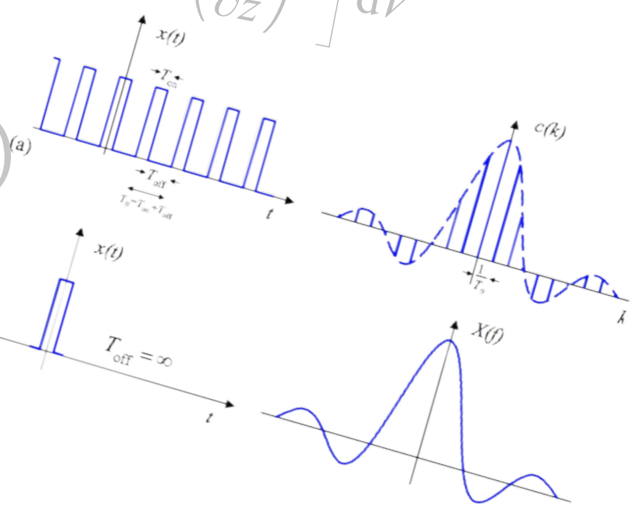
高等数学(下)

2025年真题集

彭康书院学业辅导与发展中心·资料编写组



2024 高数下期末试题

一、单选题

1. 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{5x^2y}{x^4+y^2}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$ 则 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 (　　).

   A. 连续, 偏导数存在;　　B. 连续, 偏导数不存在;

   C. 不连续, 偏导数存在;　　D. 不连续，偏导数不存在.

2. 设 (D) 为圆域 $x^2+y^2\le R^2$, (D_1) 为 (D) 在第一象限的部分, 则区域 (D) 上的二重积分 $\iint_{(D)}(x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 的最简表达式是 (　　).

   A. $4\iint_{(D_1)}y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;　　B. 0;

   C. $16\iint_{(D_1)}x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;　　D. $4\iint_{(D_1)}\left(x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

3. 设椭圆 $(C):2x^2+3y^2=6$ 的周长为 l, 则曲线积分 $\oint_{(C)}\left(\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{y^2}{2}-5x\right)\mathrm{d}s$ 的值为 ().

   A. $\dfrac{1}{6}$;　　B. $l-5$;　　C. l;　　D. 0.

4. 下列正项级数收敛的是 (　　).

   A. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$;　　B. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^2-1}$;　　C. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n^2+1}}$;　　D. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n-1}{2n}$.

5. 对于二元函数 $z=f(x,y)$. 下列说法正确的是 (　　).

   A. 若函数可偏导，则一定连续;

   B. 若函数可微, 则一定存在偏导数, 且偏导数连续;

   C. 若函数两个偏导数都存在, 则一定可微;

   D. 若函数两个混合偏导 $f_{xy}(x,y)$ 和 $f_{yx}(x,y)$ 连续, 则 $f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$.

6. 若幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛. 则该级数在点 $x=3$ 处 (　　).

   A. 条件收敛;　　B. 绝对收敛;　　C. 发散;　　D. 敛散性不能确定.

二、填空题

1. 设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$, $\boldsymbol{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, 则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\right|_{(1,2,3)}=$_________.

2. 设 $u=x^2z+\dfrac{1}{2}y^2z-\dfrac{1}{3}z^3$, 则 $\mathrm{A}=\operatorname{grad}u$ 的散度 $\operatorname{div}\mathrm{A}=$_________.

3. 曲面 $z=x^2+y^2$ 上一点处与平面 $2x+4y-z=0$ 平行的切平面方程为_________.

4. 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{\sqrt{n}}$ 的收敛域为________.

5. 二重积分 $\iint_{(D)} y\left[1+xe^{\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)}\right] dxdy$ 值为________. 其中（D）是由直线 $y=x$ ，$y=-1$ 及 $x=1$ 所围成的区域.

6. 三重积分 $\iiint_{(V)} z^2 \mathrm{~d}V$ 的值为________. 其中 $(V)=\left\{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leqslant R^2\right\}$.

三、计算题

1. 设 $z=x^3 f\left(xy, \frac{y}{x}\right)$, f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2. 计算 $\iint_{(\Sigma)}(x+y+z) \mathrm{dS}$ ，其中曲面 (Σ) 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}(0 \leqslant z \leqslant 1)$.

3. 计算曲面积分 $\iint_{(\Sigma)} \frac{x^2 y dy \wedge dz+\left(e^z-xy^2\right) dz \wedge dx+\left(z^2+2\right) dx \wedge dy}{z+x^2+y^2}$ ，其中 Σ 为曲面 $z=9-x^2-y^2$ $(z \geq 0)$ ，取上侧.

4. 计算 $\oint_{(\Gamma)} y^2 \mathrm{~d}x+xy \mathrm{~d}y+xz \mathrm{~d}z$ ，（Γ ）为柱面 $x^2+y^2=2y$ 与平面 $y=z$ 的交线，从 z 轴正向看为顺时针方向.

5. 将函数 $f(x)=\left\{\begin{array}{l}-x,-\pi \leqslant x<0 \\ x, 0 \leqslant x \leqslant \pi\end{array}\right.$ 展开成傅里叶级数，并利用它计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ 的和.

6. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有连续的导数，计算曲线积分 $\int_{(L)} \frac{1+y^2 f(xy)}{y} \mathrm{~d}x+\frac{x}{y^2}\left[y^2 f(xy)-1\right] \mathrm{d}y$，$(L)$ 为从点 $A\left(3, \frac{2}{3}\right)$ 到点 $B(1,2)$ 的直线段.

四、

已知函数 $z=f(x,y)$ 的全微分 $\mathrm{d}z=2x \mathrm{~d}x-2y \mathrm{~d}y$ ，并且 $f(1,1)=2$ ，求 $f(x,y)$ 在椭圆域 $D=\left\{(x,y) \left\lvert\, x^2+\frac{y^2}{4} \leqslant 1\right.\right\}$ 上的最大值和最小值.

五、

若函数 $u=u(x,y), v=v(x,y)$ 在平面区域 $(D): x^2+y^2 \leq 1$ 上具有一阶连续偏导数，向量 $\boldsymbol{F}=vi+uj, \boldsymbol{G}=\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right) i+\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right) j; L$ 为 (D) 的边界曲线，当点 $(x,y) \in L$ 时，$u(x,y) \equiv 1, v(x,y) \equiv y$ ，试证明二重积分 $\iint_0 \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{G} \mathrm{~d}\sigma=-\pi$.

2023 年西安交通大学工科数学分析试题

本试卷共 6 页，共计四个大题。全卷满分 100 分，考试用时 150 分钟。

一、单选题：本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。

1. 已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$, 则 ( )

   A. $f_x(0,0)$ 存在, $f_y(0,0)$ 不存在　　B. $f_x(0,0)$ 不存在, $f_y(0,0)$ 存在

   C. $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 都不存在　　D. $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 都存在

2. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上半部分的上侧, 则下列结论不正确的是 ( )

   A. $\iint_\Sigma x^2 dy\wedge dz=0$　　B. $\iint_\Sigma x dy\wedge dz=0$

   C. $\iint_\Sigma y^2 dy\wedge dz=0$　　D. $\iint_\Sigma y dy\wedge dz=0$

3. 设常数 $a>0$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$ 的敛散性为 ( )

   A. 绝对收敛　　B. 发散　　C. 条件收敛　　D. 敛散性与 a 有关

4. 下列曲线的方向均为所围区域边界的正向, 则计算曲线积分 $\oint_{(C)}\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 时, 在下列曲线 (C) 所围区域上可直接使用格林公式的是 ( )

   A. $x^2+y^2=1$　　B. $(x-1)^2+y^2=1$

   C. $3(x-1)^2+y^2=2$　　D. $|x|+|y|=1$

5. 若幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $\mathrm{x}=-1$ 处收敛, 则此级数在 $\mathrm{x}=2$ 处 ( )

   A. 发散　　B. 敛散性不能确定　　C. 条件收敛　　D. 绝对收敛

二、填空题：本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。

6. 已知函数 $z=x^2y^3$, 则当 $\mathrm{x}=2, \mathrm{y}=-1, \Delta x=0.02, \Delta y=-0.01$ 时, 全微分 $\mathrm{dz}=$

7. 函数 $u=(x-y)^2+(z-x)^2-2(y-z)^2$ 在点 $\mathrm{M}(1,2,2)$ 的方向导数最大值 $=$

8. 求二元函数的极限值 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to1}}\frac{\sin xy}{x}=$

9. 曲线 $\begin{cases}x=e^t\\y=e^{-t}\\z=\sqrt{2}t\end{cases}$ 在 $\mathrm{t}=0$ 处的切线方程 $=$

10. 改变二次积分的积分次序: $\int_1^2 dx\int_1^{x^2}f(x,y)dy=$

三、计算题：本题共 8 小题，每小题 7 分，共 42 分。

11. 已知函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{f(x,y)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}=-2$. 试讨论函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性及是否取得极值.

12. 设函数 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数, $z=f\left(x^2-y^2,e^{xy}\right)$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

13. 在上半椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0,z\geqslant 0)$ 及 $z=0$ 所围成的封闭曲面内作一底面平行于 xOy 面, 且体积最大的内接长方体, 问这长方体的长、宽、高的尺寸怎样?

14. 计算 $\iint_{\sigma} \sqrt{xy} d\sigma$, 其中 (σ) 为由曲线 $\mathrm{xy}=1, \mathrm{xy}=2, \mathrm{y}=\mathrm{x}, \mathrm{y}=4\mathrm{x}(\mathrm{x}>0, \mathrm{y}>0)$ 所围成的平面区域

15. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} z dS$, 其中曲面 Σ 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于平面 $\mathrm{z}=1$ 与平面 $\mathrm{z}=2$ 之间的部分.

16. 计算曲线积分 $\int_L \left(y+\frac{e^y}{x}\right)dx+e^y\ln x dy$, 其中 L 为平面曲线 $x=1+\sqrt{2y-y^2}$ 上从点 $(1,0)$ 到点 $(2,1)$ 的一段有向弧段.

17. 设 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$, 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数.

18. 将函数 $f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

四、(8 分) 设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$ 的上侧, 求以下的曲面积分值

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3dy\wedge dz+(y-1)^3dz\wedge dx+(z-1)dx\wedge dy$$

五、(6 分) 讨论级数 $1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^p}+\cdots(p>0)$ 的敛散性.

2022 年高等数学下期末试题

一、选择题（共 5 题，每题 3 分）

1. 曲线 $C:\begin{cases}x^2+y^2-z^2=1\\ z=xy\end{cases}$ 在点 $(2,1,2)$ 处的切线方程为 （　）

A. $\begin{cases}2x-y+2z=2\\ x-2y+z=1\end{cases}$ B. $\begin{cases}2x+y-2z=1\\ x+2y-z=2\end{cases}$ C. $\begin{cases}2x-y+2z=1\\ x-2y+z=2\end{cases}$ D. $\begin{cases}2x+y-2z=1\\ x+2y-z=2\end{cases}$

2. 函数 $f(x,y)=xy^3$ 在椭圆 $2x^2+3y^2\leq 4$ 上的最大值为 （　）

A. 1 B. $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\dfrac{1}{2}$ D. 2

3. 极限 $\lim\limits_{r\to 0^+}\dfrac{1}{r^2}\iint\limits_{x^2+y^2\leq r^2} \mathrm{e}^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 等于 （　）

A. 0 B. 1 C. π D. 2π

4. 设有向曲面 $\Sigma: x^2+y^2+(z-1)^2=1,(z\geq 1)$, 定向为上侧，则第二类曲面积分

$$\iint\limits_{\Sigma} 2xy\,\mathrm{d}y\wedge\,\mathrm{d}z-y^2\,\mathrm{d}z\wedge\,\mathrm{d}x-z\,\mathrm{d}x\wedge\,\mathrm{d}y$$

等于 （　）

A. $-\dfrac{5}{3}\pi$ B. $-\dfrac{2}{3}\pi$ C. $-\dfrac{\pi}{3}$ D. $\dfrac{\pi}{3}$

5. 已知幂函数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是 2，则数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ 是 （　）

A. 绝对收敛 B. 条件收敛

C. 发散 D. 无法确定是否收敛

一、填空题（共 5 题，每题 3 分）

1. 设函数 $u(x,y,z)=x^{\frac{y}{z}}$, 则在点 $(\mathrm{e},1,1)$ 处沿方向 $\boldsymbol{l}=(1,-2,2)$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial \boldsymbol{l}}\right|_{(\mathrm{e},1,1)}=$ __________.

2. 设 $D=\{(x,y)\big||x|+|y|\leq 1\}$, 则二重积分 $\iint(x+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$__________.

3. 设 L 为圆 $x^2+y^2=4$, 则 $\displaystyle\int_L(2x^2-3y^2)\mathrm{d}s=$ __________.

4. 级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\dfrac{(x+1)^n}{n}$ 的收敛域为 __________.

5. 若级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\dfrac{a^n}{n^b},(a>0,b>0)$ 收敛，则 a 和 b 满足的条件是 __________.

三、计算题

1. 求函数 $f(x,y)=x^2(2+y^2)+y\ln y$ 的极值.

2. 计算三次积分 $\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 xe^{z^2}\mathrm{d}z$.

3. 设曲线 $C: 2x^2+y^2=1$, 方向取逆时针方向. 求曲线积分 $\int_C \frac{(x+y)\mathrm{d}x+(y-x)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$.

4. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma y^2\mathrm{d}S$, 其中 $\Sigma=\{(x,y,z)|x+y+z=1, x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0\}$.

5. 将 $f(x)=\arctan\dfrac{1+x}{1-x}$ 展开为 x 的幂级数.

6. 设 $f(x)$ 为周期为 3 的周期函数, 它在一个周期内的表达式为: $f(x)=\begin{cases}|x|, |x|\le 1\\ 1, 1\le |x|\le \dfrac{3}{2}\end{cases}$ ，试写出 $f(x)$ 在一个周期内的 Fourier 级数及和函数 $S(x)$ 的表达式，并求 $S(-2), S(3), S\left(\dfrac{9}{2}\right)$ 的值.

7. 设数列 $\{a_n\}$ 满足条件: $a_0=3, a_1=1, a_{n-2}-n(n-1)a_n=0, (n\ge 2)$, $S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ 的和函数, 求 $S(x)$ 的表达式.

四、设连续函数 $f(x)$ 恒正, $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leq t^2\}$, $D=\{(x,y)|x^2+y^2\leq t^2\}$, $F(t)=\dfrac{\displaystyle\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V}{\displaystyle\iiint\limits_{D} f(x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma}$, 试判断 $F(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 的单调性.

五、设函数 $f(x,y,z)$ 具有二阶连续偏导数, 而且

$$\lim_{r\to+\infty} r\left(x\frac{\partial f}{\partial z}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}-3\right)=1$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$. 记

$$A_n=\iiint\limits_{B(n)}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $B(n)=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\leq n^2\}$. 试讨论级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{A_n}$ 的敛散性, 若收敛, 指出收敛类型, 说明理由.

2021 年高数下期末试题

一、 填空题

1. 曲面 $\sin^2 x+\cos(y+z)=\dfrac{3}{4}$ 在点 $(x,y,z)=\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{3},0\right)$ 处的切平面方程是 ________。

2. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(a_n+\dfrac{1}{n}\right)x^n$ 的收敛半径 R 等于 ________。

3. 若□ ^{2} 上的可微函数 $u(x,y)$ 的梯度 $\mathbf{grad}\,u=(2x+e^x\sin y,e^x\cos y)$，且 $u(0,\pi)=2$，则 $u(x,y)=$ ________。

4. 设 $L:x=2\cos t,y=2\sin t,z=2t(0\le t\le\pi)$，则 $\int_L\dfrac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}s=$ ________。

5. 设 $f(x)=\begin{cases}2x, & -1\le x\le 0\\ x^2+1, & 0\le x\le 1\end{cases}$，将 $f(x)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数，其和函数记为 $S(x)$，则 $S\left(-\dfrac{15}{2}\right)=$ ________。

二、 选择题

1. 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy^2}{x^2+y^4}, & x^2+y^2=0\\ 0, & x^2+y^2\ne 0\end{cases}$ 在原点 $(0,0)$ 处 ( )

   (A) 连续且偏导数存在　(B) 沿各个方向的方向导数都存在，但不可微

   (C) 可微　(D) 连续但偏导数不存在

2. 设空间区域 $\Omega=\left\{(x,y,z)\,|\,0\le z\le\sqrt{4-x^2-y^2},x^2+y^2\le 1\right\}$，则 Ω 的体积等于 ( )

   (A) $4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r$　(B) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r$

   (C) $4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r$　(D) $\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\sqrt{4-r^2}\,\mathrm{d}r$

3. 设 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=a^2,z\ge 0$，在以下四组积分中，一组中两个积分同时为 0 的是 ( )

   (A) $\iint_\Sigma z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\iint_\Sigma z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　(B) $\iint_\Sigma xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\iint_\Sigma z^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

   (C) $\iint_\Sigma y\mathrm{d}x\mathrm{d}z,\iint_\Sigma y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z$　(D) $\iint_\Sigma y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z,\iint_\Sigma 1\mathrm{d}x\mathrm{d}z$

4. 二次积分 $\int_1^2\mathrm{d}x\int_{1/x}^1 y\mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}y$ 的值为 ( )

   (A) $\mathrm{e}^2-\mathrm{e}$　(B) $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2-\mathrm{e}$　(C) $\mathrm{e}^2+\mathrm{e}$　(D) $\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^2+\mathrm{e}$

5. 下列命题中正确的是 ( )

(A) 设正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$存在，则$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$

(B) 若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散，必存在$N\in\mathbb{R}_+$，当$n>N$时，恒有$a_n>\frac{1}{n}$

(C) 设$f(x)=x-\sin x$，则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$绝对收敛

(D) 若级数$\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛

三、 计算题

1. 设函数$f(u,v)$具有连续二阶偏导数，$z=xf\left(xy,\frac{x}{y}\right)$，求$\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$。

2. 计算曲面积分$\iint\limits_{\Sigma}xz\mathrm{d}S$，其中$\Sigma$是圆锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$被柱面$x^2+y^2=2ax(a>0)$所截部分。

3. 求函数$z=\frac{x^3}{3}-xy+\frac{y^2}{2}-2y$的极值。

4. 计算曲线积分$\int_C\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\left[2x+y\ln(x+\sqrt{x^2+y^2})\right]\mathrm{d}y$，其中有向曲线$C:y=x\sin x$，方向：$A(\pi,0)\to O(0,0)$。

5. 计算第二类曲面积分$\iint\limits_{\Sigma} x^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z - 3x^2 y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z^3-2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$\Sigma$是曲面$z = x^2 + y^2 (0 \le z \le 1)$的下侧。

6. (1) 将函数$f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$展开成麦克劳林级数；

(2) 利用(1)中所得级数，求积分$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$的值(注：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2} = \dfrac{\pi^2}{6}$)。

五、将函数$f(x) = x - \dfrac{\pi}{2} + \left| x - \dfrac{\pi}{2} \right| (0 \le x \le \pi)$展成余弦级数。

六、求幂级数$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}x^n$的和函数，并求$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n^2-1)2^n}$的和。

七、函数$f(x,y)$满足$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}$，且$f(0,y)=y+1$，$L_t$是从点$(0,0)$到点$(1,t)$的光滑曲线，计算曲线积分

$$I(t)=\int_{L_t}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

并求$I(t)$的最小值。

八、设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上连续，且单调增加有上界。证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}\left[f(n)-\int_{n-1}^{n}f(x)\mathrm{d}x\right]$收敛。

2020 年高数下期末试题

一、 选择题

1. 函数 $f(x,y)$ 的下面四条性质：

（1） 在点 (x_0,y_0) 处连续；

（2） 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数连续；

（3） 在点 (x_0,y_0) 处可微；

（4） 在点 (x_0,y_0) 处两个偏导数存在；

则如下表示的推导关系成立的是 (　　)

(A) $(2)\to(3)\to(1)$　　(B) $(3)\to(2)\to(1)$　　(C) $(3)\to(4)\to(1)$　　(D) $(3)\to(1)\to(4)$

2. 设 $f(x,y)$ 为连续函数，则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 f(r\sin\theta,r\cos\theta)r\mathrm{d}r$ 等于 (　　)

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}}f(x,y)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$　　(D) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}}f(x,y)dx$

3. 设 L 为逆时针方向的圆周 $x^2+y^2=a^2$，则 $\oint\frac{(x+y)dx-(x-y)dy}{x^2+y^2}=$ (　　)

(A) 0　　(B) 2π　　(C) $-\pi$　　(D) -2π

4. 设级数 $\sum_1^{+\infty}u_n$ 收敛，则下列级数中必定收敛的是 (　　)

(A) $\sum_1^{+\infty}(-1)^n\frac{u_n}{n}$　　(B) $\sum_1^{+\infty}{u_n}^2$　　(C) $\sum_1^{+\infty}u_{2n-1}-u_{2n}$　　(D) $\sum_1^{+\infty}u_n-u_{n+1}$

5. 设函数 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数，它在区间 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式 $f(x)=\begin{cases}-x,-\pi\le x\le 0\\ 0,0<x\le\pi\end{cases}$，则 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x=-\pi$ 收敛于 (　　)

(A) 0　　(B) $\frac{\pi}{2}$　　(C) $-\frac{\pi}{2}$　　(D) π

二、 填空题

1. 设曲面 $S:z=x+f(y-z)$，其中 f 可导，则该曲面在任一点处切平面的法向量 n 与向量 $(1,1,1)$ 的夹角 θ 为 ________。

2. $\int_0^1dy\int_y^1\frac{\tan x}{x}dx=$ ____________。

3. 设曲面Σ是$z=\sqrt{4-x^2-y^2}$的上侧，则$\iint\limits_{\Sigma} xydydz+xdzdx+x^2dxdy=$ ________。

4. 已知$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_{2n-1}=5$，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}a_n=2$，则$\sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n=$ ____________。

5. 幂级数$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}x^{3n+4}$的和函数$S(x)$为 ____________。

三、 计算题

1. 设$u=f(x,y,z)$，$\varphi(x^2,e^y,z)=0$，$y=\sin x$，其中f,φ都具有一阶连续偏导数，且$\frac{\partial\varphi}{\partial z}\neq 0$，求$\frac{du}{dx}$。

2. 求函数$f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$在区域$D=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 4, y\geq 0\right\}$上的最大值与最小值。

3. 设n为曲线$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=6^2 \\ x+y+z=0 \end{cases}$在点$(1,-2,1)$处的单位切向量，且与$OZ$轴正向夹角呈锐角，求函数$f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$在点$(0,1,2)$处沿向量$n$的方向导数。

4. 设是Ω是曲面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=2-x^2-y^2$所围成的立体，求Ω的体积V和表面积S。

5. 计算曲线积分$\int_L (2xy^3-y^2\cos x)dx+(1-2y\sin x+3x^2y^2)dy$，其中$L$为抛物线$2x=\pi y^2$从点$(0,0)$到点$(\frac{\pi}{2},1)$的一段弧。

6. 设S是半空间$x>0$中任意有向封闭曲面，函数$f(x)$在$(0,+\infty)$内存在连续的一阶导数，满足$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=1$，又$\oiint\limits_S xf(x)dy\wedge dz-xyf(x)dz\wedge dx-e^{2x}zdx\wedge dy=0$，求$f(x)$。

7. 计算三重积分$\iiint\limits_{(V)}(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c})^2dV$，其中$(V)$为球体$x^2+y^2+z^2\le R^2$，$a,b,c$为正数。

四、设函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+x^2}{x}\arctan x, x\neq 0\\ 1, x=0\end{cases}$

(1) 将函数 $f(x)$ 展开为 x 的幂级数；

(2) 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^n}{1-4n^2}$ 的和。

五、设 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上具有二阶连续导数，且 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{+\infty}a_n\cos nx$，其中 a_n $(n=0,1,2...)$ 是函数 $f(x)$ 的傅里叶系数，求证：$\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_n$ 绝对收敛。

2019 年高等数学下册期末试题

一、填空题 (每小题 3 分，共 15 分)

1. 函数 $u = 2xy - z^2$ 在点 $(2, -1, 1)$ 处沿 $I = (1, 2, -2)$ 的方向导数是______.

2. 级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{2^n}(x+1)^n$ 的收敛域是______.

3. 曲面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在点 $M_0(2, 1, 4)$ 处的切平面方程为____________.

4. 设曲线 L 是从点 $O(0, 0, 0)$ 到 $A(1, 2, 2)$ 的直线段, 则对弧长的曲线积分 $\int_L x\mathrm{e}^{yz}\,\mathrm{d}s =$________.

5. 设 $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le \frac{1}{2}, \\ 2 - 2x, & \frac{1}{2} < x < 1 \end{cases}$, $S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi x (-\infty < x < +\infty)$, 其中 $a_n = 2\int_0^1 f(x)\cos n\pi x \mathrm{d}x (n = 0, 1, 2, \cdots)$, 则 $S\left(-\frac{5}{2}\right) =$______.

二、计算题 (每小题 6 分，共 18 分)

1. 设函数 $u = f(x, y, z)$, f 具有连续的二阶偏导数, 且 $z = \mathrm{e}^x \sin y$, 求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$.

2. 计算 $\int_C -y^2dx + xdy + z^2dz$, 其中曲线 C 是平面 $y + z = 4$ 与柱面 $x^2 + y^2 = 2y$ 的交线, 且从 z 轴正向往下看是逆时针方向.

3. 计算曲面积分 $\iint_\Sigma (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}S$, 其中 Σ 是锥面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}, 0 \le z \le 2$ 部分.

三、计算题 (每小题 7 分，共 21 分)

1. 求曲面 $z = x^2 + y^2$ 与圆锥面 $z = 2 - \sqrt{x^2 + y^2}$ 所围空间闭区域 Ω 的体积.

2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(2n+1)}{n!} x^{2n}$ 的和函数 $S(x)$.

3. 计算 $\iiint\limits_{\Omega} (2\sin y + z)\mathrm{d}V$, 其中 $\Omega = \left\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \le 2z, z \ge \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$.

四、解答题 (每小题 8 分，共 32 分)

1. 求曲线积分 $\int\limits_L \dfrac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, 其中 L 为摆线 $\begin{cases} x = t - \sin t - \pi, \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$ 由 $t = 0$ 到 $t = 2\pi$ 的一段.

2. 求椭圆 $\begin{cases} 5x^2 - 6xy + 5y^2 = 4 \\ z = 0 \end{cases}$ 上的点到点 $M(0,0,2)$ 的最长距离和最短距离.

3. 求向量场 $\vec{A} = (2x+z)\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ 通过抛物面 $\Sigma : z = x^2 + y^2 (0 \le z \le 1)$ 下侧的通量.

4. 将函数 $f(x) = \sin\dfrac{x}{2}(-\pi \le x \le \pi)$ 展开成傅里叶级数.

五、(8 分) 将 $f(x) = (1+x)\ln(1+x)$ 展开成 x 的幂级数, 并求 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n(n-1)}$ 的和.

六、(6 分) 设平面区域 $D = \{(x, y) \mid 0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi\}$, L 为 D 的边界正向.
证明: $\displaystyle\int_L x\mathrm{e}^{\sin y}\,\mathrm{d}y - y\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}x \ge \frac{5}{2}\pi^2$.

2018 年高数下期末试题

一、单选题

1. 设函数 $f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$ 处的某个领域内有定义，则下列说法正确的是（　　）

A. 若 $f(x,y)$ 在点 P 处的偏导数存在，则 $f(x,y)$ 在该点一定可微

B. 若 $f(x,y)$ 在点 P 处连续，则 $f(x,y)$ 在该点的偏导数一定存在

C. 若 $f(x,y)$ 在点 P 处有极限，则 $f(x,y)$ 在该点一定连续

D. 若 $f(x,y)$ 在点 P 处可微，则 $f(x,y)$ 在该点连续且偏导数一定存在

2. 若 $f(x,y)$ 在 D：$a\le x\le b, c\le y\le d$ 上有二阶连续偏导数，则 $\iint\limits_{D}\frac{\partial\ f(x,y)}{\partial x\partial y}dxdy=$（　　）

A. $f(a,d)-f(b,d)-f(b,c)+f(a,c)$　　B. $f(b,d)-f(a,d)-f(b,c)+f(a,c)$

C. $f(a,d)-f(b,d)-f(a,c)+f(b,c)$　　D. $f(b,d)-f(a,d)-f(a,c)+f(b,c)$

3. 若 L 是球面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与平面 $x+y+z=0$ 的交线，则 $I=\oint_L (x+1)^2 ds=$（　　）

A. $\frac{28}{3}\pi$　　B. 8π　　C. $\frac{19}{3}\pi$　　D. 12π

4. 微分方程 $y''+3y'+2y=(ax+b)e^{-x}$ 的特解形式为（　　）

A. $y=Axe^{-x}$　　B. $y=(Ax+B)e^{-x}$　　C. $y=(Ax+B)xe^{-x}$　　D. $y=Ax^2e^{-x}$

5. 设 $f(x)$ 为连续函数，$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx$，则 $F'(2)=$（　　）

A. $2f(2)$　　B. $f(2)$　　C. $-f(2)$　　D. 0

二、计算题

1. 求曲面 $e^z-z+xy=3$ 在点 $(2,1,0)$ 处的切平面方程和法线方程.

2. 求密度为 1 的抛物体V：$x^2+y^2\le z\le 1$绕z轴的转动惯量.

3. 设S为上半球面$x^2+y^2+z^2=4, z\ge 0$，计算$\iint\limits_{(s)}(x+y+z)dS$.

4. 计算$I=\int_L (y^2+\sin^2(x+y))dx+(x^2-\cos^2(x+y))dy$，其中$L$为曲线$y=\sqrt{1-x^2}$从上点A(1,0)到B(0,1)的一段弧.

5. 计算积分$I=\oint\limits_C zdx+xdy+ydz$，其中$C$为$x+y+z=1$被三个坐标面所截的三角形的边界，方向与三角形上侧的法向量构成右手法则.

6. 设 $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^2+z^2)$，计算 $\mathrm{div}\left[grad\ f(x,y,z)\right]$ 和 $\mathrm{rot}\left[grad\ f(x,y,z)\right]$.

7. 已知 $y_1=x$， $y_2=x+e^x$， $y_3=1+x+e^x$ 是 $y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=Q(x)$ 的解，试求此方程的通解.

8. 计算 $I=\int_0^1 dx\int_{x^2}^1 \frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dy$.

三、解答题

1. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases} xy\arctan\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性、偏导数存在性、可微性.

2. 在椭球面$2x^2+2y^2+z^2=1$上求一点P，使得函数$u=x^2+y^2+z^2$在点P沿方向$n=(1,-1,0)$的方向导数最大，并求此方向导数的最大值.

3. 计算$I=\oiint\limits_{(s)}(x-y+z)dy\wedge dz+(y-z+x)dz\wedge dx+(z^2-x+y)dx\wedge dy$，其中$S$为曲面$x^2+y^2+z^2=R^2$与$x^2+y^2+(z-R)^2=R^2$所围立体表面的外侧.

4. 求微分方程$x''+2x'+2x=te^{-t}\cos t$的通解.

5. 设L是不经过点$(2,0)$，$(-2,0)$的分段光滑的简单正向闭曲线，试就L的不同情形计算曲线积分

$$I=\oint_L\left[\frac{y}{(2-x)^2+y^2}+\frac{y}{(2+x)^2+y^2}\right]dx+\left[\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}-\frac{2+x}{(2+x)^2+y^2}\right]dy$$

2017 年高数下期末试题

一、计算题

1. 求$u=4x^2+y^2+z^2$在点M(1,0,2)处的梯度及最大方向导数.

2. 求微分方程$y'''-y''+2y'-2y=0$的通解.

3. 设$u=f(t),t=\varphi(xy,x)$，其中f，φ具有连续的二阶导数及偏导数，求$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$.

4. 求曲线$\begin{cases}x=t\\y=-t^2\\z=t^3\end{cases}$与平面$x+2y+z=4$平行的切线方程.

5. 求函数$f(x,y)=x^3-y^3+3x^2+3y^2-9x$的所有极值.

6. 计算累次积分$I=\int_0^1 dx\int_x^1 x^2e^{-y^2}dy$.

7. 计算二重积分 $I=\iint\limits_{D}(xy+|y|)dxdy$，其中 $D=\{(x,y):|x|+|y|\le 1\}$.

8. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x^3}{r^3}dy\wedge dz+\frac{y^3}{r^3}dz\wedge dx+\frac{z^3}{r^3}dx\wedge dy$，其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，$\sum$： $x^2+y^2+z^2=a^2$ 的外侧.

9. 求第一型曲线积分 $I=\int_L\sqrt{2y^2+z^2}ds$，其中 $L:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=a^2\\x-y=0\end{cases}$.

10. 求双曲抛物面（马鞍面）$z=xy$ 被圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 所截下那部分的面积.

二、解答题

1. 讨论 $f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2} & x^2+y^2\ne 0\\0 & x^2+y^2=0\end{cases}$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数存在性、可微性、偏导函数的连续性.

2. 计算第二型曲线积分 $I=\int_L \frac{x-y}{x^2+y^2}dx+\frac{x+y}{x^2+y^2}dy$，其中 L 是从点 $\mathrm{A}(-a,0)$ 经上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ $(y\geq 0)$，到点 $\mathrm{B}(a,0)$ 的弧段.

3. 求微分方程 $y''-2y'+2y=e^x\sin x$ 满足 $y(0)=1, y'(0)=1$ 的特解.

4. （学习高数I的同学做（1），其余的学生做（2））

（1）求解微分方程组 $\frac{d\vec{x}}{dt}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}\vec{x}$.

（2）设曲线积分 $\int_{(C)}[f''(x)+9f(x)+2x^2-5x+1]ydx+2f'(x)dy$ 与路径无关，求 $f(x)$.

5. 计算曲线积分 $\int_{(C)}(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$，其中曲线 (C) 为球面 $x^2+y^2+z^2=4x$ 与柱面 $x^2+y^2=2x$ 的交线，其方向为从 oz 轴正向看进去为逆时针方向 $(z\geq 0)$.

2016 年高数下期末试题

一、填空题

1. 设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f}{\partial x}=x^2+y+1$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=ax+y^2+2$，则 $a=$________.

2. 设三元函数 $f(x,y,z)=\int_0^{x+y+z}\cos^2(t^2)dt$，则 $df\big|_{(1,0,-1)}=$________________.

3. 设 $f(x)=\int_x^1 e^{\frac{y^2}{2}}dy$，则 $\int_0^1 f(x)dx=$______________________.

4. 函数 $z=3x+4y$ 在条件 $x^2+y^2=1$ 下的最大值为________.

5. 微分方程 $xdy+(y-\sin x)dx=0$ 满足 $y\big|_{x=\pi}=1$ 的特解 $y=$______________.

二、单选题

1. 设函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不可微，则必有（　　）

   A. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 不连续

   B. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的两个偏导数不存在

   C. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的两个偏导数至少有一个不连续

   D. $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 沿某个方向的方向导数不存在

2. 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续，在 D 内偏导数存在. 若 $f(x,y)$ 在 D 的边界上恒为零，且满足等式 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}+2\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-f(x,y)$，则 $f(x,y)$ 在 D 上（　　）

   A. 存在非零的最大值　　　　B. 存在非零的最小值

   C. 只在边界上取得最大值和最小值　　　　D. 能在边界上取得最大值和最小值

3. 设 $I_1=\iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le 1}e^{xyz}dv$，$I_2=\iiint\limits_{|x|\le 1,|y|\le 1,|z|\le 1}e^{xyz}dv$，$I_3=\iiint\limits_{|x|+|y|+|z|\le 1}e^{xyz}dv$，则（　　）

   A. $I_3<I_1<I_2$　　B. $I_1<I_2<I_3$　　C. $I_2<I_3<I_1$　　D. $I_1<I_3<I_2$

4. 质点在变力 $\overline{F}=\{P(x,y),0\}$ 的作用下沿平面有向曲线 L 移动，则该力所做的功为（　　）

   A. 0　　B. $\int_L P(x,y)dx$　　C. $\int_L P(x,y)dy$　　D. $\int_L P(x,y)ds$

5. 设 L 是曲线 $x^2+y^2=a^2$，则曲线积分 $\int_L (x+y)^2 ds$ 为（　　）

   A. a^2　　B. a^3　　C. $2\pi a^3$　　D. πa^4

三、简答题

1. 设函数 $z=f(xy,\sin y)$，其中 f 具有二阶连续的偏导数，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 求曲线 $\begin{cases}3x^2+2y^2+3z^2=12\\ z=x\end{cases}$ 在点 $(1,\sqrt{3},1)$ 处的切线与法平面方程.

3. 求 $\displaystyle\iint\limits_D \frac{x\cos y}{y}dxdy$，其中 D 是由曲线 $y=x^2(x\geq 0)$ 和直线 $x=0,y=4$ 围成的平面区域.

4. 求 $\displaystyle\iiint\limits_\Omega \sqrt{x^2+y^2}dv$，其中 Ω 是由曲面 $z^2=x^2+y^2$， $z=1$ 与 $z=2$ 所围成的区域.

5. 求函数 $f(x,y)=2x^2-3xy+2y^2-x+2y$ 的极值.

6. 计算曲线积分 $\int_L (y+\frac{e^y}{x})dx+e^y\ln x dy$，其中 L 为平面曲线 $x=1+\sqrt{2y-y^2}$ 上从点 $(1,0)$ 到点 $(2,1)$ 的一段有向弧段.

7. （学习高数 I 的同学做（1），学习高数 II 的同学做（2））.

（1）求解微分方程组 $\frac{dx}{dt}=Ax$ 的通解，其中 $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

（2）求方程 $y''+2y'+y=2xe^{-x}$ 的通解.

8. 设三元函数 P, Q, R 在单连通区域 Ω 内有一阶连续偏导数，Γ 是 Ω 内的简单曲线.

（1）写出曲线积分 $I=\int_{\Gamma} Pdx+Qdy+Rdz$ 与路径无关的一个充分条件.

（2）计算积分 $I=\int_{\Gamma}(y+z)dx+(z+x)dy+(x+y)dz$，其中 Γ：$x=a\cos t, y=a\sin t, z=t$ 上从点 $(a,0,0)$ 到点 $(-a,0,\pi)$ 的一段.

9. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{S}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$，其中曲面 S 为：$1-\frac{z}{7}=\frac{(x-2)^2}{25}+\frac{(y-1)^2}{16}\ (z\geq 0)$ 的上侧.

2015 年高数下期末试题

一、单选题

1. 设 $f(x,y)=\dfrac{2x^2}{x^2+y^2}$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处的二重极限（　　）

A. 等于 0　　B. 等于 1　　C. 等于 2　　D. 不存在

2. 设曲面 $S: x^2+y^2+z^2=R^2(z\geq 0)$，取上侧，$S_1$ 为 S 位于第一卦限部分，则有（　　）

A. $\iint\limits_S xdS = 4\iint\limits_{S_1} xdS$　　B. $\iint\limits_S ydS = 4\iint\limits_{S_1} ydS$

C. $\iint\limits_S xdydz = 4\iint\limits_{S_1} xdydz$　　D. $\iint\limits_S ydydz = 4\iint\limits_{S_1} ydydz$

3. 设曲线 $C: x^2+y^2=1$，取逆时针方向，则 $\oint_C (y+\dfrac{y^3}{6})dx+(2x-\dfrac{x^3}{3})dy=$（　　）

A. $\dfrac{\pi}{4}$　　B. $\dfrac{3\pi}{8}$　　C. $\dfrac{\pi}{2}$　　D. $\dfrac{5\pi}{8}$

4. $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 点沿方向 $\vec{l}=(1,\sqrt{3})$ 的方向导数 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=$（　　）

A. 0　　B. $\dfrac{3}{8}$　　C. $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$　　D. 3

二、填空题

1. 设 $f(x,y)=x^3y-\sin(x^2-y^2)$，则 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,3)}=$____________.

2. 空间曲线 $\begin{cases}z=x^2+4y^2\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ 在点 $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2},\dfrac{7}{4}\right)$ 处的切线与 Ox 的夹角 $\alpha=$______.

3. 二次积分 $\int_0^1 dx\int_x^{\sqrt{x}} \dfrac{\cos y}{y}dy=$____________.

4. 设空间曲线 C 为 $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ x+y+z=\dfrac{3R}{2}\end{cases}$，其中常数 $R>0$，则 $\oint_C yds=$____________.

三、解答题

1. 设函数 $f(u,v)$ 具有一阶连续偏导数，$z=\int_0^{xy} f(e^t,t)dt$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

2. 设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $e^z-2x+yz=e$ 在 $(0,0,1)$ 点的某领域内确定的隐函数，求全微分 $dz\big|_{(0,0)}$.

3.（学工科分析者做（1），其余做（2））

（1）求解微分方程组：$\dfrac{dx}{dt}=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&-1\\0&-1&1\end{pmatrix}x$.

（2）求一个以四个函数 $y_1=e^x,y_2=2xe^x,y_3=\cos 2x,y_4=3\sin 2x$ 为特解的齐次线性微分方程，并求方程的通解.

4. 求微分方程 $y''-5y'+6y=2xe^{2x}$ 的通解.

5. $I=\iint\limits_D\sqrt{|y-x^2|}dxdy$，其中 $D=\{(x,y)|-1\le x\le 1,0\le y\le 1\}$.

6. 设Σ是旋转抛物面$z=1-x^2-y^2(z\geq 0)$，取上侧，计算第二类曲面积分：

$$I=\iint_{\Sigma}2x^3dydz+2y^3dzdx+3(z^2-1)dxdy$$

7. 设$f(x)$在$(0,+\infty)$上具有连续的导数，L是由点$A(3,\frac{2}{3})$到点$B(1,2)$的直线段，求：

$$\int_L\left[\frac{x}{y^2}-xf(xy)\right]dy-\left[\frac{1}{y}+yf(xy)\right]dx$$

8. 在曲面$z=4-x^2-y^2$位于第一卦限部分上求一点P，使P点的切平面与三个坐标面围成的四面体体积最小，并求此最小体积.

9. 设 $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{|xy|}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2) & x^2+y^2\neq 0 \\ 0 & x^2+y^2=0 \end{cases}$，证明：函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处可微.

10. 设函数 $f(x,y)$ 在 $D: x^2+y^2\le 1$ 上有二阶连续的偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=e^{-(x^2+y^2)}$，证明：

$$I=\iint_D\left(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}\right)dxdy=\frac{\pi}{2e}$$

2014年高数下期末试题

一、计算题

1．在曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2$ 上求一点，使曲面在该点处的切平面平行与平面 $2x+2y-z=0$.

2．设 f 是连续函数，交换积分次序：$\int_{-6}^{2}dx\int_{\frac{1}{4}x^2-1}^{2-x}f(x,y)dy$.

3．求微分方程 $x''+3x'+2x=e^{-2t}$ 的通解.

4．已知曲线 $L: y=x^2(0\le x\le 1)$ 上任意一点处的线密度在数值上与该点的横坐标相同，求曲线的质量.

5．（学工科分析者做（1），其余做（2））

（1）验证微分方程组 $\dfrac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos^2 t & \dfrac{1}{2}\sin 2t-1\\ \dfrac{1}{2}\sin 2t+1 & \sin^2 t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}$ 通解为 $\vec{x}=C_1\begin{pmatrix}e^t\cos t\\e^t\sin t\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-\sin t\\\cos t\end{pmatrix}, t\in R$.

（2）验证 $y_1=e^x, y_2=e^x\ln|x|$ 是微分方程 $xy''-(2x-1)y'+(x-1)y=0$ 的解，并求其通解.

6. 计算三重积分 $\iiint\limits_V zdv$，其中 V 是由不等式 $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{2-x^2-y^2}$ 确定的空间区域.

7. 求向量场 $\vec{A}=\{z+x^2, x, z^2+3y\}$ 穿过曲面 Σ： $z=x^2+y^2(0\le z\le 1)$ 下侧的通量.

8. 计算第一型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2)dS$，其中 Σ 为曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于 $0\le z\le 1$ 之间的部分.

9. 计算第二型线积分 $\int_L ye^{y^2}dx+(xe^{y^2}+2xy^2e^{y^2})dy$，其中 L 为 $y=\sqrt[3]{x}$ 上从 $O(0,0)$ 到 $A(1,1)$ 的曲线段.

10. 求 $div[grad(\sqrt{x^2+y^2+z^2})]$.

11.（学工科分析者做（1）, 其余做（2））

（1）求线性微分方程组 $\dfrac{d\bar{x}}{dt}=A\bar{x}$ 的通解，其中 $A=\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$.

（2）已知函数 $y=e^{2x}+(x+1)e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解，试确定 a,b,c，并求该方程的通解.

12. 设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，其中 f,F 都具有一阶连续偏导数，求 $\dfrac{dy}{dx}$.

13. 计算 $\iint\limits_{(D)} x[1+y\sin^2(x^2+y^2)]d\sigma$，其中 (D) 是由 $y=x^3, y=1, x=-1$ 所围成的区域.

14. 设函数 $\varphi(y),\psi(y)$ 具有连续导数，对平面内的任意分段光滑简单闭曲线 C，有曲线积分

$\oint_C 2[x\varphi(y)+\psi(y)]dx+[x^2\psi(y)+2xy^2+2x\varphi(y)]dy=0$，求：

（1）求满足条件 $\varphi(0)=-2,\psi(0)=0$ 的函数 $\varphi(y),\psi(y)$.

（2）计算 $\int_{(1,1)}^{(0,0)} 2[x\varphi(y)+\psi(y)]dx+[x^2\psi(y)+2xy^2+2x\varphi(y)]dy$.

15. 设 $D=\{(x,y)\big|0\le x\le 2, 0\le y\le 2\}$

（1）计算 $A=\iint\limits_D |xy-1|dxdy$.

（2）设 $f(x,y)$ 在 D 上连续，且 $\iint\limits_D f(x,y)dxdy=0, \iint\limits_D xyf(x,y)dxdy=1$，证明存在 $(\xi,\eta)\in D$，使 $|f(\xi,\eta)|\ge\dfrac{1}{A}$.

2013 年高数下期末试题

1．求函数 $u = x^2 + y^2 + z^4 - 3xz$ 在点 $M_0(1,1,1)$ 处 $\vec{l} = (1,2,2)$ 方向的方向导数.

2．求曲面 $3x^2 + y^2 + z^2 = 16$ 在点 $M(2,2,0)$ 处的切平面方程.

3. 设函数 $z = z(x, y)$ 由方程 $z^2y - xz^3 = 1$ 所确定，求 $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2,1)}$.

4. 求微分方程 $y'' - 2y' + 5y = 0$ 的通解.

5．设 L 是从点 $A(1,0)$ 到 $B(-1,2)$ 的直线段，计算曲线积分 $\int_L (x+y)ds$.

6. 设 $z = xf(xy, \dfrac{x}{y})$，其中 f 具有连续的二阶偏导数，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

7. 计算 $\int_0^1 dx \int_{x^2}^1 \dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}} dy$.

8. 设有一物体，它是由曲面 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}$ 所围成，已知它在任意的点 (x, y, z) 处的密度 $\rho = z$，求此物体的质量 m.

9. 计算曲线积分 $\int_{(\overset{\frown}{AB})} (e^x \sin y + y + 1)dx + (e^x \cos y - x)dy$，其中 $\overset{\frown}{AB}$ 为曲线 $y = -\sqrt{-x^2 + 8x - 7}$ 从 $A(7,0)$ 到点 $B(1,0)$ 的一段弧.

10. 计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma} x\cos^2(1+z)\mathrm{d}y\Lambda\mathrm{d}z+y\sin^2(1+z)\mathrm{d}z\Lambda\mathrm{d}x+4(z+1)\mathrm{d}x\Lambda\mathrm{d}y$，其中 Σ 是下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的上侧.

11.（学工科分析者作（1），其余作（2））

（1） 求线性微分方程组 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}=A\vec{x}$ 的通解, 其中 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & -2 & 1\\ -2 & 1 & 1\end{bmatrix}$.

（2） 设函数 u 的全微分 $du=[3f(x)+e^x]ydx+[2f'(x)+f(x)]dy$，其中 $f(x)\in C^{(2)}$，且 $f(0)=1$，$f'(0)=\dfrac{1}{5}$，求 $f(x)$.

12. 讨论函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$，在点 $(0,0)$ 的连续性、可导性、可微性.

13. 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{1}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，其中 D 是 $x^2+y^2\le 1$，求 $f(x,y)$.

14. 设对任意的分片光滑有向封闭曲面 S，都有：

$$\oiint\limits_S (y+1)f'(x)dy\Lambda dz+(y-y^2)f(x)dz\Lambda dx+[zyf'(x)-2ze^x]dx\Lambda dy=0$$

其中函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内具有连续的二阶导数，求 $f(x)$.

15. 证明：$\oint\limits_L [xf(y)+x^2]dy-[\frac{y}{f(x)}+2y^2]dx\ge 2\pi+6a\pi$，其中 L 为圆周曲线 $(x-a)^2+(y-a)^2=1$，$(a>0)$ 的正向，$f(x)$ 连续取正值.

2012 年高数下期末试题

一、计算题

1．求曲线 $\vec{r}(t)=(\cos t,\sin t,\tan\frac{t}{2})$ 在点 $(0,1,1)$ 处的切线方程.

2．求曲面 $z-e^{z}+2xy=3$ 在点 $(1,2,0)$ 处的切平面方程.

3. 设 f 是连续函数, 交换下列积分次序 $\int_{1}^{2}\mathrm{d}x\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$.

4. 求微分方程 $\ddot{x}+4\dot{x}+5x=0$ 的通解.

5. 设 L 为圆周 $x^2+y^2=ax$，$(a>0)$，计算线积分 $\int_{\mathrm{L}}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}s$.

6. 已知 $z=f(2x-y,y\sin x)$，$f(u,v)$ 具有连续二阶偏导数, 求 $\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

6. 计算 $\iint_D \sin\frac{x}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D是由$x=0,y=\frac{\pi}{2},y=\pi$ 及 $x=y^2$ 所围的平面区域.

8. 设有一物体, 由曲面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 与 $z=\frac{1}{3}(x^2+y^2)$ 所围成, 已知它在任意点 (x,y,z) 处的密度 $\mu=z$, 求此物体的质量.

9. 计算曲线积分 $\int_L e^x[\cos y\mathrm{d}x+(y-\sin y)\mathrm{d}y]$, 其中 L 是 $y=\sin x$ 从 $A(0,0)$ 到点 $B(\pi,0)$ 的弧段.

10. 计算第二型面积分 $\iint\limits_{\Sigma} xdy\Lambda dz + ydz\Lambda dx + (z+1)dx\Lambda dy$，其中 Σ 为曲面 $z=1-x^2-y^2$ 在 xoy 平面上方部分, 方向取上侧.

11. （学工科分析者作（1）, 其余作（2））

（1）求线性微分方程组 $\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t} = A\vec{x}$ 的通解, 其中 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \\ -3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

（2）求微分方程 $\ddot{x}-3\dot{x}+2x=4e^t$ 的通解.

12. 计算第一型曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma} z\mathrm{d}S$, 其中曲面 Σ 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 上介于平面 $z=1$ 于 $z=2$ 之间的部分.

13. 设微分方程 $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$

（1）证明：若 $1+P(x)+Q(x)=0$, 则方程有一特解 $y=e^x$；若 $P(x)+xQ(x)=0$ 则方程有一特解 $y=x$.

（2）根据（1）的结论，求 $(x-1)y''-xy'+y=0$ 的通解和满足初始条件 $y(0)=2, y'(0)=1$ 的特解.

（3）求 $(x-1)y''-xy'+y=1$ 满足初始条件 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln[y(x)-1]}{x}=-1$ 的特解.

14. 求函数 $u=x+y+z$, 在条件 $x^2+y^2+z^2-2ax-2ay-2az+2a^2=0\ (a>0)$ 下的最小值，并证明:若曲面 A : $x^2+y^2+z^2=2ax+2ay+2az-2a^2$，$\iint\limits_{(A)}(x+y+z+\quad 3a)^3\mathrm{d}S\geq 108\pi a^5$.