高等数学(下)

25版期末真题答案

彭康书院学业辅导与发展中心 · 资料编写组

2024 年高数下期末试题解析

一、单选题

1. (C)

解析. 令 $y=x^2$, 有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{5x^4}{2x^4}=\frac{5}{2}\neq 0=f(0)$$

故不连续; 易得 $f(0,y)=f(x,0)=0$, 故 $f_x(0,0)=f_y(0,0)=0$, 故选 (C). □

2. (D)

解析.

$$\iint_{(D)}(x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{(D)}x^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+2\iint_{(D)}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\iint_{(D)}y^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

(D) 关于 x 轴, y 轴对称，由 xy 对 x 是奇函数可得 $\iint_{(D)}xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$; 由 x^2 对 x,y 是偶函数, 得 $\iint_{(D)}x^2dxdy=4\iint_{(D_1)}x^2dxdy$; 对 y^2 同理, 所以

$$\iint_{(D)}(x+y)^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=4\iint_{(D_1)}\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,$$

故选 (D). □

3. (C)

解析. 由 $2x^2+3y^2=6$ 得: $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}=1$, 根据积分的性质得:

$$\oint_{(C)}\left(\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{2}-5x\right)\,\mathrm{d}s=\oint_{(C)}\mathrm{d}s-\oint_{(C)}5x\,\mathrm{d}s$$

前一个积分即为椭圆 (C) 的周长 l;
对于后一个积分, 因为积分区域关于 x,y 轴对称, 被积函数 $5x$ 是关于 x 的奇函数，根据对称性得: $\oint_{(C)}5x\,\mathrm{d}s=0$, 故原积分为 l, 故选 (C). □

4. (B)

解析. 由比较准则 II,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\Big/\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}}=2$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\Big/\frac{1}{n^2-1}=1$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\Big/\frac{1}{\sqrt{2n^2+1}}=\sqrt{2}$$

再由 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散,$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛, 得 (A)(C) 发散,(B) 收敛,

又 $\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n}=\frac{1}{2}\neq 0$, 故 (D) 不收敛, 故选 (B). □

5. (D)

解析. (A)(C) 若函数偏导存在函数不一定连续, 进而不一定可微, 单选题 1. 为一例;
(B) 由可微的必要条件可得偏导数存在, 但偏导数不一定连续, 如 $\left(x^2+y^2\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}$.
故选 (D). □

6. (D)

解析.

对于幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n\left(x-x_0\right)^n$ （这里 $x_0=1$ ），
存在一个非负实数 R （R 可以是 0 ，也可以是 $+\infty$ ），使得：
当 $|x-x_0|<R$ 时，幂级数绝对收敛；
当 $|x-x_0|>R$ 时，幂级数发散；
当 $|x-x_0|=R$ 时，幂级数可能绝对收敛、条件收敛或者发散。
已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 在 $x=-1$ 处收敛。
将 $x=-1$ 代入 $|x-1|$ ，可得 $|-1-1|=|-2|=2$ 。
根据阿贝尔定理，当幂级数在某点 $x=x_1$ 处收敛时，对于满足 $|x-1|<|x_1-1|$ 的一切 x ，幂级数绝对收敛。
所以该幂级数的收敛半径 $R\geqslant 2$ 。
当 $x=3$ 时，$|x-1|=|3-1|=2$ 。
由于仅知道收敛半径 $R\geqslant 2$ ，当 $|x-1|=2$ 时，幂级数可能绝对收敛、条件收敛或者发散，所以该幂级数在 $x=3$ 处的敛散性不能确定。

□

二、填空题

1. $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

解析. 求得 $\operatorname{grad} u|_{(1,2,3)} = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial u}{\partial z}\right)\Big|_{(1,2,3)} = \left(\dfrac{x}{3}, \dfrac{y}{6}, \dfrac{z}{9}\right)\Big|_{(1,2,3)} = \dfrac{1}{3}(1,1,1)$.
由方向导数计算公式得

$$\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}\Big|_{(1,2,3)} = \operatorname{grad} u|_{(1,2,3)} \cdot \frac{\boldsymbol{n}}{\|\boldsymbol{n}\|} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

□

2. z

解析.

$$\operatorname{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \left(2xz, yz, x^2 + \frac{1}{2}y^2 - z^2\right) = (P, Q, R),$$

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 2z + z - 2z = z.$$

□

3. $2x + 4y - z = 5$

解析. 曲面 $z = x^2 + y^2$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的切平面方程为

$$2x_0(x - x_0) + 2y_0(y - y_0) - (z - z_0) = 0,$$

由 $z_0 = x_0^2 + y_0^2$, 得

$$2x_0 x + 2y_0 y - z - z_0 = 0.$$

由题设可知,

$$\frac{2x_0}{2} = \frac{2y_0}{4} = \frac{-1}{-1},$$

故 $x_0 = 1, y_0 = 2, z_0 = x_0^2 + y_0^2 = 5$, 所求切平面方程是 $2x + 4y - z = 5$. □

4. $[2, 4)$

解析.

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad a_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$$

计算极限:

$$L = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{n+1}} = 1$$

因此，收敛半径 $R = \frac{1}{L} = 1$。
收敛区间为：

$$|x-3| < 1 \quad \Rightarrow \quad 2 < x < 4$$

当 $x = 2$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$，这是一个交错级数，满足莱布尼茨判别法，因此收敛。
当 $x = 4$ 时，级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$，这是一个 p 级数，$p = \frac{1}{2} \leq 1$，因此发散。
故收敛域为 $[2,4)$。 □

5. $-\frac{2}{3}$

解析. 区域 D 可以表示为：

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -1 \leq y \leq x$$

$$I = \iint_{(D)} y\,dxdy + \iint_{(D)} xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dxdy$$

第一部分：$\iint_{(D)} y\,dxdy$

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{x} y\,dydx = \int_{-1}^{1} \frac{y^2}{2}\bigg|_{-1}^{x} dx = \int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right)dx \\ = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(x^2-1)dx \\ = -\frac{2}{3}\end{aligned}$$

第二部分：$\iint_{(D)} xye^{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dxdy$
被积函数关于 y 是奇函数，且积分区域关于 y 对称（从 $y = -1$ 到 $y = x$），因此该部分积分为 0。
故 I=$-\frac{2}{3}$ □

6. $\frac{4\pi}{15}R^5$

解析. 在球坐标系下：

$$x = r\sin\theta\cos\phi, \quad y = r\sin\theta\sin\phi, \quad z = r\cos\theta$$

体积元素为：

$$dV = r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi$$

积分变为：

$$I = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}(r\cos\theta)^2\cdot r^2\sin\theta\,drd\theta d\phi$$

$$I=\int_0^{2\pi}d\phi\cdot\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\cdot\int_0^{R}r^4\,dr$$

计算各部分:

(1) $\int_0^{2\pi}d\phi=2\pi$

(2) $\int_0^{\pi}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta$:

设 $u=\cos\theta$，则 $du=-\sin\theta d\theta$:

$$\int_1^{-1}-u^2du=\int_{-1}^{1}u^2du=\left.\frac{u^3}{3}\right|_{-1}^{1}=\frac{2}{3}$$

(3) $\int_0^{R}r^4\,dr=\left.\frac{r^5}{5}\right|_0^R=\frac{R^5}{5}$

故 $I=2\pi\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{R^5}{5}=\frac{4\pi R^5}{15}$ □

三、计算题

1. **解析.**

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x^3\left(f_1'\cdot x+f_2'\cdot\frac{1}{x}\right)=x^4f_1'+x^2f_2'$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=x^4\left(xf_{11}''+\frac{1}{x}f_{12}''\right)+x^2\left(xf_{21}''+\frac{1}{x}f_{22}''\right)=x^5f_{11}''+2x^3f_{12}''+xf_{22}''$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=4x^3f_1'+x^4\left(yf_{11}''-\frac{y}{x^2}f_{12}''\right)+2xf_2'+x^2\left(yf_{21}''-\frac{y}{x^2}f_{22}''\right)$$

即为$4x^3f_1'+2xf_2'+x^4yf_{11}''-yf_{22}''$

□

2. $\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}$

解析. 采用柱坐标参数化:

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=r,\quad 0\le r\le 1,\quad 0\le\theta\le 2\pi.$$

曲面的梯度为 $\nabla(z-\sqrt{x^2+y^2})=\left(-\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},1\right)$，其模长为:

$$|\nabla(z-\sqrt{x^2+y^2})|=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2+y^2}+1}=\sqrt{2}.$$

因此，面积元素为:

$$dS=\sqrt{2}\,r\,dr\,d\theta.$$

被积函数为：

$$x+y+z=r\cos\theta+r\sin\theta+r=r(\cos\theta+\sin\theta+1).$$

将上述结果代入积分：

$$\iint_{(\Sigma)}(x+y+z)dS=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1 r(\cos\theta+\sin\theta+1)\,r\,dr\,d\theta.$$

先对 r 积分：

$$\int_0^1 r^2\,dr=\frac{1}{3}.$$

再对 θ 积分：

$$\int_0^{2\pi}(\cos\theta+\sin\theta+1)\,d\theta=2\pi.$$

因此，积分结果为：

$$\sqrt{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot 2\pi=\frac{2\sqrt{2}\pi}{3}.$$

□

3. 18π

解析. 采用极坐标参数化：

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta,\quad z=9-r^2,\quad 0\le r\le 3,\quad 0\le\theta\le 2\pi.$$

曲面的法向量为 $\nabla(z-9+x^2+y^2)=(2x,2y,1)$，其方向向上，与题目要求一致。曲面积分可以表示为：

$$\iint_{(\Sigma)}\frac{x^2ydydx+(e^x-xy^2)dzdx+(z^2+2)dxdy}{z+x^2+y^2}.$$

由于分母 $z+x^2+y^2=9$ 是常数，可以提取出来：

$$\frac{1}{9}\iint_{(\Sigma)}\left[x^2ydydx+(e^x-xy^2)dzdx+(z^2+2)dxdy\right].$$

最终结果为：18π □

4. $-\pi$

解析. 柱面方程可以表示为 $x^2+(y-1)^2=1$，参数化为：

$$x=\cos t,\quad y=1+\sin t,\quad z=y=1+\sin t,\quad 0\le t\le 2\pi.$$

将参数代入积分表达式：

$$\oint_{(\Gamma)} y^2 dx + xydy + xzdz.$$

计算每一项的微分：

$$dx = -\sin t\, dt, \quad dy = \cos t\, dt, \quad dz = \cos t\, dt.$$

代入后积分，最终结果为 $-\pi$。 □

5. $\frac{\pi^2}{8}$

解析. 计算傅里叶系数：

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \pi, \quad a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)dx = \frac{2((-1)^n - 1)}{\pi n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)dx = 0.$$

因此，傅里叶级数为：

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos((2n-1)x)}{(2n-1)^2}.$$

令 $x = 0$，得到：

$$0 = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

解得：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

□

6. 3

解析. 直线的参数方程为：

$$x = 3 - 2t, \quad y = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}t, \quad 0 \le t \le 1.$$

计算偏导数：

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1 + y^2 f(xy)}{y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y^2}[y^2 f(xy) - 1]\right).$$

验证后发现积分与路径无关。
选取路径无关的简化路径，最终结果为 3 □

四、

解析. 最大值为 3，最小值为-2。

解法一 由微分关系 $dz = 2x\,dx - 2y\,dy$ 可知，函数 z 可以表示为：

$$z = f(x,y) = x^2 - y^2 + C.$$

利用初始条件 $f(1,1) = 2$，解得常数 $C = 2$，因此：

$$z = f(x,y) = x^2 - y^2 + 2.$$

令偏导数为零：

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2y = 0,$$

解得驻点为 $(0,0)$。

在椭圆边界上的极值：

椭圆方程为 $x^2 + \frac{y^2}{4} = 1$，将 $y^2 = 4(1 - x^2)$ 代入 z 中：

$$z = x^2 - 4(1 - x^2) + 2 = 5x^2 - 2 \quad (-1 \le x \le 1).$$

其极值为：

$$\text{最大值：}\ z\big|_{x=\pm 1} = 3, \quad \text{最小值：}\ z\big|_{x=0} = -2.$$

计算 $f(0,0) = 2$，与边界极值比较后可得：

$$\text{最大值：}3, \text{最小值：} -2$$

解法二

设拉格朗日函数为：

$$L = x^2 - y^2 + 2 + \lambda\left(x^2 + \frac{y^2}{4} - 1\right).$$

求偏导并令其为零：

$$\begin{cases} L_x = 2x + 2\lambda x = 0, \\ L_y = -2y + \frac{\lambda}{2}y = 0, \\ x^2 + \frac{y^2}{4} - 1 = 0. \end{cases}$$

解得：

$$\lambda = -1 \ \Rightarrow\ x = \pm 1,\ y = 0; \quad \lambda = 4 \ \Rightarrow\ x = 0,\ y = \pm 2.$$

对应的极值点为 $(1,0)$、$(-1,0)$、$(0,2)$、$(0,-2)$，其函数值为：

$$f(1,0) = f(-1,0) = 3, \quad f(0,2) = f(0,-2) = -2.$$

结合驻点 $(0,0)$ 的函数值 $f(0,0)=2$，最终结果为：

$$\text{最大值：}3, \text{最小值：} -2.$$

□

五、

解析. 证明:

$$\begin{aligned}\iint_D \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{G}\,\mathrm{d}\sigma &= \iint_D \left[v\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)+u\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)\right]\mathrm{d}\sigma \\ &= \iint_D \left[vu'_x+uv'_x-\left(vu'_y+uv'_y\right)\right]\mathrm{d}\sigma \\ &= \iint_D \left[(uv)'_x-(uv)'_y\right]\mathrm{d}\sigma \\ &= \oint_L (uv)\mathrm{d}x+(uv)\mathrm{d}y \\ &= \int_L y\,\mathrm{d}x+y\,\mathrm{d}y \\ &= -\pi\end{aligned}$$

□

2023 年西安交通大学工科数学分析试题参考答案

一、单选题：本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。

1. 已知 $f(x,y)=e^{\sqrt{x^2+y^4}}$, 则 ( )

   A. $f_x(0,0)$ 存在, $f_y(0,0)$ 不存在　　B. $f_x(0,0)$ 不存在, $f_y(0,0)$ 存在

   C. $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 都不存在　　D. $f_x(0,0), f_y(0,0)$ 都存在

解答 B

$$\because f'_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{e^{\sqrt{(\Delta x)^2}}-1}{\Delta x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^{|\Delta x|}-1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$$

极限不存在, $\therefore$ 偏导数 $f'_x(0,0)$ 不存在.

同理:

$$\because f'_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{e^{\sqrt{(\Delta y)^4}}-1}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{e^{(\Delta y)^2}-1}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{(\Delta y)^2}{\Delta y}=0,$$

极限存在 $\therefore$ 偏导数 $f'_y(0,0)$ 存在.

故选 B

□

2. 设 Σ 为球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上半部分的上侧, 则下列结论不正确的是 ( )

   A. $\iint_\Sigma x^2 dy\wedge dz=0$　　B. $\iint_\Sigma x dy\wedge dz=0$

   C. $\iint_\Sigma y^2 dy\wedge dz=0$　　D. $\iint_\Sigma y dy\wedge dz=0$

解答 B

对于第二类面积分, 若曲面 Σ 关于 $x=0$ (即 yOz 坐标面) 对称, 则

$$\iint_\Sigma f(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\ \mathrm{d}z=\begin{cases}0, & \text{当} f(x,y,z) \text{ 关于} x \text{ 是偶函数}\\ 2\iint_{\Sigma:x\geqslant 0} f(x,y,z)\mathrm{d}y\wedge\ \mathrm{d}z, & \text{当} f(x,y,z) \text{ 关于} x \text{ 是奇函数}\end{cases}$$

曲面 Σ 关于 $x=0$ 对称, 而选项 A.C.D 中的被积函数 x^2, y^2, y, 关于 x 都是偶函数, 则其积分为零. (后两个函数不含 x，比如 $f(x,y)=y^2$, 则 $f(-x,y)=y^2=f(x,y)$ 是关于 x 的偶函数，被积函数 y 同理)

而 B 选项中的被积函数 x 为 x 的奇函数, 则

$$\iint_\Sigma x\ \mathrm{d}y\wedge\ \mathrm{d}z=2\iint_{\Sigma:x\geqslant 0} x\ \mathrm{d}y\wedge\ \mathrm{d}z>0$$

故选 B

□

3. 设常数 $a>0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$ 的敛散性为 ( )

   A. 绝对收敛　　B. 发散　　C. 条件收敛　　D. 敛散性与 a 有关

解答 C

此级数为交错级数，记 $a_n=\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$

由莱布尼兹准则: $a_{n+1}=\ln\left(1+\frac{a}{n+1}\right)<a_n=\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$ 且 $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=0$ 则该交错级数收敛, 又 $\because$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=a>0\quad(x\to 0,\ln(1+x)\sim x)$$

且 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 为调和级数发散

$\therefore$ 由正项级数比较准则 II 得 $a_n=\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)$ 发散 $\therefore$ 原交错级数条件收敛

故选 C □

回顾：定理 1.4 (比较准则 II)

设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 是两个正项级数, 并且 $\forall n\in\mathbf{N}_+,b_n>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda\text{ (有限正数或}+\infty\text{).}$$

(1) 若 $\lambda>0$, 则两个级数同时收敛或同时发散;

(2) 若 $\lambda=0$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛;

(3) 若 $\lambda=+\infty$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散.

4. 下列曲线的方向均为所围区域边界的正向, 则计算曲线积分 $\oint_{(C)}\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 时, 在下列曲线 (C) 所围区域上可直接使用格林公式的是 ( )

A. $x^2+y^2=1$

B. $(x-1)^2+y^2=1$

C. $3(x-1)^2+y^2=2$

D. $|x|+|y|=1$

解答 C

Green 公式

$$\iint_{(\sigma)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=\oint_{+L}P\ \mathrm{d}x+Q\ \mathrm{d}y$$

其中曲线 C 封闭、正向、P,Q 偏导数连续

若曲线积分 $\oint_L\frac{xdx+ydy}{x^2+y^2}$ 可使用格林公式, 则曲线 L 所围的区域内上不能包含点 $(0,0)$（被积函数在此点无定义）

而 ABD 曲线 L 所围的区域内有点 $(0,0)$, 而 C 中无点 $(0,0)$ 故格林公式在 C 选项的曲线上成立

故选 C □

5. 若幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-1)^n$ 在 x = −1 处收敛, 则此级数在 x = 2 处 ( )

A. 发散　　B. 敛散性不能确定　　C. 条件收敛　　D. 绝对收敛

解答 D

这是 $x_0 = 1$ 处的幂级数, 根据 Abel 第一定理知, 当 $|x-1| < |-1-1| = 2$ 时, 幂级数绝对收敛. 现在 $|2-1| = 1 < 2$, 该级数在 $x = 2$ 处绝对收敛.

故选 D □

回顾：定理 3.1 (Abel 定理) 对于幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$, 下列命题成立:

(1) 若它在点 $x_0 \neq 0$ 处收敛, 则当 $|x| < |x_0|$ 时, 该级数绝对收敛;

(2) 若它在点 $\tilde{x}_0 \neq 0$ 处发散, 则当 $|x| > |\tilde{x}_0|$ 时, 该级数发散.

二、填空题：本题共 5 小题，每小题 3 分，共 15 分。

6. 已知函数 $z = x^2y^3$, 则当 x = 2, y = −1, $\Delta x = 0.02$, $\Delta y = -0.01$ 时, 全微分 dz =

解答 -0.2

全微分: $dz = z'(x)dx + z'(y)dy$ 得:

$$dz = d\left(x^2y^3\right) = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy = 2xy^3\Delta x + 3x^2y^2\Delta y$$

$\therefore$ 当$x = 2, y = -1, \Delta x = 0.02, \Delta y = -0.01$时$dz = -4\Delta x + 12\Delta y = -0.08 - 0.12 = -0.2$

回顾：若求全增量 Δz, 方法:

根据公式

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y) \\ &= (2+0.02)^2 \times (-1-0.01)^3 - 2^2 \times (-1)^3 \\ &= 4.0804 \times (-1.0303) - 4 \\ &= 0.204 \end{aligned}$$

□

7. 函数 $u = (x-y)^2 + (z-x)^2 - 2(y-z)^2$ 在点 M(1, 2, 2) 的方向导数最大值 =

解答 $2\sqrt{6}$

由于

$$u_x|_M = 2\left[(x-y) - (z-x)\right]|_M = -4$$

$$u_y|_M = 2[-(x-y) - (y-z)]|_M = -2$$

$$u_z|_M = 2[(z-x) + 2(y-z)]|_M = 2,$$

得 u 在点 M 处的梯度为 (-4, −2, 2)

而在点 M 处, 当方向 e_l 与 $\mathbf{grad}u|_M$ 的方向相同时, 函数在这个方向的方向导数达到最大值, 即

$$\left.\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}\right|_M = |\mathbf{grad}u| = 2\sqrt{6}$$

□

8. 求二元函数的极限值 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{\sin xy}{x} =$

解答 1

原式 $= \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \frac{\sin(xy)}{xy} \cdot \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} y = \lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} \cdot 1 = 1.$

□

9. 曲线 $\begin{cases} x = e^t \\ y = e^{-t} \\ z = \sqrt{2}t \end{cases}$ 在 $\mathrm{t} = 0$ 处的切线方程为

解答 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$

空间曲线 $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$ 在 $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 处的切线方程是

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}$$

由题：

$$x(0) = 1, y(0) = 1, z(0) = 0$$

$$x'(0) = 1, y'(0) = -1, z'(0) = \sqrt{2}$$

故切线方程为

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{\sqrt{2}}$$

□

10. 改变二次积分的积分次序: $\int_1^2 dx \int_1^{x^2} f(x,y)dy =$

解答

题干为 x 型积分，转为 y 型积分得:

$$\int_1^2 dx \int_1^{x^2} f(x,y)dy = \int_1^4 dy \int_{\sqrt{y}}^2 f(x,y)dx$$

□

三、计算题：本题共 8 小题，每小题 7 分，共 42 分。

11. 已知函数 $z=f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个邻域内连续, 且 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}=-2$. 试讨论函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的可微性及是否取得极值.

解答 （0，0）点可微，取极大值

分析：由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}=-2$, 及 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处的连续性，得 $f(0,0)=0$.

$$f_x(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0-0}{\Delta x}=0$$

同理

$$f_y(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{0-0}{\Delta y}=0$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \lim_{p\to 0}\frac{\Delta f}{p}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-f_x\cdot\Delta x-f_y\cdot\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\\
&=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\\
&=\lim_{(\Delta x\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{\frac{1}{2}\left(\Delta x^2+\Delta y^2\right)}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\\
&=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{f(\Delta x,\Delta y)}{1-\cos\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\\
&=0
\end{aligned}$$

（等价无穷小，当 $x\to 0$ 时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$ ）$\therefore f(x,y)$ 在 (0,0) 点可微

下面证明可取到极值：由 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}=-2<0$, 及极限的保号性知: 存在 $(0,0)$ 点的某个去心邻域, 在此去心邻域内

$$\frac{f(x,y)}{1-\cos\sqrt{x^2+y^2}}<0$$

而 $1-\cos\sqrt{x^2+y^2}>0$, 则 $f(x,y)<0$ 又 $f(0,0)=0$,
由极值定义知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 取极大值

□

12. 设函数 $f(u,v)$ 具有连续的二阶偏导数, $z=f\left(x^2-y^2,e^{xy}\right)$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解答

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial z}{\partial x}=2xf_1'+y\mathrm{e}^{xy}f_2',\frac{\partial z}{\partial y}=-2yf_1'+x\mathrm{e}^{xy}f_2',\\
&\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-4xyf_{11}''+2\left(x^2-y^2\right)\mathrm{e}^{xy}f_{12}''+xy\mathrm{e}^{2xy}f_{22}''+\mathrm{e}^{xy}(1+xy)f_2'.
\end{aligned}$$

□

13. 在上半椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1(a>0,b>0,c>0,z\geqslant 0)$ 及 $z=0$ 所围成的封闭曲面内作一底面平行于 xOy 面, 且体积最大的内接长方体, 问这长方体的长、宽、高的尺寸怎样?

解答 $\dfrac{4\sqrt{3}abc}{9}$

分析：设此长方体其一个顶点为 (x,y,z) 其中 $(x>0,y>0,z>0)$, 则体积函数 $V=4xyz$ 在约束条件 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 下的极值 $(x>0,y>0,z\geqslant 0)$. 设拉格朗日函数

$$F=xyz+\lambda\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right),$$

令

$$\begin{cases} F_x=yz+2\lambda\cdot\dfrac{x}{a^2}=0,\\ F_y=xz+2\lambda\cdot\dfrac{y}{b^2}=0,\\ F_z=xy+2\lambda\cdot\dfrac{z}{c^2}=0,\\ F_\lambda=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}-1=0,\end{cases}$$

解得 $x=\dfrac{a}{\sqrt{3}},y=\dfrac{b}{\sqrt{3}},z=\dfrac{c}{\sqrt{3}}$, 故具有最大体积的长方体的长、宽、高分别为 $\dfrac{2a}{\sqrt{3}},\dfrac{2b}{\sqrt{3}},\dfrac{c}{\sqrt{3}}$, 且最大体积

$$V=\frac{4abc}{3\sqrt{3}}=\frac{4\sqrt{3}abc}{9}$$

. □

14. 计算 $\iint_\sigma \sqrt{xy}d\sigma$, 其中 (σ) 为由曲线 $\mathrm{xy=1,xy=2,y=x,y=4x(x>0,y>0)}$ 所围成的平面区域

解答 $\dfrac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\ln 2$

分析：本题采用积分变换, 令 $u=xy,\quad v=\dfrac{y}{x}$ 在此变换下 (σ) 的边界曲线映射成 uOv 直角坐标平面上的矩形域

$$(\sigma')=\{(u,v)\mid 1\leqslant u\leqslant 2,1\leqslant v\leqslant 4\}$$

解变换后的雅可比行列式：

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x\\ -\dfrac{y}{x^2} & \dfrac{1}{x}\end{vmatrix}=2\frac{y}{x},$$

从而

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=\frac{1}{2v},$$

于是：

$$\iint_{(\sigma)}\sqrt{xy}\,\mathrm{d}\sigma=\iint_{(\sigma')}\sqrt{u}\frac{1}{2v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v=\frac{1}{2}\int_1^4\frac{1}{v}\,\mathrm{d}v\int_1^2\sqrt{u}\,\mathrm{d}u=\frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1)\ln 2$$

回顾：二重积分的积分变换公式：

$$\iint_{(\sigma)} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_{(\sigma')} f[x(u,v),y(u,v)]\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\mathrm{d}\sigma'$$

□

15. 计算曲面积分 $\iint_{\Sigma} zdS$, 其中曲面 Σ 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 介于平面 z = 1 与平面 z = 2 之间的部分.

解答 $\frac{14}{3}\sqrt{2}\pi$

分析：令 z = 1 与 z = 2，得曲面 (S) 在 xOy 平面上的投影区域为

$$(\sigma)=\{(x,y)\mid 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\},$$

于是由公式

$$\iint_{(S)} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{(\sigma)} f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$$

可知

$$\begin{aligned}\iint_{(s)} z\ \mathrm{d}S &= \iint_{(\sigma)} \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{x^2+y^2}+\frac{y^2}{x^2+y^2}}\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y\\ &=\sqrt{2}\iint_{(\sigma)}\rho\cdot\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\theta=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2\rho^2\ \mathrm{d}\rho=\frac{14}{3}\sqrt{2}\pi.\end{aligned}$$

□

16. 计算曲线积分 $\int_L\left(y+\frac{e^y}{x}\right)dx+e^y\ln x dy$, 其中 L 为平面曲线 $x=1+\sqrt{2y-y^2}$ 上从点 $(1,0)$ 到点 $(2,1)$ 的一段有向弧段.

解答 $1+\mathrm{e}\ln 2-\frac{\pi}{4}$

分析：添加辅助线 $L_1: y=1, x:2\to 1, L_2: x=1, y:1\to 0$, 曲线 $L+L_1+L_2$ 为封闭曲线, 逆时针方向, 所围闭区域为 D. 由格林公式得

$$\oint_{L+L_1+L_2}\left(y+\frac{\mathrm{e}^y}{x}\right)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^y\ln x\ \mathrm{d}y=-\iint_D \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y=-S_D=-\frac{\pi}{4}.$$

$$\int_{L_1}\left(y+\frac{\mathrm{e}^y}{x}\right)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^y\ln x\ \mathrm{d}y=\int_2^1\left(1+\frac{\mathrm{e}}{x}\right)\mathrm{d}x=-1-\mathrm{e}\ln 2,$$

$$\int_{L_2}\left(y+\frac{\mathrm{e}^y}{x}\right)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^y\ln x\ \mathrm{d}y=\int_1^0\mathrm{e}^y\ln 1\ \mathrm{d}y=0,$$

$$\text{故}\ \int_L\left(y+\frac{\mathrm{e}^y}{x}\right)\mathrm{d}x+\mathrm{e}^y\ln x\ \mathrm{d}y=1+\mathrm{e}\ln 2-\frac{\pi}{4}.$$

□

17. 设 $f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x$, 试将 $f(x)$ 展开成 x 的幂级数.

解答 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}(-1<x<1)$

分析:$f(x)=\frac{1}{4}\ln\frac{1+x}{1-x}+\frac{1}{2}\arctan x-x=\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\arctan x-x,\quad -1<x<1.$

在区间 $(-1,1)$ 内, $(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}(-1<x<1).$

对该式两端从 0 到 x 同时积分并逐项积分得

$$\arctan x=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x t^{2n}\ \mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}(-1<x<1).$$

又 $\because \ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}(-1<x<1),\ln(1-x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}(-1<x<1),\therefore$

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{4}\ln(1+x)-\frac{1}{4}\ln(1-x)+\frac{1}{2}\arctan x-x\\&=\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}+\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}-x\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}-x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}-x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+1}}{4n+1}(-1<x<1).\end{aligned}$$

□

18. 将函数 $f(x)=2+|x|(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 展开成以 2 为周期的傅里叶级数, 并由此求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和.

解答 $f(x)=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}$, $\frac{\pi^2}{6}$

分析：由于 $f(x)=2+|x|\quad(-1\leqslant x\leqslant 1)$ 是偶函数, 故

$$\begin{aligned}&a_0=2\int_0^1(2+x)\mathrm{d}x=5,\\&a_n=2\int_0^1(2+x)\cos n\pi x\ \mathrm{d}x=2\int_0^1 x\cos n\pi x\ \mathrm{d}x=\frac{2\left[(-1)^n-1\right]}{n^2\pi^2},\quad n=1,2,\cdots,\\&b_n=0,\quad n=1,2,\cdots,\end{aligned}$$

即有

$$\begin{aligned}f(x)=2+|x|&\sim\frac{5}{2}+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{n^2\pi^2}\cos n\pi x\\&=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x}{(2k+1)^2}.\end{aligned}$$

由狄利克雷定理知该级数收敛于 $2+|x|,-1\leqslant x\leqslant 1$. 取 $x=0$, 有

$$2=\frac{5}{2}-\frac{4}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2},\ 即\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{\pi^2}{8},$$

所以, $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)^2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},$

从而 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{4}{3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{\pi^2}{8}=\frac{\pi^2}{6}$

□

四、(8 分) 设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$ 的上侧, 求以下的曲面积分值

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3dy\wedge dz+(y-1)^3dz\wedge dx+(z-1)dx\wedge dy$$

解答 -4π

分析：曲面 $z=x^2+y^2(z\leqslant 1)$ 由 $z=x^2$ 绕 z 轴旋转而得的抛物曲面

$\sum_0 : z=1\,(x^2+y^2\leqslant 1)$, 取下侧, 其中 $\sum$ 与 $\sum_0$ 围成的几何体为 Ω, 由高斯公式有

$$\iint_{\Sigma+\Sigma_0}(x-1)^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y-1)^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{\Omega}\left[3(x-1)^2+3(y-1)^2+1\right]\mathrm{d}v=-\iiint_{\Omega}\left[3\left(x^2+y^2\right)-6\,x-6\,y+7\right]\mathrm{d}v$$

$$=-\iint_{\Omega}\left[3\left(x^2+y^2\right)+7\right]\mathrm{d}v=-\int_0^1\mathrm{d}z\iint_{x^2+y^2\leqslant z}\left[3\left(x^2+y^2\right)+7\right]\mathrm{d}v$$

$$=-\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}}\left(3r^3+7r\right)\mathrm{d}r=-2\pi\int_0^1\left(\frac{3}{4}z^2+\frac{7}{2}z\right)\mathrm{d}z$$

$$=-2\pi\left(\frac{1}{4}+\frac{7}{4}\right)=-4\pi$$

而 $\displaystyle\iint_{\Sigma_0}(x-1)^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y-1)^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma_0}(z-1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0$

$\displaystyle\therefore I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(y-1)^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(z-1)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-4\pi.$

回顾：定理 8.4 高斯公式

设空间有界闭区域 (V) 由分片光滑的闭曲面 (S) 所围成, $A(P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z))\in C^{(1)}((V))$, 则

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}V=\iint P\ \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\ \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\ \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y,$$

其中 (S) 的法向量朝外.

□

五、(6 分) 讨论级数 $1-\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4^p}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{(2n)^p}+\cdots(p>0)$ **的敛散性.**

解答 当 $p=1$ 时, 级数条件收敛; 当 $p\neq 1$ 时, 级数发散.

分析:(1)当 $p=1$ 时, 原级数为

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots,$$

该级数为 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}(-1)^{n-1}$, 是交错级数

$\because$

$$a_{n+1}=\frac{1}{n+1}<a_n=\frac{1}{n}\text{ 且 }\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$$

$\therefore$ 由莱布尼兹公式得该级数收敛

又 $\because\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ 为调和级数, 发散 $\therefore$ 该级数条件收敛

(2)当 $p>1$ 时,

$$s_{2n}=\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\frac{1}{2^p}\left(1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}\right),$$

当 $n\to\infty$ 时, 前一括号 $\to+\infty$,($\because\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2n-1}=\int_1^{+\infty}\frac{1}{2n-1}=\left.\frac{\ln(2n-1)}{2}\right|_1^{+\infty}=+\infty$)

后一括号 $\to$ 定值 ($\because p>1,p$ 级数收敛, 即 $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^p}=\left.\frac{1}{-p+1}n^{-p+1}\right|_1^{+\infty}=\frac{1}{-p+1}$ 为定值)

故 $\lim_{n\to\infty}S_{2n}=+\infty$, 故级数发散.

(3)当 $p<1$ 时,

$$s_{2n+1}=1-\left(\frac{1}{2^p}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4^p}-\frac{1}{5}\right)-\cdots-\left(\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{2n+1}\right),$$

由于 $p<1$, 所以 s_{2n+1} 中 1 后各项均为负的. 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{2n+1}\right]$.

$\because$

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{(2n)^p}-\frac{1}{2n+1}\right]/\frac{1}{n^p}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)-(2n)^p}{(2n+1)2^p}=\frac{1}{2^p}>0$$

而 $\sum\frac{1}{n^p}(p<1)$ 发散,

故由比较准则 II,$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 是两个正项级数, 并且 $\forall n\in\mathbf{N}_+,b_n>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lambda\ (\text{有限正数或}+\infty\ ).$$

若 $\lambda>0$, 则两个级数同时收敛或同时发散得:原级数发散.

综上所述, 当 $p=1$ 时, 级数条件收敛; 当 $p\neq 1$ 时, 级数发散. □

回顾:

1. 定理 1.5 (积分准则)：

设 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 为一正项级数. 若存在一个单调减的非负连续函数 $f:[1,+\infty)\to(0,+\infty)$,

使 $f(n)=a_n$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 同时收敛或同时发散。

2.p 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性 $(p>0)$：

取 $f(x)=\frac{1}{x^p}(1\leqslant x<+\infty)$, 则 f 是定义在 $[1,+\infty)$ 上的非负连续的单调减函数.

由于 p 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\,\mathrm{d}x$ 得当 $p>1$ 时收敛, 当 $p\leqslant 1$ 时发散

2022年高数下期末答案

一.选择题

1. B
   题目中所给出的曲线是两个曲面$F(x,y,z)=x^2+y^2-z^2-1=0$和$G(x,y,z)=z-xy$的交线
   因而该曲线在某点处的切线，也能够看作是两个平面的切平面在该点处的交线。
   于是我们分别考虑两个曲面在$(2,1,1)$处的切平面：
   $F(x,y,z)$的切平面：

$$F_x(x-2)+F_y(y-1)+F_z(z-2)=0$$

   易知$F_x=2x=4, F_y=2y=2, F_z=-2z=-4$
   代入上式则有：

$$2x+y-2z=1$$

   同上过程我们也能得出$G(x,y,z)$在$(2,1,2)$处的切平面：

$$x+2y-z=2$$

   所以曲线C的切线方程可写成如下形式：

$$\begin{cases}2x+y-2z=1\\x+2y-z=2\end{cases}$$

2. B
   由题目可以知道椭圆的方程$2x^2+3y^2=4$，先求在椭圆条件约束下的极值。
   设：

$$F(x,y,\lambda)=xy^3-\lambda(2x^2+3y^2-4)$$

   分别对上式求x,y,λ的偏导：

$$\begin{cases}F_x=y^3-4\lambda x=0\\F_y=3xy^2-6\lambda y=0\\F_\lambda=2x^2+3y^2-4=0\end{cases}$$

   解以上方程有如下解：

$$\begin{cases}x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\\y=\pm 1\end{cases}$$

   易知在这四个点中，当选取$\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}\\y=1\end{cases}$时，$f(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$
   再求圆内的最大值，对于$f(x,y)$求其极值：

$$
\begin{cases} f_x = y^3 = 0 \\ f_y = 3xy^2 = 0 \end{cases}
$$

我们容易知道，在椭圆内只有极小值$f(0,0) = 0$

综上，函数$f(x,y) = xy^3$在椭圆域$2x^2 + 3y^2 \leq 4$ 上的最大值为$\frac{\sqrt{2}}{2}$

3. C

先来计算二重积分的值($\Omega : x^2 + y^2 \leq r^2$):

$$
\iint_{\Omega} \exp(x^2 + y^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{\Omega} \rho \exp(\rho^2) \mathrm{d}\rho \mathrm{d}\theta = \pi(\exp(r^2) - 1)
$$

将上式子代入题目的极限之中0：

$$
\lim_{r \to 0^+} \frac{1}{r^2} \iint_{\Omega} \exp(x^2 + y^2) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{r \to 0^+} \frac{\pi(\exp(r^2) - 1)}{r^2}
$$

易知上式的结果为π

4. A

为使用高斯公式，我们给该半球面补上$\Sigma_2 : z = 1$这个平面的下侧为底，所以该积分变为：

$$
\iiint_V (2y - 2y - 1) \mathrm{d}V - \iint_{\Sigma_2} 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{-2\pi}{3} - \pi = \frac{-5\pi}{3}
$$

即该积分的值为$\frac{-5\pi}{3}$

5. A

因为如题，该幂级数的收敛半径为2，所以当x取小于收敛半径时的值时，均有绝对收敛，于是题目所问可等价为$x = 1$时幂级数的收敛性，那么显然为绝对收敛。

二.填空题

1.函数 $u(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}}$ 的偏导数分别为：

对 x 求偏导：

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y}{z} x^{\frac{y}{z} - 1}
$$

对 y 求偏导：

$$
\frac{\partial u}{\partial y} = \ln(x) x^{\frac{y}{z}} \frac{1}{z}
$$

对 z 求偏导：

$$
\frac{\partial u}{\partial z} = -\ln(x) x^{\frac{y}{z}} \frac{y}{z^2}
$$

$$
\begin{aligned}
\nabla u(e,1,1) &= \left(\frac{y}{z} x^{\frac{y}{z} - 1}, \ln(x) x^{\frac{y}{z}} \frac{1}{z}, -\ln(x) x^{\frac{y}{z}} \frac{y}{z^2} \right) \\
&= \left(\frac{1}{1} e^{\frac{1}{1} - 1}, \ln(e) e^{\frac{1}{1}} \frac{1}{1}, -\ln(e) e^{\frac{1}{1}} \frac{1}{1^2} \right) = (1, e, -e)
\end{aligned}
$$

$$D_{\mathbf{l}}u=\nabla u(e,1,1)\cdot\frac{\mathbf{l}}{||\mathbf{l}||}=(1,e,-e)\cdot\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{2e}{3}+\frac{-2e}{3}=\frac{1}{3}-\frac{4e}{3}$$

2.

$$\iint_D(x+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D x\mathrm{d}y+\iint_D|y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

由于积分区域 D 关于 y 轴对称，而第一个二重积分的被积函数是的奇函数，因此

$$\iint_D(x+|y|)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D|y|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

又积分区域 D 关于轴对称,而第一个被积函数 1是偶函数,设 D_1 是 D 的第一象限部分,则

$$\iint_D(x+|y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=4\iint_{D_1}y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=4\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^{1-y}y\mathrm{d}x$$
$$=4\int_0^1 y(1-y)\mathrm{d}y=\frac{2}{3}$$

3.

$$\begin{cases}x=2\cos\theta\\y=2\sin\theta\end{cases},0\le\theta\le2\pi$$
$$\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}=\sqrt{(-2\sin\theta)^2+(2\cos\theta)^2}$$
$$=\sqrt{4\sin^2\theta+4\cos^2\theta}=\sqrt{4}=2$$

$$\int_L(2x^2-3y^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}[2(2\cos\theta)^2-3(2\sin\theta)^2]\sqrt{[x'(\theta)]^2+[y'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$$
$$=2\int_0^{2\pi}(8\cos^2\theta-12\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=10\sin2\theta|_0^{2\pi}-8\pi=-8\pi$$

4.

易知,该幂级数的收敛半径$R=1$,故收敛区间为$(-2,0)$

当z=0时,交错级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$收敛

当x =-2时,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散，所以收敛域为$(-2,0]$

5.

$$u_n=\frac{a^n}{n^b}$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}a(\frac{n}{n+1})^b=a$$

所以当$0<a<1$ 时，原级数收敛；当 $a>1$ 时，原级数发散；

当 $a=1$ 时，原级数成为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^b}$,
则当 $b>1$ 时，原级数收敛，当 $0<b\leq 1$ 时，原级数发散.

三、计算题

1.

$$f_x(x,y)=2x(2+y^2)=0, f_y(x,y)=2x^2y+\ln y+1=0$$
$$\text{驻点} x=0, y=\frac{1}{e}$$
$$f_{xx}=2(2+y^2), f_{xy}=2x^2+\frac{1}{y}, f_{xy}=4xy$$
$$f_{xx}|_{(0,\frac{1}{e})}=2(2+\frac{1}{e^2}), f_{xy}|_{(0,\frac{1}{c})}=0, f_{yy}|_{(0,\frac{1}{c})}=e$$
$$f_{xx}>0, AC-B^2=2(2+\frac{1}{e^2})e>0$$
$$\text{存在极小值} f(0,\frac{1}{e})=-\frac{1}{e}$$

2.
由积分区域，可以看出积分域为$z=\sqrt{x^2+y^2}$在0到1的第一卦限部分，采取柱坐标积分法，得到

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^z r^2\cos\theta e^{z^2}\,\mathrm{d}r\\&=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{z^3}{3}\cos\theta e^{z^2}\,\mathrm{d}\theta\\&=\int_0^1\frac{z^3}{3}e^{z^2}\,\mathrm{d}z=\int_0^1\frac{t}{6}e^t\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

3.

$$\int_C\frac{(x+y)dx+(y-x)dy}{x^2+y^2}\text{其中}\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{x^2-y^2-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

区域包含原点，作半径为r的M圆域

$$x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$$

$$\begin{aligned}&\int_C\frac{(x+y)dx+(y-x)dy}{x^2+y^2}\\&=\int_{C-M}\frac{(x+y)dx+(y-x)dy}{x^2+y^2}+\int_M\frac{(x+y)dx+(y-x)dy}{x^2+y^2}\\&=\iint_{(\sigma)}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma+\int_M\frac{(x+y)dx+(y-x)dy}{x^2+y^2}\\&=0+\int_0^{2\pi}\frac{-r^2\sin\theta(\sin\theta+\cos\theta)+r^2\cos\theta(\sin\theta-\cos\theta)}{r^2}d\theta=-2\pi\end{aligned}$$

4.

$$\int_2\int_y^2 dS=\int_y y^2\sqrt{1+(-1)^2+(-1)^2}dxdy=\sqrt{3}\int_0^2 y^2dxdy$$
$$D=\{(x,y)|x\geq 0,y\geq 0,x+y\leq 1\}$$
$$\text{原式}=\sqrt{3}\int_0^1 dy\int_0^{1-y}y^2dx=\sqrt{3}\int_0^1 y^2(1-y)dy=\frac{\sqrt{3}}{12}$$

5.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}(-1<x<1)$$
$$f(x)-f(0)=\int_0^x f'(t)dt=\int_0^{\infty}[\sum_{n=0}^{\infty}[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n e^{2n}]dt=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}$$
$$f(0)=\arctan 1=\frac{\pi}{4}$$
$$\frac{1+x}{1-x}=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}(-1\leq x<1)$$

6.
因为 f (x) 为偶函数.在一个周期内上连续，展开式为余弦级数.

$$a_0=\frac{2}{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{3}{2}}f(x)dx=\frac{4}{3}[\int_0^1 xdx+\int_1^{\frac{3}{2}}dx]=\frac{4}{3}$$
$$a_n=\frac{4}{3}[\int_0^1 x\cos\frac{2n\pi}{3}xdx+\int_1^{\frac{3}{2}}\cos\frac{2}{3}n\pi xdx]$$
$$=\frac{3}{n^2\pi}[\cos\frac{2n\pi}{3}-1]_2(n=1,2,\cdots)$$
$$f(x)=\frac{2}{3}+\frac{3}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(\cos\frac{2n\pi}{3}-1)\cos\frac{2n\pi}{3}x\quad(-\frac{3}{2}\leq x\leq\frac{3}{2})$$

$$S(x)=\begin{cases}1,(-\frac{3}{2}\leq x\leq -1)\\ -x,(-1<x<0)\\ x,(0\leq x<1)\\ 1,(1\leq x\leq\frac{3}{2})\end{cases}$$

$S(-2)=1,S(3)=0,S(\frac{9}{2})=1$

7.

$a_{2n}=\dfrac{3}{(2n)!},a_{2n+1}=\dfrac{1}{(2n+1)!},\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径为$+\infty$

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\quad S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}m_nx^{n-1}$$
$$S''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n$$

已知$a_n-(n+2)(n+1)a_{n+2}=0$
所以

$$S''(x)-S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}-a_n]x^n=0$$

解二阶常系数齐次线性微分方程得:

$$S(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$$
$$\begin{cases}S(0)=C_1+C_2=a_0=3\\ S''(0)=C_1-C_2=a_1=1\end{cases}$$

所以

$$S(x)=2e^x+e^{-x},x=(-\infty,+\infty)$$

四.

$$F(t)=\frac{\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\pi}\sin q dq\int_0^t f(r^2)r^2dr}{\int_0^{2\pi}f(r^2)rdr}=\frac{2\int_0^t f(r^2)r^2dr}{\int_0^t f(r^2)rdr}$$

$$\begin{aligned}F'(t)&=2\frac{f(t^2)t'f(r^2)rdr-f(t^2)f(f^2)r^2dr}{(\int_0^4 f(r^2)r^2)r^2dr}\\&=2\frac{f(t^2)t[\int_0^t f(r^2)r(t-r)dr]}{(\int_0^t f(r^2)rdr)^2}>0\end{aligned}$$

$F(t)$ 在区间$(0,\ +\infty)$ 内单调增加
五.

$$\text{由}\lim_{r\to+\infty}r(x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}-3)=1$$

可知

$$\lim_{r\to\infty}(\frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{r}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{z}{r}\frac{\partial f}{\partial z})=\frac{1}{r^2}+\frac{3}{r}$$

由Gauss，记

$$\begin{aligned}I&=\iiint\limits_{B(n)}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2})dxdydz\\&=\int\int\limits_{(S)}\frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{r}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{z}{r}\frac{\partial f}{\partial z}dS(\cos\alpha=\frac{x}{r},\cos\beta=\frac{y}{r},\cos\gamma=\frac{z}{r})\end{aligned}$$

于是

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{(S)}\frac{x}{r}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{y}{r}\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{z}{r}\frac{\partial f}{\partial z}dS\\
&=\lim_{n\to\infty}\iint\limits_{(S)}\frac{1}{r^2}+\frac{3}{r}dS\\
&=(\frac{1}{r^2}+\frac{3}{r})\pi r^2\\
&=\pi(3n+1)\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{A_n}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{\pi(3n+1)}
\end{aligned}
$$

由莱布尼兹准则易证其条件收敛

2021 高数下期末答案

一、填空题

1. $-x+y+z-\dfrac{\pi}{6}=0$.

令 $F(x,y,z)=\sin^2 x+\cos(y+z)-\dfrac{3}{4}$，则 $\nabla F=(2\cos x\sin x,-\sin(y+z),-\sin(y+z))^{\top}$，于是 $\nabla F\Big|_{\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{3},0\right)}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}(-1,1,1)$。由平面点法式方程得 $-(x-\dfrac{\pi}{6})+(y-\dfrac{\pi}{3})+z=0$，化简可得答案。

2. $R=1$.

因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，由级数收敛的必要条件，有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n+\dfrac{1}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}=1$。

3. $u=x^2+e^x\sin y+2$.

$\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+e^x\sin y$，作偏积分 $u=x^2+e^x\sin y+f(y)$，则 $u_y=e^x\cos y+f'(y)$，对比 **grand**u 的值可得 $f'(y)=0\Rightarrow f(y)=\mathrm{C}$，代入 $u(0,\pi)=2$ 可得 $\mathrm{C}=2$。

4. $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi^3$.

$ds=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\cdot dt=2\sqrt{2}dt$，代入积分式有 $I=\int_0^{\pi}\dfrac{4t^2\cdot 2\sqrt{2}}{4}dt=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\pi^3$.

5. $\dfrac{5}{4}$.

由 Dirichlet 定理，且 $\dfrac{1}{2}$ 是 f 的连续点，则 $S\left(-\dfrac{15}{2}\right)=S\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{5}{4}$.

二、选择题

1. **B**

$\lim\limits_{(x,y)\xrightarrow{x=k^2y}(0,0)}f(x,y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2ky^4}{(k^2+1)y^4}=\dfrac{2k}{k^2+1}$ 随 k 的取值变化，故 $f(x)$ 不连续，即 $f(x)$ 不可微。当 $x=0$ 时，$f(x,y)\equiv0$，故 $f_y=0$；同理 $f_x=0$，故 $f(x,y)$ 在原点偏导数存在。$\dfrac{\partial f}{\partial \vec{e_l}}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x,kx)-f(0,0)}{\sqrt{1+k^2}}$

$=\dfrac{k^2}{\sqrt{1+k^2}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{1+k^4x}=0$，故 $f(x,y)$ 沿各个方向导数均存在。

2. **A**

令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=z$，则积分域可表示为 $r\in(0,1),\theta\in(0,2\pi),z\in(0,\sqrt{4-r^2})$，故 $V=\iiint\limits_{\Omega}dV$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r\int_0^{\sqrt{4-r^2}}\mathrm{d}z=4\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\sqrt{4-r^2}\mathrm{d}r\,.$$

3. **D**

注意当曲面Σ按Oyz或Oxz分成两片时解出的x或y相差一个符号，由于前侧和后侧的不同，在投影域上的二重积分也相差一个符号。对于被积函数时x^2或y^2，代入后相同，故只相差一个符号，则积分为0，对于x带入后则不为0。

4. **B**

积分域可以表示为$y\in\left(\frac{1}{2},1\right),x\in\left(\frac{1}{y},2\right)$，故$I=\int_{1/2}^1 y\mathrm{d}y\int_{1/y}^2 \mathrm{e}^{xy}\mathrm{d}x=\int_{1/2}^1\left(\mathrm{e}^{2y}-\mathrm{e}\right)\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-\mathrm{e}$。

5. **C**

A. $a_n=\frac{1}{n^2}$时，$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，且$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$存在，但$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$；B. 取$a_n=\begin{cases}\frac{1}{n^2}, & n\text{为奇数}\\ \frac{1}{n}, & n\text{为偶数}\end{cases}$，$a_n$发散，但存在$a_n<\frac{1}{n}$的情况；C. $|a_n|=\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-\sin\frac{1}{\sqrt{n}}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{n}}-\left[\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3\right]+o\left[\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3\right]\right|$，$n\to+\infty$时，$|a_n|\sim\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^3$，由$p$级数收敛性质可知，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$收敛，则原级数绝对收敛；D. 级数绝对收敛时才满足交换次序和不变。

三、计算题

1. $\frac{\partial f}{\partial x}=yf_1+\frac{1}{y}f_2$，$\frac{\partial f}{\partial y}=xf_1+\frac{x}{y^2}f_2$，$\frac{\partial z}{\partial x}=f+x\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=f+xyf_1+\frac{x}{y}f_2$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=xf_1-\frac{x}{y^2}f_2+x\left[f_1+y\left(xf_{11}-\frac{x}{y^2}f_{12}\right)\right]+\frac{x}{y^2}\left(x_y f_{21}-\frac{x}{y}f_{22}-f_2\right)=2xf_1-\frac{2x}{y^2}f_2+x^2yf_{11}-\frac{x^3}{y^3}f_{22}$$

2. 令$x=r\cos\theta,y=r\sin\theta,z=r$，易知$\|r_\theta\times r_r\|=\sqrt{2}r$，故$\mathrm{d}S=\sqrt{2}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}r$，则$I=\iint(r\cos\theta)r^2\sqrt{2}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\mathrm{d}\theta\int_0^{2a\cos\theta}\sqrt{2}r^3\cos\theta\mathrm{d}r=\int_{-\pi/2}^{\pi/2}4\sqrt{2}a^4\cos^5\theta\mathrm{d}\theta=\frac{64}{15}\sqrt{2}a^4\,。$$

3. $z_x=x^2-y,z_y=-x+y-2,z_{xx}=2x,z_{xy}=-1,z_{yy}=1$，令$z_{x_0}=z_{y_0}=0$，得$(x_0,y_0)=(2,4)$或$(-1,1)$。

(1) $(x_0,y_0)=(2,4)$时，在$(2,4)$点的Hesse矩阵为$\begin{bmatrix}4 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，$AC-B^2>0$且$A>0$，故$(2,4)$为极小值点，极小值为$z(2,4)=-\frac{16}{3}$；

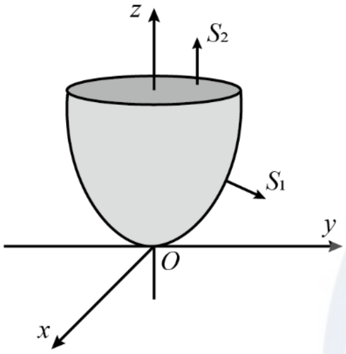
(2) $(x_0,y_0)=(-1,1)$ 时，$z(x,y)$ 在 $(-1,1)$ 点的 Hesse 矩阵为 $\begin{bmatrix}-2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，$AC-B^2<0$，故 $(-1,1)$ 不是极值点.

4.

$$I=\oint_{C\cup\overline{OA}}\vec{A}\cdot d\vec{S}+\int_{\overline{AO}}\vec{A}\cdot d\vec{S}\overset{\text{Green}}{=\!=}\iint\left(-\frac{\partial\left(\sqrt{x^2-y^2}\right)}{\partial y}+\frac{\partial\left[2x+y\cdot\ln\left(x+\sqrt{x^2+y^2}\right)\right]}{\partial x}\right)d\delta+\int_{\overline{AO}}\vec{A}\cdot d\vec{S}=2\int_0^{\pi}dx\int_0^{x\sin x}dy$$

$$+\int_{\pi}^{0}x\,dx=2\pi-\frac{\pi^2}{2}。$$

5. 补出如图所示的平面，方向向上。



$$I=\iint_{S_1\cup S_2}\vec{A}\cdot d\vec{S}-\iint_{S_2}\vec{A}\cdot d\vec{S}\overset{\text{Gauss}}{=\!=}\iiint_V 3z^2dV+\iint_{S_2}dxdy$$，令 $x=\rho\cos\theta, y=\rho\sin\theta, z=z$，则

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 3z^2dz\int_0^{\sqrt{z}}\rho d\rho+\pi=\frac{7}{4}\pi。$$

6. (1) $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots, x\in(-1,1]$；

$$\frac{\ln(1+x)}{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}+\cdots, x\in(-1,0)\cup(0,1]。$$

(2) $\int\frac{\ln(1+x)}{x}=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x(-1)^{n-1}\frac{x^{n-1}}{n}dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{12}$。

五、将 $f(x)$ 偶延拓，$f(x)=\begin{cases}-2x-\pi, & x\in(-\pi,-\pi/2)\\ 0, & x\in(-\pi/2,\pi/2)\\ 2x+\pi, & x\in(\pi/2,\pi)\end{cases}$，$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{\pi}{2}$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cdot\cos(nx)dx=\frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^{\pi}(2x-\pi)\cdot\cos(nx)dx=\frac{4}{n^2\pi}\left(\cos\pi n-\cos\frac{\pi}{2}n\right),$$

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2\pi}(\cos\pi n-\cos\frac{\pi}{2})\cdot\cos n\pi$$

六、$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2-1}{(n+1)^2-1}=1$，故收敛半径 $R=1$，收敛区间为 $(-1,1)$， $x=\pm1$ 时也收敛，则收敛域为 $[-1,1]$。

$S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^2-1}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}\right)x^n$， 其中 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n-1}=x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n+1}=\frac{1}{x}\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{x^n}{n^3}(x\neq0)$。

设 $g(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$， 则 $g'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{x-1}(|x|<1)$， $g(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}\mathrm{d}t=-\ln(1-x)$， 而 $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}=g(x)-x-\frac{x^2}{2}=-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}$， $S(x)=\frac{x}{2}[-\ln(1-x)]-\frac{1}{2x}\left[-\ln(1-x)-x-\frac{x^2}{2}\right]=\frac{2+x}{4}+\frac{\ln(1-x)}{2x}(1-x^2)$，此时 $|x|<1$ 且 $x\neq0$， 且 $x=0,S(0)=0$， 则 $S(x)=\begin{cases}\frac{2+x}{4}+\frac{\ln(1-x)}{2x}(1-x^2), & |x|<1\text{且}x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$。 令 $x=\frac{1}{2}$，

$S(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-1}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\ln2$。

七、$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)\mathrm{e}^{2x-y}\Rightarrow f(x,y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+f(y)$， $f(0,y)=f(y)=y+1\Rightarrow f(x,y)=x\mathrm{e}^{2x-y}+y+1$，由全微分，$I=\int_{L_t}\mathrm{d}\left(f(x,y)\right)=f(1,t)-f(0,0)=\mathrm{e}^{2-t}+t$，$I'(t)=1-\mathrm{e}^{2-t}$，令 $I'(t)=0\Rightarrow t=2$，易证 $t=2$ 是 $I(t)$ 的极小值点，极小值为 $I(2)=3$。

八

函数 $f(x)$ 连续且单调增加 $\Rightarrow f(n-1)\leq\int_{n-1}^{n}f(x)\,\mathrm{d}x\leq f(n)$

所以有 $0\leq f(n)-\int_{n-1}^{n}f(x)\,\mathrm{d}x\leq f(n)-f(n-1)$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$ 的部分和

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}[f(k)-f(k-1)]=f(n)-f(0)$

又 $f(x)$ 单调增加且有上界 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 存在

于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n)-f(n-1)]$ 收敛

由正向级数的比较准则知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[f(n)-\int_{n-1}^{n}f(x)\,\mathrm{d}x]$

2020 高数下期末答案

一、选择题

1. **A**

两个偏导数连续$\Rightarrow$可微$\Rightarrow$连续。

2. **C**

积分域为第一象限内与 x 轴正方向夹角为 $\dfrac{\pi}{4}$ 的圆弧，易化为 $\int_0^{\sqrt{2}/2}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)\mathrm{d}x$。

3. **D**

设 $x=a\cos t, y=a\sin t(0\le t\le 2\pi)$，则 $\oint_L \dfrac{(x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_0^{2\pi}\dfrac{1}{a^2}[a^2(\sin t+\cos t)(-\sin t)-a^2(\cos t$

$-\sin t)\cos t]\mathrm{d}t=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}t=-2\pi$。

4. **D**

$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}u_{n+1}$ 收敛，可知 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}(u_n-u_{n+1})$ 收敛。

5. **B**

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}，\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-x\cos nx\mathrm{d}x=\begin{cases}-\dfrac{2}{n^2-\pi}, & n\text{为奇数}\\ 0, & n\text{为偶数}\end{cases},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}-x\sin nx\mathrm{d}x=\begin{cases}-\dfrac{1}{n}, & n\text{为奇数}\\ \dfrac{1}{n}, & n\text{为偶数}\end{cases},$$

$f(x)=\dfrac{\pi}{4}-\left(\dfrac{2}{\pi}\cos x-\sin x\right)+\dfrac{\sin 2x}{2}-\left(\dfrac{2}{3^2\pi}\cos 3x-\dfrac{1}{3}\sin 3x\right)-\cdots$，$x=-\pi$时，傅里叶级数收敛于

$\dfrac{1}{2}[f(-\pi-0)+f(\pi-0)]=\dfrac{\pi}{2}$。

二、填空题

1. $\dfrac{\pi}{2}$. 法向量 $\vec{n}$ 为 $\left(1,f'(y-z),-1-f'(y-z)\right)$，$\vec{n}\cdot(1,1,1)=0$，夹角为 $\dfrac{\pi}{2}$。

2. $-\ln(\cos 1)$. 交换积分次序，$I=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{\tan x}{x}\mathrm{d}y=\int_0^1\tan x\mathrm{d}x=-\ln(\cos x)\Big|_0^1=-\ln(\cos 1)$。

3. 4π. 补上 xOy 平面上的圆面 $S:x^2+y^2\le 4$，法线方向向下。使用 Gauss 公式，得

$$I=\iint_{\Sigma}+\iint_{S\text{下}}+\iint_{S\text{上}}=\iiint_V y\mathrm{d}V+\iint_{S\text{上}}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2\rho^3\cos^2\theta\mathrm{d}\rho=4\pi。$$

4. 8. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=-\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=2-5=-3$，故有 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n}=5+3=8$。

5. $x^4e^{x^3}$. $e^{x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{3n},x^4e^{x^3}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{3n+4}$。

三、计算题

1. $\varphi_1\cdot 2x\mathrm{d}x+\varphi_2\mathrm{e}^y\cos x\mathrm{d}x+\varphi_3\mathrm{d}z=0$，$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{2x\varphi_1+\varphi_2\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{\varphi_3}$，$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=f_1+f_2\cos x-\frac{2x\varphi_1+\varphi_2\mathrm{e}^{\sin x}\cos x}{\varphi_3}f_3$。

2. 令 $\begin{cases}f_x=2x-2xy^2=0\\ f_y=4y-2x^2y=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ y=0\end{cases}$ 或 $\begin{cases}x=\pm\sqrt{2}\\ y=\pm 1\end{cases}$，在 D 内的驻点有 $M_1(0,0),M_2(\sqrt{2},1),M_3(-\sqrt{2},1)$，

$f(M_1)=0,f(M_2)=f(M_3)=2$。

(1) 在边界 $y=0,-2\le x\le 2$ 上，$f(x,y)=x^2$，最小值 0，最大值 4；

(2) 在边界 $x^2+y^2=4,y\ge 0$ 上，$f(x,y)=y^4-3y^2+4$，最小值 $\frac{7}{4}$，最大 8。

3. 两端求微分，得 $\begin{cases}2x\mathrm{d}x+2y\mathrm{d}y+2z\mathrm{d}z=0\\ \mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=0\end{cases}$，代入 $(1,-2,1)$ 得 $\begin{cases}\mathrm{d}x-2\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=0\\ \mathrm{d}x+\mathrm{d}y+\mathrm{d}z=0\end{cases}$，易求得一组非零解为

$(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)\Big|_{P_0}=\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ 是所求单位切向量。

$\nabla f\big|_{(0,1,2)}=\frac{2}{x^2+y^2+z^2}(x,y,z)\big|_{(0,1,2)}=\left(0,\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$，$\frac{\partial f(0,1,2)}{\partial\vec{n}}=\left\langle\nabla f\big|_{(0,1,2)},\vec{n}\right\rangle=\frac{2\sqrt{2}}{5}$。

4. 在 xOy 平面投影区域 $(\sigma)=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 1\}$，$V=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\mathrm{d}\rho\int_{\rho}^{2-\rho^2}\rho\,\mathrm{d}z=2\pi\int_0^1(2\rho-\rho^3-\rho^2)\mathrm{d}\rho=\frac{5}{6}\pi$。

(1) 对 $z=\sqrt{x^2+y^2},z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{2}$，$S_1=\iint\limits_{(\sigma)}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}\sigma=\sqrt{2}\pi$；

(2) 对 $z=2-x^2-y^2,z_x=-2x,z_y=-2y$，$\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}=\sqrt{1+4x^2+4y^2}$，$S_2=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\sqrt{1+4\rho^2}\rho\mathrm{d}\rho$

$=\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\pi$。

表面积 $S=S_1+S_2=\left(\sqrt{2}+\frac{5\sqrt{5}-1}{6}\right)\pi$。

5. $\frac{\partial P}{\partial y}=6xy^2-2y\cos x=\frac{\partial Q}{\partial x}$，积分与路径无关。用折线 $(0,0)\to\left(\frac{\pi}{2}\right)\to\left(\frac{\pi}{2},0\right)\to\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 代替弧线，得

$I=\int_0^{\pi/2}0\cdot\mathrm{d}x+\int_0^1\left(1-2y+\frac{3}{4}\pi^2y^2\right)\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{4}$。

6. 由 Gauss 公式，$0=\iiint\limits_{(V)}\left[f(x)+xf'(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}\right]\mathrm{d}V$。由$V$任意，知 $f(x)+xf'(x)-xf(x)-\mathrm{e}^{2x}=0$，

解得 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}(\mathrm{e}^x+\mathrm{C})$，由于 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，得 $\mathrm{C}=-1$，故 $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^x}{x}$。

7. 由奇偶性，知 $\iiint\limits_{(V)}\left(\dfrac{2xy}{ab}+\dfrac{2yz}{bc}+\dfrac{2xz}{ac}\right)\mathrm{d}V=0$，故 $I=\iiint\limits_{(V)}\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}V$，由对称性，得

$$I=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\iiint\limits_{(V)}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}V=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^R r^4\mathrm{d}r=\frac{4\pi}{15}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)R^5。$$

四、

解: $\arctan x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},x\in[-1,1]$,

$$\frac{1+x^2}{x}\arctan\left(1+x^2\right)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+2}}{2n+1}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n+1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{2n-1}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{2n-1}\right)x^{2n}$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{1-4n^2}x^{2n},x\in[-1,0)\cup(0,1].$$

但 $x=0$ 时, 上述右边的级数收敛于 $1=f(0)$, 故

$$f(x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2}{1-4n^2}x^{2n},x\in[-1,1].\quad\therefore\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}=\frac{1}{2}[f(1)-1]=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}.$$

五、两次分部积分，$a_n=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x=\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\dfrac{1}{n}f(x)\mathrm{d}(\sin nx)=-\dfrac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\dfrac{f'(x)}{n}\sin nx\mathrm{d}x$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{f'(0)}{n^2}+\frac{f'(\pi)}{n^2}\cos n\pi-\int_0^{\pi}\frac{f''(x)}{n^2}\cos nx\mathrm{d}x\right]。$$

$f''(x)$**连续，故在**$[-\pi,\pi]$**上有界，**$|a_n|\le\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{2}{\pi}\left[|f'(0)|+|f'(\pi)\cos n\pi|+\pi|f''(x)|_{\max}\right]=\mathrm{C}\cdot\dfrac{1}{n^2}$，

C 为一正的常数。

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{C}\cdot\dfrac{1}{n^2}$**收敛**$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$**收敛**$\Rightarrow\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n$**绝对收敛**

2019 年高等数学下册期末试题答案

一、填空题

1. $\frac{10}{3}$

详解: 函数在某方向的方向导数为函数在该点的梯度向量在该方向的投影,取该方向的单位向量 $\vec{e}=(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3})$,梯度向量 $=(2y,2x,-2z)|_{(2,-1,1)}=(-2,4,-2)$,故方向导数为 $=\frac{1}{3}\times(-2)+\frac{2}{3}\times 4+\left(-\frac{2}{3}\right)\times(-2)=\frac{10}{3}$。

2. $(-3,1)$

详解: $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2\ln n}{\ln(n+1)}=2$, 故 $x+1\in(-2,2)$ 解得收敛域为 $(-3,1)$。

3. $4x+2y-z-6=0$

详解: 根据曲面的方程可知在 M_0 处法向量为 $(4,2,-1)$,故切平面的法向量为 $(4,2,-1)$,进而求得切平面方程为 $4(x-2)+2(y-1)-(z-4)=0$

4. $\frac{3}{8}\left(e^4-1\right)$

详解: 记积分的直线段为 $(t,2t,2t)(0\le t\le 1)$ 则对应的曲线积分转化为 $\int_0^1 te^{2t\cdot 2t}\sqrt{1^2+2^2+2^2}dt=\frac{3}{8}\left(e^4-1\right)$

5. $\frac{3}{4}$

详解: 由 $f(x)$ 展开的 Fourier 级数的形式可以看出采用的偶延拓的方式,故延拓函数 $F(x)$ 的周期为 2,且易得该函数在点 $x=-\frac{1}{2}$ 处间断,由 Dirichlet 定理:

$$S\left(-\frac{5}{2}\right)=S\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(F\left(-\frac{1}{2}-0\right)+F\left(-\frac{1}{2}+0\right)\right)=\frac{3}{4}$$

二、计算题

1. 解:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}&=f_x+f_z\frac{\partial z}{\partial x}=f_x+f_z\cdot e^x\sin y\\ \frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}&=f_{xy}+f_{xz}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}+\left(f_{zy}+f_{zz}\frac{\partial z}{\partial y}\right)e^x\sin y+f_ze^x\cos y\\ &=f_{xy}+f_{xz}e^x\cos y+f_ze^x\cos y+e^x\sin y\left(f_{zy}f_{zy}+f_{zz}\cdot e^x\cos y\right)\end{aligned}$$

2. 解: 根据交线的方程可以设交线的参数方程为 $\begin{cases} x = \cos t \\ y = 1 + \sin t \\ z = 3 - \sin t \end{cases}, t \in (0, 2\pi)$

$$\begin{aligned}
\int_C -y^2\,\mathrm{d}x + xdy + z^2\,\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} \left[-(1+\sin t)^2(-\sin t) + \cos t \cdot \cos t + (3-\sin t)^2(-\cos t)\right] \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin^3 t + 2\sin^2 t + \sin t + \cos^2 t - 9\cos t + 6\sin t\cos t - \sin^2 t\cos t\right) \mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\sin^3 t + \cos^3 t + \sin^2 t + \sin t - 10\cos t + 6\sin t\cos t + 1\right) \mathrm{d}t \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$

除了通过引入 t 直接对线积分进行转换以外，也可以通过 Stokes 公式将线积分转换为面积分来求解，具体求解过程如下所示：

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\Sigma_{上}} (1+2y)\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\
&= \iint_{x^2+y^2 \le 2y} (1+2y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{\pi} d\varphi \int_0^{2\sin\varphi} (1+2\rho\sin\varphi)\rho d\rho \\
&= 3\pi
\end{aligned}$$

3. 解:Σ 在 xOy 平面上的投影为 $D_{xy} = \left\{(x,y) | x^2 + y^2 \le 4\right\}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, dS = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

题目中所求积分为:

$$\begin{aligned}
\iiint_{\Sigma} \left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}S &= \iiint_{D_{xy}} \sqrt{2}\left(x^2+y^2\right)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \sqrt{2}\int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \rho^3\,\mathrm{d}\rho \\
&= 8\sqrt{2}\pi
\end{aligned}$$

三、计算题

1. 解:Ω 是旋转抛物面圆锥面的所围成的闭区域, 在 xOy 平面的投影域为 $\begin{cases} x^2 + y^2 \le 1 \\ z = 1 \end{cases}$。观察方程的形式，这

里采取“先单后重”的积分方式:

$$
\begin{aligned}
V = \iiint_{\Omega} dV &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho \,\mathrm{d}\rho \int_{\rho^2}^{1-\rho} \mathrm{d}z = \\
&= 2\pi \int_0^1 \left(2-\rho-\rho^2\right) \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{5}{6}\pi
\end{aligned}
$$

2. 解:

$$
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+1)x^{2n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x^{2n+1}\right)'}{n!} = \left(x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(x^2\right)^n}{n!}\right)' = \left(xe^{x^2}\right)' = \left(1+2x^2\right) e^{x^2}
$$

又 $\because R = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \to \infty$

故上述级数的收敛域为 $(-\infty, \infty)$, 该幂级数的和函数为 $S(x) = \left(1+2x^2\right) e^{x^2}$ $(x \in (-\infty, \infty))$

3. 解:$\iiint\limits_{\Omega} 2\sin y \,\mathrm{d}V$ 的积分函数是关于 y 的奇函数，积分域 Ω 关于 xOz 平面对称，由对称性可得 $\iiint\limits_{\Omega} 2\sin y \,\mathrm{d}V = 0$。

$$
\begin{aligned}
\iiint_{\Omega} z dV &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{2\cos\varphi} r^3 \cos\varphi \sin\varphi dr \\
&= 8\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^5\varphi \sin\varphi \mathrm{d}\varphi \\
&= \frac{8}{6}\pi \left(-\cos^6\varphi\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} \\
&= \frac{7\pi}{6}
\end{aligned}
$$

四、解答题

1. 解：记 $P(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ $\quad Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, 由 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ 故曲线积分的值与路径无关，考虑到积分函数的分母，这里取路径：$x = \pi\cos t, y = \pi\sin t, t$ 从 π 到 0

$$
\int_L \frac{-ydx + xdy}{x^2+y^2} = \frac{1}{\pi^2} \int_{\pi}^{0} [-\pi\sin t(-\pi\sin t) + \pi\cos t(\pi\sin t)]dt = -\pi
$$

2. 解：椭圆上一点 $\mathrm{P}(x_0, y_0, 0)$ 到点 M 距离的平方 $d^2 = x^2+y^2+4$，点 P 的坐标满足 $5x_0 - 6x_0y_0 + 5y_0^2 = 4$。
问题转化为函数的有约束极值问题: 取 $F(x,y,\lambda) = x^2+y^2+4+\lambda\left(5x^2-6xy+5y^2-4\right)$

令 $\begin{cases} F_x = 2x + 10\pi x - 6\lambda y = 0 \\ F_y = 2y + 10\pi y - 6\pi x = 0 \\ F_\lambda = 5x^2 - 6xy + 5y^2 - 4 = 0 \end{cases}$

解得：$M_1(1,1,0), M_2(-1,-1,0), M_3(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 0), M_4(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0)$。

$$
d|_{M_1} = d|_{M_2} = \sqrt{6}, d|_{M_3} = d|_{M_4} = \frac{3\sqrt{2}}{2}
$$

故椭圆上的点到 M 的最长距离为 $\sqrt{6}$, 最短距离为 $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

3. 解：向量场通过曲面的通量可通过第二型面积分计算。针对本题可将面积分写成坐标形式，然后借助高斯公式求解。

通量 $\Phi=\iint\limits_{\Sigma}(2x+z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$，作有向曲面 $\Sigma_1: z=1(x^2+y^2\leq 1)$，并取上侧，设曲面 Σ 和 Σ_1 所围成的闭区域为 Ω，

记 $D_{xy}=\left\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\right\}$, 由高斯公式, 得：

$$\begin{aligned}
\Phi&=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}(2x+z)\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y^2\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\
&=\iiint\limits_{\Omega}(3+2y)\mathrm{d}V-\iint\limits_{\Sigma_1}z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\iiint\limits_{\Omega}3\,\mathrm{d}V-\iint\limits_{\Sigma_1}z\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\\
&=3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1\rho\mathrm{d}\rho\int_{\rho^2}^1\mathrm{d}z-\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=6\pi\int_0^1\rho\left(1-\rho^2\right)\mathrm{d}\rho-\pi=\frac{3\pi}{2}-\pi=\frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

4. 解: 考虑到 $f(x)$ 在对应区间上是奇函数，所以将函数展开成傅里叶级数后的 $a_n=0(n=0,1,2,\cdots)$，

$$\begin{aligned}
b_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2}{2n-1}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)x-\frac{2}{2n+1}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x\right]_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n-1}8n}{(4n^2-1)\pi},
\end{aligned}$$

当 $x=\pm\pi, S(\pm\pi)=0$, 故 $f(x)=\dfrac{8}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n-1}}{4n^2-1}\sin nx(-\pi<x<\pi)$

五、

解: 观察所求级数的和，我们希望得到类似 $\sum\dfrac{x^n}{n(n-1)}$ 的级数求和形式，因为观察到 n 在分母上，因此应该考虑先求导再做积分:

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,x\in(-1,1]$$

$$f'(x)=1+\ln(1+x)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n,x\in(-1,1]$$

又 $\because f(0)=0$

$$\therefore f(x)=f(0)+\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t=x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}x^{n+1}=x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}x^n,x\in(-1,1].$$

且 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(n-1)}=f(1)-1=2\ln 2-1.$

六、

证明：由格林公式, 得

$$I=\oint_L xe^{\sin y}\,\mathrm{d}y-ye^{-\sin x}\,\mathrm{d}x=\iint_D\left(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

D 关于直线 $y=x$ 对称, 由轮换对称性,

$$\iint_D e^{\sin y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D e^{\sin x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

于是 $I=\iint_D\left(\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_0^\pi\mathrm{d}y\int_0^\pi\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x.$

由于 $f(u)=\mathrm{e}^u+\mathrm{e}^{-u}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2}{(2n)!}x^{2n}\geq 2\left(1+\frac{1}{2}u^2\right)=2+u^2$

故 $I=\pi\int_0^\pi\left(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x}\right)\mathrm{d}x\geq\pi\int_0^\pi\left(2+\sin^2x\right)\mathrm{d}x=\frac{5}{2}\pi^2$

2018 年高数下期末答案

一、单选题

1．D

解析：偏导数连续$\Rightarrow$可微$\Rightarrow\begin{cases}\text{可偏导}\\\text{连续}\end{cases}$

以上均为充分条件，反之均无法推出，且可偏导与连续无法互相推出

2．B

解析：$\iint\limits_D \frac{\partial\ f(x,y)}{\partial x\partial y}dxdy=\int_c^d\int_a^b\frac{\partial\ f(x,y)}{\partial x\partial y}dxdy=\int_c^d\left[\frac{\partial f(b,y)}{\partial y}-\frac{\partial f(a,y)}{\partial y}\right]dy$

$=f(b,d)-f(a,d)-f(b,c)+f(a,c)$

3．A

解析：$\because$球面与平面关于原点中心对称 $\therefore$L 关于原点中心对称

$\therefore=\oint_L(x+1)^2ds=\frac{1}{3}\oint_L\left[(x+1)^2+(y+1)^2+(z+1)^2\right]ds$ $=\frac{1}{3}\oint_L(x^2+y^2+z^2+3+2x+2y+2z)ds$

$=\frac{1}{3}\oint_L(x^2+y^2+z^2+3)^2ds=\frac{1}{3}\oint_L(4+3)ds$

$=\frac{1}{3}\times7\times4\pi\ \frac{28}{3}\pi$

4．B

解析：$F(t)=\int_1^t dy\int_y^t f(x)dx=\int_1^t dx\int_1^x f(x)dy=\int_1^t(x-1)f(x)dx$

$F'(t)=(t-1)f(t)\Rightarrow F'(2)=f(2)$

二、 计算题

1．设$F(x,y,z)=e^z-z+xy-3$

$F_x=y$ $\quad F_y=x$ $\quad F_z=e^z-1$ $\quad\therefore(F_x,F_y,F_z)|_{(z,1,0)}=(1,2,0)$

切平面：$x-2+2(y-1)=0\Rightarrow x+2y-4=0$

法线：$x-2=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{0}$

2．$I=\iiint\limits_V(x^2+y^2)^2dV=\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}}\rho^2\ \ \rho d\rho d\theta dz=\frac{\pi}{6}$

3．$z=\sqrt{4-r^2}$ $\quad z_x=\frac{-x}{\sqrt{4-r^2}}$ $\quad z_y=\frac{-y}{\sqrt{4-r^2}}$

原式$=\iint\limits_{(S)}(x+y+z)ds=\iint\limits_{(S)}zds=\iint\limits_{(S)}\sqrt{4-r^2}\ \ \sqrt{1+z_x{}^2+z_y{}^2}d\sigma=\iint\limits_D 2d\sigma=2\times4\pi=8\pi$

4．设$O(0,0)$，则$I+I_{BO}+I_{OA}=\oint\left[y^2+\sin^2(x+y)\right]dx+\left[x^2-\cos^2(x+y)\right]dy$

根据格林公式$=\iint\limits_D\left[2x+2\cos(x+y)\sin(x+y)-2y-2\sin(x+y)\cos(x+y)\right]d\sigma$

$=2\iint\limits_D(x-y)d\sigma=0$ （积分域 D 关于 y=x 对称）

$=\int_1^0\cos^2ydy-\int_0^1\sin^2xdx=-\int_0^1(\sin^2x+\cos^2)dx=-1$

5. 由 Stokes 公式：$I=\iint\limits_{(S)} dy\wedge dz+dz\wedge dx+dx\wedge dy=3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

6. $\vec{A}=gradf(x,y,z)=(\frac{2x}{r^2},\frac{2y}{r^2},\frac{2z}{r^2})$

$div\vec{A}=\frac{2}{r^2}=\frac{2}{x^2+y^2+z^2}$ $\qquad rot\vec{A}=0$

7. $I=\int_0^1\int_0^{\sqrt{y^2}}\frac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dxdy=\int_0^1\frac{y^2}{2\sqrt{1+y^3}}=\frac{1}{3}\sqrt{1+y^3}\mid_0^1=\frac{\sqrt{2}-1}{3}$

三、解答题

1. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}xy\cdot\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\le\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}|x|\cdot\frac{y}{x^2+y^2}|\le\lim\limits_{x\to0}|x|=0=f(0,0)$

$\therefore$连续

$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0 \qquad f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\Delta y,)-f(0,0)}{\Delta y}=0$

$\therefore$偏导数存在

$$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{\Delta x\Delta y\arctan\frac{1}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

$=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ $\qquad$ 令 $\Delta y=k\Delta x$ 则上式$=\frac{k}{1+k^2}$ $\qquad$ 故极限不存在

$\therefore f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 不可微

2. $\frac{\partial u}{\partial\vec{n}}=(2x,2y,2z)\cdot(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0)=\sqrt{2}(x-y)$

$2x^2+2y^2+z^2=1\Rightarrow x^2+y^2\le\frac{1}{2}\Rightarrow|x-y|\le1$ $\qquad \therefore(\frac{\partial u}{\partial\vec{n}})|_{max}=\sqrt{2}$

3.
$$I=\iiint_V(1+1+2z)\,dV=[2+2\times\frac{R}{2}]\iiint_V dV\quad(\bar{z}=\frac{R}{2})$$
$$=(4+2R)\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\int_{\frac{R}{2\cos\varphi}}^{R}r^2\sin\varphi drd\varphi d\theta$$
$$=-(4+2R)\frac{2\pi r^3}{3}[\cos\varphi|_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{16\cos\varphi^2}|_0^{\frac{\pi}{3}}]=\frac{5}{6}\pi R^3+\frac{5}{12}\pi R^4$$

4. 令 $P=\frac{y}{(2-x)^2+y^2}+\frac{y}{(2+x)^2+y^2}$ $\qquad Q=\frac{2-x}{(2-x)^2+y^2}-\frac{2+x}{(2+x)^2+y^2}$

当 L 不包含（2, 0）和（-2, 0）时 $I=\iint\limits_{(\sigma)}(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})d\sigma=0$

当 L 包含（2, 0）时，取 $(x-2)^2+y=\varepsilon_1{}^2$ 为 $L_1(-)$，其中 $\varepsilon_1>0$ 且足够小，$x=\varepsilon_1\cos\theta+2$

$y=\varepsilon_1\sin\theta$ $\qquad$ 则 $I+I_1=0\Rightarrow I=\int\limits_{(+L_1)}\frac{ydx+(2-x)dy}{(2-x)^2+y^2}=\int_0^{2\pi}(-1)d\theta=-2\pi$

当 L 包含（-2, 0）时取 $(x+2)^2+y=\varepsilon_2{}^2$ 为 $L_2(-)$，其中 $\varepsilon_2>0$ 且足够小

同理得 $I=\int\limits_{(+L_2)}\frac{ydx+(2+x)dy}{(2+x)^2+y^2}=-2\pi$

当 L 包含（2, 0）和（2, 0）时取 $L_1(-)$，$L_2(-)$，则 $I+I_1+I_2=0\Rightarrow I=-I_1-I_2=-4\pi$

2017 年高数下期末答案

一、计算题

1. $gradu=(8x,2y,2z)=(8,0,4)$ $\qquad (\frac{\partial f}{\partial \vec{l}})=4\sqrt{5}$

2. $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{a_{n+1}\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}}{a_n\sin\frac{\pi}{2^n}}=\frac{a}{2}$ $\qquad$ 当 $a=2$ 时 $a_n=2^n\sin\frac{\pi}{2^n}=\pi$ $\qquad \therefore$ 发散

故 $0<a<2$ 时收敛，$a\geq 2$ 时发散

3. 偶延拓：$F(x)=\begin{cases}x,0\le x\le\pi\\-x,-\pi\le x\le 0\end{cases}$ $\qquad$ 则 $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}$ $\quad a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos dx=\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi}$

$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}xdx=\pi$

$\therefore f(x)=\frac{\pi}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2[(-1)^n-1]}{n^2\pi}\cos n\pi$

4. $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(t)(y\varphi_1+\varphi_2)$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=(y\varphi_1+\varphi_2)f''(t)\times x\varphi_1+f'(t)(\varphi_1+xy\varphi_{11}+x\varphi_{21})$$
$$=x\varphi_1(y\varphi_1+\varphi_2)f''(t)+(\varphi_1+xy\varphi_{11}+x\varphi_{21})f'(t)$$

5. $\vec{n}=(1,-2t,3t^2)$ $\qquad (1,-2t,3t^2)\bullet\pm(1,2,1)=0\Rightarrow 1-4t+3t^2=0\Rightarrow t_1=1,t_2=\frac{1}{3}$

切点 $(1,-1,1),B(\frac{1}{3},-\frac{1}{9},\frac{1}{27})$ 均不在平面上 故切线 $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{3}$ 或 $\frac{x-\frac{1}{3}}{1}=\frac{y+\frac{1}{9}}{-\frac{2}{3}}=\frac{z-\frac{1}{27}}{\frac{1}{3}}$

6. $f_x=3x^2+6x-9=0$ $\qquad f_y=-3y^2+6y=0\Rightarrow$ 驻点 $(1,0),(1,2),(-3,0),(-3,2)$

$A=f_{xx}=x+6,B=f_{xy}=0,C=f_{yy}=-6y+6$ 代入得 $(1,0)$ 处取得极小值−5；$(-3,2)$ 处取得极大值 31

7. $\int_0^1dy\int_0^y x^2e^{-y^2}dx=\int_0^1\frac{y^3}{3}e^{-y^2}dy$ 令 $u=y^2$ 则 $I=\int_0^1\frac{u}{6}e^{-u}du=-\frac{1}{6}\int_0^1ude^{-u}=-\frac{1}{6}[ue^{-u}|_0^1-\int_0^1e^{-u}du]=\frac{1-2e^{-1}}{6}$

8. 由对称性知 $\iint\limits_D xydxdy=0$ $\qquad$ 设 D_1 为第一象限的区域

$\therefore I=\iint\limits_D|y|dxdy=4\iint\limits_{D_1}ydxdy=4\int_0^1dx\int_0^{1-x}ydy=\frac{2}{3}$

9. 由高斯公式

$$I=\iiint_{(V)}\frac{3r^5-3r(x^4+y^4+z^4)}{r^6}dV=3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{(x^2+y^2+z^2)^2-(x^4+y^4+z^4)}{r^5}r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$
$$=3\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{2(x^2y^2+x^2z^2+y^2z^2)}{r^3}\sin\theta\,drd\theta d\varphi=9\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}\frac{z^2(x^2+y^2)}{r^3}\sin\theta\,drd\theta d\varphi$$
$$=9\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{a}r\sin^3\theta\cos^2\theta\,drd\theta d\varphi=9\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta\cos^2\theta\,d\theta\int_0^{a}r\,dr=\frac{12}{5}\pi a^2$$

10. $I=\int_L\sqrt{2y^2+z^2}\,ds=\int_L\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,ds=\int_L a\,ds=a\times 2a\pi=2\pi a^2$

11. $S=\iint\limits_{(S)}ds=\iint\limits_{(S)}\sqrt{1+y^2+x^2}dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^R\rho\sqrt{1+\rho^2}d\rho d\theta=\frac{2}{3}\pi[(1+R^2)^{\frac{3}{2}}-1]$

二．解答题

1. $f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\sin\frac{1}{\Delta x^2}=0$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(\Delta y,0)-f(0,0)}{\Delta y}=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\Delta y\sin\frac{1}{\Delta y^2}=0$ $\therefore$偏导数存在

$f_x(0,0)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sin\frac{1}{\Delta x^2+\Delta y^2}=0$ $\therefore$可微

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f_x=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{-2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}]=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{-2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$ 不存在

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}f_y=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}[2y\sin\frac{1}{x^2+y^2}+\frac{-2y}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}]$ 不存在

偏导数不连续

2. $P=\frac{x-y}{x^2+y^2}$， $Q=\frac{x+y}{x^2+y^2}$ ， $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ 取 $x^2+y^2=\varepsilon^2$，其中 $\varepsilon>0$ 足够小

$x=\varepsilon\cos\theta, y=\varepsilon\sin\theta$ 则 $I+I_{\overline{BC}}+I_{\overline{CD}}+I_{\overline{DA}}=0$ $\quad I=I_{\overline{CB}}+I_{\overline{DC}}+I_{\overline{AD}}=\int_\varepsilon^a\frac{1}{x}dx-\int_0^\pi d\theta+\int_{-a}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}dx=-\pi$

3. （1） $a_n=|\frac{\cos nx}{1+n^{\frac{3}{2}}}|\le\frac{1}{1+n^{\frac{3}{2}}}<\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ $\quad\because\sum\limits_1^\infty\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛 $\quad\therefore$原级数一致收敛

（2） $\lambda(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{3^{n+1}(n+1)!}x^{n+1}/(\frac{n^2+1}{3^n n!}x^n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{3(n^2+1)(n+1)}x=0$

收敛域为 $(-\infty,\infty)$ $\quad\sum\limits_{n=0}^\infty\frac{n^2+1}{3^n n!}x^n=\sum\limits_{n=0}^\infty\frac{n^2}{3^n n!}x^n+\frac{x^n}{3^n n!}=\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{nx^n}{3^n(n-1)!}+\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{x^n}{3^n n!}$

$=\sum\limits_{n=1}^\infty\frac{(n-1)x^n+x^n}{3^n(n-1)!}+\sum\limits_{n=0}^\infty\frac{x^n}{3^n n!}=\sum\limits_{n=2}^\infty\frac{x^n}{3^n(n-1)!}+\sum\limits_{n=0}^\infty\frac{x^n}{3^n n!}=[(\frac{x}{3})^2+\frac{x}{3}+1]e^{\frac{x}{3}}=\frac{x^2+3x+9}{9}e^{\frac{x}{3}}$

4. 解：球面上点(x,y,z)处单位法向量为$\boldsymbol{e_n}=\left\{\frac{x-2}{2},\frac{y}{2},\frac{z}{2}\right\}$.又$(L)$与$\boldsymbol{e_n}$成右手螺旋，于是，又 stokes 公式，有

$$\oint(y^2+z^2)dx+(z^2+x^2)dy+(x^2+y^2)dz$$
$$=2\iint[(y-z)\cdot\frac{x-2}{2}+(z-x)\cdot\frac{y}{2}+(x-y)\cdot\frac{z}{2}]dS$$
$$=2\iint(z-y)\,dS$$

其中(S)上半球面位于圆柱面内部部分，且(S)关于xOz平面$(y=0)$对称. 故$\iint ydS=0$，

$$\iint zdS=\iint_{x^2+y^2\leq 2x}\sqrt{4x-x^2-y^2}\cdot\sqrt{1+\frac{(2-x)^2+y^2}{4x-x^2-y^2}}dxdy$$
$$=\iint_{x^2+y^2\leq 2x}2\,dxdy$$
$$=2\pi$$

故所求先积分=4π

2016 年高数下期末答案

一、填空题

1. 1

解析：$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+y^2+1\Rightarrow f(x,y)=\frac{x^3}{3}+xy+x+g(y)\quad \frac{\partial f}{\partial y}=x+g'(y)\Rightarrow a=1$

2. $dx+dy+dz$

解析：$f_x=f_y=f_z=\cos^2(x+y+z)^2=1$

3. $e^{\frac{1}{2}}-1$

解析：$\int_0^1\int_x^1 e^{\frac{y^2}{2}}dydx=\int_0^1\int_0^y e^{\frac{y^2}{2}}dxdy=\int_0^1 ye^{\frac{y^2}{2}}dy=e^{\frac{1}{2}}-1$

4．5

解析：$L(x,y,\lambda)=3x+4y+\lambda(x^2+y^2-1)$

$L_x=2\lambda x+3=0,L_y=2\lambda y+4=0,L_\lambda=x^2+y^2=0\quad\Rightarrow x=\pm\frac{3}{5},y=\pm\frac{4}{5},\Rightarrow z_{\max}=5$

5. $\frac{\pi^2-\pi+1}{2}$

解析：$S(-\pi)=\frac{f(-\pi)+f(\pi)}{2}=\frac{1-\pi+\pi^2}{2}$

二．单选题

1. C

解析：两个偏导数均连续是可微的充分条件，C 为其逆否命题，显然正确

2. D

解析：假设$\exists f(x,y)>0$，则一定存在一点$A(x_1,y_1)$为极值点且极值大于 0

$f_x(x_1,y_1)=f_y(x_1,y_1)=0\Rightarrow f(x_1,y_1)=-f_x(x_1,y_1)-2f_y(x_1,y_1)=0$ 与假设矛盾

故不存在 $f(x,y)>0$ 的点，同理也不存在 $f(x,y)<0$ 的点 故 $f(x,y)=0$

3. A

解析：$\because e^{xyz}>0\quad\therefore$ 积分域越大则 I 越大，而积分域$V_3<V_1<V_2$　故$I_3<I_1<I_2$

4. B

解析：$W=\int_L \vec{F}\ d\vec{S}=\int_L Pdx+Qdy=\int_L P(x,y)dx$

5. C

解析$\int_L(x+y)^2ds=\int_L(x^2+y^2+2xy)ds=\int_L(x^2+y^2)ds=\int_L a^2ds=2\pi a^3$

6. C

解析：$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|)\ge\sum_{n=1}^{\infty}|b_n|\ge\sum_{n=1}^{\infty}b_n$　$\therefore C$ 发散

取 $a_n=0$，则 A，B 均为 0，收敛　取 a_n=0，$b_n=\frac{1}{n}$　则 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛

三．简答题

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1$　$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_1+y(xf_{11}+f_{12}\cos y)$

2. 令 $x=t$，则 $y^2=6-3t^2, z=t$，$\dot{x}=1, \dot{y}=-\frac{3t}{y}=-\sqrt{3}, \dot{z}=1$

$\therefore$ 切线：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-\sqrt{3}}{-\sqrt{3}}=\frac{z-1}{1}$

法平面：$x-1-\sqrt{3}(y-\sqrt{3})+z-1=0\Rightarrow x-\sqrt{3}+z+1=0$

3. $I=\int_0^4\int_0^{\sqrt{y}}\frac{x\cos y}{y}dxdy=\int_0^4\frac{\cos y}{2}dy=\frac{\sin 4}{2}$

4. $I=\int_1^2\int_0^{2\pi}\int_0^z\rho\cdot\rho d\rho d\theta dz=\frac{5}{2}\pi$

5. $f_x=4x-3y-1=0, f_y=-3x+4y+2=0\Rightarrow x=-\frac{2}{7}, y=-\frac{5}{7}$

$f_{xx}=4, f_{xy}=-3, f_{yy}=4$　$\because f_{xx}\cdot f_{yy}>f_{xy}{}^2$ 且 $f_{xx}>0$　$\therefore$ 极小值为 $-\frac{4}{7}$

6. 由格林公式 $I_L+I_{BC}+I_{CA}=\iint_{(\sigma)}(\frac{e^y}{x}-1-\frac{e^y}{x})d\sigma=-\frac{\pi}{4}$

$I_{BC}=\int_2^1(1+\frac{e}{x})dx=-e\ln 2-1$　$I_{CA}=\int_1^0 0dx=0$　$\therefore I_L=e\ln 2+1-\frac{\pi}{4}$

7 (1)
解析：$A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{bmatrix}, \det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix}-\lambda&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&-\lambda\end{vmatrix}$

$$=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-\lambda&1\\1&1&\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)\begin{vmatrix}1&1&1\\0&-1-\lambda&0\\0&0&-1-\lambda\end{vmatrix}=(2-\lambda)(-1-\lambda)^2=0$$

解得 $\lambda_1=\lambda_2=-1, \lambda_3=2$

$\exists\lambda_3=2$ 时, $(A-2I)x=\begin{bmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{bmatrix}x=0$　$r_2=\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$　解得 $r_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

由于 r_1，r_2，r_3 线性无关

$\therefore$ 原微分方程的基解矩阵 $X(t)=\begin{bmatrix}e^{2t}&e^{-t}&e^{-t}\\e^{2t}&-e^{-t}&0\\e^{2t}&0&-e^{-t}\end{bmatrix}$

$\therefore$ 解为 $x=X(t)C$，其中，$C=(c_1,C_2,C_3)^{\top}$ 为任意常数向量。

7（2）

方程对应的齐次微分方程的特征方程为:$r^2+2r+1=0$ 解得, $r_1=r_2=-1$

对于非齐次项： $2xe^{-x}$

$\because -1$ 是特征方程的二重根

$\therefore$ 微分方程的特解形式可设为:

$y^*=x^2(ax+b)e^{-x}=(ax^3+bx^2)e^{-x}$

$(y^*)'=[(3a-b)x^2+bx-ax^3]e^{-x}$

$(y^*)''=[(6a-3b)x+b-(6a-b)x^2+ax^3]e^{-x}$

将其代入微分方程, 得$[(6a-3b)x+3b]e^{-x}=2xe^{-x}$ 解得, $b=0, a=\frac{1}{3}$

$\therefore$ 微分方程的通解为:$y=(C_1+C_2x)e^{-x}+\frac{1}{3}x^3e^{-x}$

|

8 （1）存在 u 使 $du=Pdx+Qdy+Rdz$

（2）$I=\int_0^{\pi}[-(a\sin t+t)a\sin t+(t+a\cos t)a\cos t+a(\sin t+\cos t)]dt$

$=\int_0^{\pi}[a^2(\cos^2 t-\sin^2 t)+at(\cos t-\sin t)+a(\sin t+\cos t)]dt=-\pi a$

9 解析：对于 II 型曲面积分，首先应该想到的是高斯公式，

$$\iint_S Pdydz+Qdzdx+Rdxdy=\iiint_V (P_x'+Q_y'+R_z')dv$$

解题时：1 计算$P_x'+Q_y'+R_z'$，当$\iiint_V (P_x'+Q_y'+R_z')dv$容易算时用高斯公式，否则再想其他办法；

2. 考察 S 是否封闭，不封闭时加一些面使之封闭；加面时，为了让计算简单一般都取平行于坐标面的平面；

3. 检查封闭曲面所围区域Ω上$P_x'+Q_y'+R_z'$是否连续，对于不连续的奇点，需要做一个小面把奇点围在区域之外，为了便于计算一般是让被积函数的分母为常数，所得方程化成小曲面的方程

4. 套用高斯公式，要注意S是否为Ω的外侧。对于本题因为S是扣在xy面上的一个碗，不封闭，所以要加一个底S_2，但S_2上有奇点，所以要再加一个S_1把奇点围在区域外面，由被积函数可知S_1应取为半球面，最后$S+S_1+S_2$所围是一个形如窝头的立体。

解：设S_1：$x^2+y^2+z^2=\epsilon^2, z\geq 0$(下侧).

$S_2: z=0$(下侧)，$x^2+y^2\geq\epsilon^2, \frac{(x-2)^2}{5^2}+\frac{(y-1)^2}{4^2}\leq 1\ (0<\epsilon<1)$

而在S_1上，注意$x^2+y^2+z^2=\epsilon^2, \boldsymbol{n_0}=\left\{-\frac{x}{\epsilon},-\frac{y}{\epsilon},-\frac{z}{\epsilon}\right\}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$, 所以

$$\iint dS_1=\iint_{S_1}\frac{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}{(\epsilon^2)^+}dS$$

$$=\frac{1}{\epsilon^2}\iint_{S_1}x(-\frac{x}{\epsilon})+y\left(-\frac{y}{\epsilon}\right)+z(-\frac{z}{\epsilon})dS$$

$$=-\frac{1}{\epsilon^4}\iint_{S_1}(x^2+y^2+z^2)dS$$

$$= -\frac{\epsilon^2}{\epsilon^4}\iint\limits_{S_!} 1dS$$
$$= \left(-\frac{1}{\epsilon^2}\right)\cdot\frac{1}{2}4\pi\epsilon^2$$
$$= -2\pi$$

并且$P_x' + Q_y' + R_z' = 0$

故$I = \iint dS = -\iint dS_1 - \iint dS_2 = -(-2\pi) - 0 = 2\pi$

填空第5题：

解析

本题考查非齐次线性常微分方程

$$xdy = (\sin x - y)dx$$
$$y' = \frac{\sin x}{x} - \frac{1}{x}y$$
$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$$

由公式得：

通解 y $=\left(\int \frac{\sin x}{x}e^{\int \frac{1}{x}dx}dx + c\right)e^{-\int \frac{1}{x}dx}$

$$= \left(\int \frac{\sin x}{x}e^{\ln x}dx + c\right)\frac{1}{x}$$
$$= (-\cos x + c)\frac{1}{x}$$

将 $y(x) = 1$ 代入得 $(1+c)\frac{1}{\pi} = 1$

$$c = \pi - 1$$

答案为 $y = (-\cos x + \pi - 1)\frac{1}{x}$

2015 年高数期末答案

一、选择题

1. D

解析：令 $y=kx$ 则 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{2x^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{2}{k^2+1}$，不存在。

2. C

解析：不由于对称性分析知 A,B,D 左侧积分均为 0，右侧积分不为 0。

3. D

解析：$I=\iint\limits_{(S)}(2-x^2-1-\frac{y^2}{2})d\sigma=\iint\limits_{(S)}\left[1-(x^2+\frac{y^2}{2})\right]d\sigma=\pi-\frac{3}{4}\iint\limits_{(S)}(x^2+y^2)d\sigma=\pi-\frac{3}{4}\int_0^{2\pi}\int_0^1\rho^3 d\rho d\theta=\frac{5\pi}{8}$

4. A

解析：$f_x=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$，$f_y=\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$，$\left.\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}\right|_{(0,0)}=(f_x,f_y)\cdot(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})=0$

二、填空题

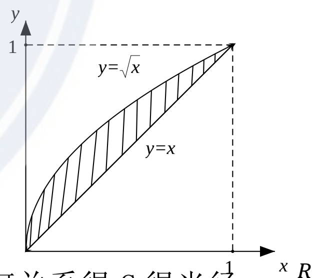
1. $9-2\cos 8$

解析：$f_x=3x^2y-2x\cos(x^2-y^2)=9-2\cos 8$

2. $\frac{\pi}{3}$

解析：$x=t$，$y=t$，$z=t^2+1$；$(\dot{x},\dot{y},\dot{z})=(1,0,\sqrt{3})$，$\therefore \alpha=\frac{\pi}{3}$

3. $1-\cos 1$



解析：$I=\int_0^1 dy\int_{y^2}^{y}\frac{\cos y}{y}dx=\int_0^1(\cos y-y\cos y)dy=1-\cos 1$

4. $\frac{\pi}{2}R^2$

解析：C 为平面 $x+y+z=\frac{3R}{2}$ 从球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 上截下的圆，由几何关系得 C 得半径 $r=\frac{R}{2}$

根据对称性，有 $\oint y ds=\frac{1}{3}\oint(x+y+z)\,ds=\frac{R}{2}\oint ds=\frac{R}{2}\pi R=\frac{\pi}{2}R^2$

三、解答题

1. $\frac{\partial z}{\partial x}=yf(e^{xy},xy)=yf$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f+y(xe^{xy}f_1+xf_2)$.

2. $d(e^z-2x+yz)=0\Rightarrow e^z dz-2dx+ydz+zdy=0$，$\therefore dz|_{(0,0)}=\frac{2}{e}dx-\frac{1}{e}dy$.

3. $\lambda(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)(\frac{x}{n+1})^{n+1}}{(\frac{x}{n})^n}=\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^n x=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{(1+\frac{1}{n})^n}=\frac{x}{e}<1\Rightarrow 0<x<e$；当 $x=e$ 时，

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{e}{(1+\frac{1}{n})^n}>1\Rightarrow a_{n+1}>a_n$，且 $a_1=e$，$\therefore \lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$，发散，故 $x\in(0,e)$ 时收敛，$x\in[e,+\infty)$ 时发散.

4. $f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$，$a_n=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nxdx=\frac{4[(-1)^n-1]}{\pi^2n^2}\,a_0=2$

$b_n=\frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=0$，$\therefore f(x)=1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4\left[(-1)^n-1\right]}{\pi^2n^2}\cos nx$.

5. $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^2+1}{n+1}\cdot\frac{n}{n^2+1}x\right|=|x|<1\Rightarrow -1<x<1$，当 $x=1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}n+\frac{1}{n}=\infty$，故级数发散；当 $x=-1$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}|a_n|=\lim\limits_{n\to\infty}n+\frac{1}{n}=\infty$，故级数发散，$\therefore$ 收敛域：$(-1,1)$，$S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(nx^n+\frac{x^n}{n})$

设 $H(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n\Rightarrow\frac{H(x)}{x}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\Rightarrow\int_0^x\frac{H(t)}{t}dt=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}-1\Rightarrow H(x)=\frac{x}{(x-1)^2}$，设 $T(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$

$\Rightarrow T'(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^{n-1}\frac{1}{1-x}\Rightarrow T(x)=-\ln(1-x)$，$\therefore S(x)=\frac{x}{(x-1)^2}-\ln(1-x)$.

6. （1）$\forall x\in[\delta,+\infty)$，$\forall n\in N_+$，恒有 $ne^{-nx}\le ne^{-n\delta}$，$\because \lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)\delta}}{ne^{-n\delta}}=e^{-\delta}<1$，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 收敛.

由 M 判别法知，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛，但 $u(\frac{1}{n})=e^{-1}\nrightarrow 0$，$\therefore$ 在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛.

（2）$f(x)=\frac{x+4}{(2x+1)(x-3)}=\frac{1}{x-3}-\frac{1}{2x+1}=\frac{1}{-2+(x-1)}-\frac{1}{3+2(x-1)}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-1}{2}}-\frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{2(x-1)}{3}}$

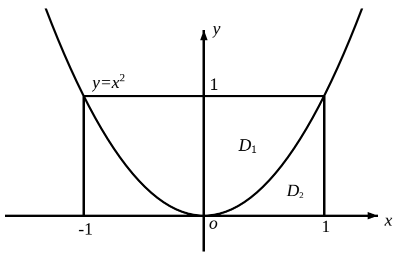
$=-\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n-\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{2}{3}(x-1)\right]^n=\sum_{n=0}^{\infty}\left[-\frac{1}{2^{n+1}}-\frac{(-2)^n}{3^{n+1}}\right](x-1)^n$,

$\left|\frac{x-1}{2}\right|<1\Rightarrow -1<x<3$,

$\left|\frac{2(x-1)}{3}\right|<1\Rightarrow -\frac{1}{2}<x<\frac{5}{2}$，$x\in(-\frac{1}{2},\frac{5}{2})$.

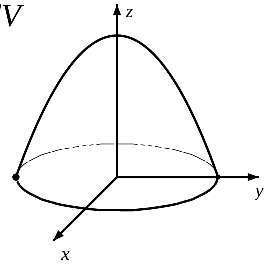
7. $I=2(\iint\limits_{D_1}\sqrt{y-x^2}dxdy+\iint\limits_{D_2}\sqrt{x^2-y}dxdy)=2(\int_0^1\int_{x^2}^1\sqrt{y-x^2}dydx+\int_0^1\int_0^{x^2}\sqrt{x^2-y}dydx)$

$=2\left[\int_0^1\frac{2}{3}(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx+\int_0^1\frac{2}{3}x^3dx\right]=\frac{4}{3}\left[\int_0^1(1-x^2)^{\frac{3}{2}}dx+\frac{1}{4}\right]$，令 $x=\sin\theta$，则



$I=\frac{4}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta d\theta+\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}+\frac{1}{3}$

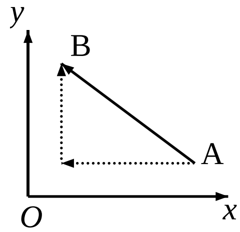
8．取 S_1 为 $\begin{cases}x^2+y^2=1\\ z=0\end{cases}$ 下侧，由高斯公式 $I+I_1=\iiint\limits_V(6x^2+6y^2+6z)dV$



$=6\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{1-z}}(r^2+z)rdrd\theta dz=2\pi$

$I_1=\iint\limits_{\Sigma}(-3)dx\wedge dy=-\iint\limits_{S_1}(-3)dxdy=3\pi$，$\therefore I=-\pi$.

9. $Q=\frac{x}{y^2}-xf(xy)$ $P=-[\frac{1}{y}+yf(xy)]$ $\because\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$ $\therefore$积分与路径无关，则：



$I=\int_3^1-\left[\frac{3}{2}+\frac{2}{3}f(\frac{2}{3}x)\right]dx+\int_{\frac{2}{3}}^{2}\left[\frac{1}{y^2}-f(y)\right]dy$，设 $y=\frac{2}{3}x$，则

$I=\int_2^{\frac{2}{3}}-\left[\frac{9}{4}+f(y)\right]dy+\int_{\frac{2}{3}}^{2}\left[\frac{1}{y^2}-f(y)\right]dy=\int_{\frac{2}{3}}^{2}(\frac{9}{4}+\frac{1}{y^2})dy=4$.

另解：凑微分

$$\left[\frac{x}{y^2}-xf(xy)\right]dy-[\frac{1}{y}+yf(xy)]dx$$
$$=-f(xy)(ydx+xdy)-[\frac{1}{y}dx+xd(\frac{1}{y})]$$
$$=-f(xy)d(xy)-d(\frac{x}{y})$$

最后带入上下限即可。

10. $(F_x,F_y,F_z)=(2x,2y,1)$，$\therefore$切平面：$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+z-z_0=0$，则：

$V=\frac{1}{6}(2x_0^2+2y_0^2+z_0)\cdot\frac{2x_0^2+2y_0^2+z_0}{2y_0}\cdot\frac{2x_0^2+2y_0^2+z_0}{2x_0}=\frac{(x_0^2+y_0^2+4)^3}{24x_0y_0}$，$\begin{cases}\frac{\partial v}{\partial x}=0\\ \frac{\partial v}{\partial y}=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5x^2y-y^3-4y=0\\ 5xy^3-x^3-4x=0\end{cases}$

$\Rightarrow\begin{cases}y^2=5x^2-4\\ x^2=5y^2-4\end{cases}\Rightarrow x=y=1$.

11. $\begin{cases}f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0\\ f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0\end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=$

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{|\Delta x\Delta y|}{(\Delta x^2+\Delta y^2)^{\frac{3}{2}}}\sin(\Delta x^2+\Delta y^2)=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\ \Delta y\to0}}\frac{|\Delta x\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\le\lim\limits_{\Delta x\to0}|\Delta x|=0$，$\therefore f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

12. $I=\int_0^1 rdr\int_0^{2\pi}xf_xd\theta+yf_yd\theta$　注意到$xd\theta=rcos\theta d\theta=drsin\theta=dy$，$yd\theta=-dx$

$=\int_0^1 rdr\oint f_xdy-f_ydx$ (围道半径为r)

$$= \int_0^1 rdr \iint f_{xx} + f_{yy} dS$$

$$= \int_0^1 rdr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r re^{-r^2} d\rho$$

$$= \int_0^1 \pi r(1 - e^{-r^2}) dr$$

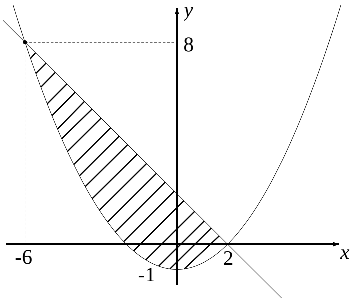
$$= \frac{\pi}{2e}$$

2014 年高数期末答案

一、计算题

1. 切平面：$x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)-(z-z_0)=0$，$\dfrac{x_0}{2}=\dfrac{2y_0}{2}=\dfrac{-1}{-1}\Rightarrow x_0=2$，$y_0=1$，$z_0=3$

$\therefore 2(x-2)+2(y-1)-(z-\dfrac{3}{2})=0$.



2. $I=\int_0^8\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2-y}f(x,y)dydx+\int_{-1}^0\int_{-2\sqrt{y+1}}^{2\sqrt{y+1}}f(x,y)dydx$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\left(\dfrac{(\lambda-e)^2\lambda^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\right)\Big/\left(\dfrac{(\lambda-e)^2\lambda^n n!}{n^n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(\dfrac{n}{n+1})^n=\dfrac{\lambda}{e}$.

当$\lambda>e$时，级数发散；当$\lambda<e$时，级数收敛；
当$\lambda=e$时，$a_n=0$，级数收敛

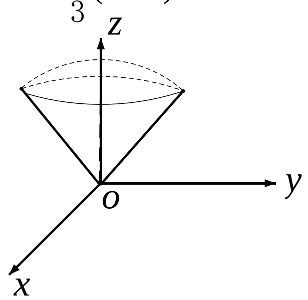
4. $m=\int_L Pds=\int_0^1 x\sqrt{1+4x^2}dx=\dfrac{5^{\frac{3}{2}}-1}{12}$.

5. 设 $f(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{2}+b_n\sin\dfrac{n\pi x}{2})$，在$[-2,2]$上显然满足 Dirichlet 条件.

$$\begin{cases}a_n=\dfrac{1}{2}\int_{-2}^2 f(x)\cos\dfrac{n\pi x}{2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^2 x\cos\dfrac{n\pi x}{2}dx=\dfrac{2}{(n\pi)^2}[(-1)^n-1],a_0=\dfrac{1}{2}\int_0^2 xdx=1\\ b_n=\dfrac{1}{2}\int_{-2}^2 f(x)\sin\dfrac{n\pi x}{2}dx=\dfrac{1}{2}\int_0^2 x\sin\dfrac{n\pi x}{2}dx=\dfrac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}\end{cases}\Rightarrow f(x)$$

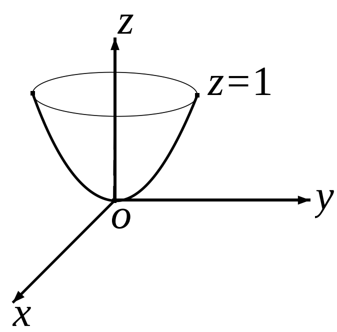
$$f(x)=\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{(n\pi)^2}\left[(-1)^n-1\right]\cos\frac{n\pi x}{2}+(-1)^{n+1}\frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{2}\right],\quad f(4k+2)=1\quad k=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$$

6. $f(x)=\ln\left[4(x-2)+3\right]=\ln3+\ln\left[\dfrac{4}{3}(x-2)+1\right]=\ln3+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(\dfrac{4}{3})^n\dfrac{(x-2)^n}{n}$，$-1<\dfrac{4}{3}(x-2)\le1\Rightarrow$ $\dfrac{5}{4}<x<\dfrac{11}{4}$.



7. $\iiint\limits_V zdv=\int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\int_0^{\sqrt{2}}r\cos\theta r^2\sin\theta drd\theta d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\theta\cos\theta d\theta\int_0^{\sqrt{2}}r^3dr=\dfrac{\pi}{2}$.

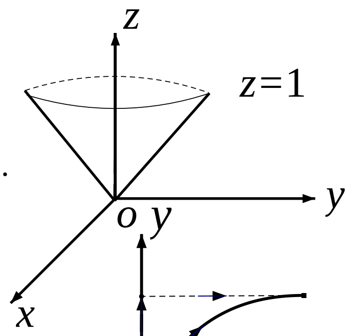
8. $I_1=\iint\limits_{s_1}\vec{A}\cdot d\vec{s}=\iint\limits_{s_1}(z+x^2)dy\wedge dz+xdz\wedge dx+(z^2+3y)dx\wedge dy$，取 $S_2\begin{cases}x^2+y^2=1\\z=1\end{cases}$的上侧，则由高斯公式：



$$I_1+I_2=\iiint\limits_V(2x+2z)dV=2\iiint\limits_V zdV=2\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{z}}rdrdx\theta dz=\frac{2}{3}\pi$$

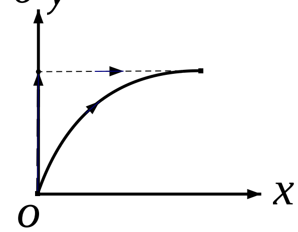
$I_2=\iint\limits_{S_2}(1+3y)dxdy=\iint\limits_{S_2}dxdy=\pi$ $\qquad\therefore I_1=-\dfrac{\pi}{3}$

9. $I=\iint\limits_{\sigma}(x^2+y^2)\sqrt{1+\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y^2}}dxdy=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}\int_0^1\rho^2\rho d\rho d\theta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\pi$.



10. $P=ye^{y^2}$，$Q=xe^{y^2}+2xy^2e^{y^2}$，$\because Q_x=P_y$，$\therefore$和积分路径无关，$I=\int_0^1 edx=e$.

11. $grad(\sqrt{x^2+y^2+z^2})=(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})$，



$$div\left[grad(\sqrt{x^2+y^2+z^2})=(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}})\right]=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

12.（1） $\lambda=\lim\limits_{n\to 0}\left|\dfrac{(-1)^n x^{2n+2}}{(2n+3)3^{n+1}}/\dfrac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{(2n+1)3^n}\right|=\dfrac{x^2}{3}<1\Rightarrow-\sqrt{3}<x<\sqrt{3}$，当 $x^2=3$ 时，原级数 $=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)}$，为

Leibniz 型级数,收敛,故收敛域$[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$，$[xS(x)]'=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{x^{2n}}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-\dfrac{x^2}{3})^n=-\left[\dfrac{1}{1+\dfrac{x^2}{3}}-1\right]=\dfrac{x^2}{x^2+3}$，

$\therefore$

$$S(x)=\int_0^x\frac{t^2}{t^2+3}dt/x=\int_0^x\left[1-\frac{1}{(\frac{t}{\sqrt{3}})^2+1}\right]dt/x=1-\frac{\sqrt{3}\arctan\frac{x}{\sqrt{3}}}{x},x\in[-\sqrt{3},\sqrt{3}]$$

(2) $\because\left|\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\right|\le\dfrac{1}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}\le\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$，而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{4}{3}}}$收敛，$\therefore$原级数在 $x\in R$ 上一致收敛,

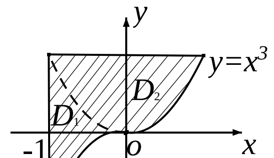
$$a_n'=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{\sqrt[3]{n^4+x^4}}-\frac{4x^3\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{3(n^4+x^4)^{\frac{4}{3}}};$$

当 $x=2k\pi(\mathrm{k}\in N)$ 时，　$a_n{}'=\dfrac{(n+\frac{1}{2})\cos k\pi}{\sqrt[3]{n^4+4k^2\pi^2}}$，

$\left|a_n{}'\right|=\dfrac{n+\frac{1}{2}}{\sqrt[3]{n^4+4k^2\pi^2}}\le\dfrac{n+\frac{1}{2}}{n^{\frac{4}{3}}}=\dfrac{1}{n^{\frac{1}{3}}}+\dfrac{1}{2n^{\frac{4}{3}}}\because\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{1}{3}}}$发散，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n'$ 发散，故不可逐项求导.

13. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f_1+f_2\dfrac{dt}{dx}\\ F_1+F_2\dfrac{dy}{dx}+F_3\dfrac{dt}{dx}=0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{f_1F_3-F_1f_2}{F_3+F_2f_2}$。

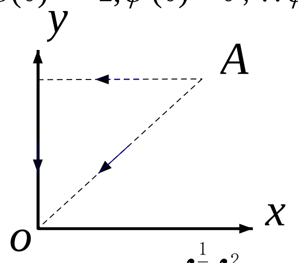
14. $I=\iint\limits_D\left[x+xy\sin^2(x^2+y^2)\right]d\sigma$，将 D 分为 D_1 和 D_2，$\because\iint\limits_{D_1}xy\sin^2(x^2+y^2)d\sigma=0$，



$\iint\limits_{D_2} xy\sin^2(x^2+y^2)d\sigma=0$， $\iint\limits_{D_2} xd\sigma=0$， $\therefore I=\iint\limits_{D_1} xd\sigma=2\int_{-1}^{0}\int_{0}^{D_2}-x^3xdydx=-\frac{2}{5}$.

15.（1） $P=2[x\varphi(y)+\psi(y)]$，$Q=x^2\psi(y)+2xy^2+2x\varphi(y)$；$P_y=Q_x \Rightarrow 2x[x\varphi'(y)+\psi'(y)]=$

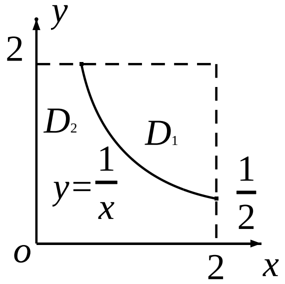
$2x\psi(y)+2y^2+2\varphi(y)\therefore\begin{cases}\varphi'(y)=\psi(y)\\ \varphi'(y)=\varphi(y)+y^2\end{cases}\Rightarrow \varphi''(y)=\varphi(y)+y^2$，又$\because \varphi(0)=-2,\varphi'(0)=0$，$\therefore \varphi(y)=-y^2-2$



$\psi(y)=-2y$。

（2） $I=\int_1^0 2[x\varphi(1)+\psi(1)]dx=\int_1^0 2(-3x-2)dx=7$

16.（1） $A=\iint\limits_{D_1}(xy-1)dxdy+\iint\limits_{D_2}(1-xy)dxdy=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\int_{\frac{1}{x}}^{2}(xy-1)dydx+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\int_{0}^{\frac{1}{x}}(1-xy)dydx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{2}(1-xy)dydx$



$=(\ln 2+\frac{3}{4})+\ln 2+\frac{3}{4}=2\ln 2+\frac{3}{2}$

(2) $\iint\limits_{D} xyf(x,y)dxdy-\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy=\iint\limits_{D}(xy-1)f(x,y)dxdy=1$

$\because \left|\iint\limits_{D}(xy-1)f(x,y)dxdy\right|\le\iint\limits_{D}|xy-1||f(x,y)|dxdy\le|f_{\max}(x,y)|\iint\limits_{D}|xy-1|dxdy\le A|f_{\max}(x,y)|$

$\therefore |f_{\max}(x,y)|\ge\frac{1}{A}$，即$\exists(\xi,\eta)\in D$，使得$|f(\xi,\eta)|\ge A$.

2013 年高数期末答案

1. $u_x = 2x - 3z \quad u_y = 2y \quad u_z = 4z^3 - 3x$， $gradu = (-1, 2, 1)$， $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{l}} = (-1,2,1)\cdot(\dfrac{1}{3}, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3}) = \dfrac{5}{3}$

2. $F(x,y,z) = 3x^2 + y^2 + z^2 - 16$， $F_x = 6x \ \ F_y = 2y \ \ F_z = 2z \quad 12(x-2) + 4(y-2) = 0 \Rightarrow 3x + y = 8$.

3. $2zz_x y - (z^3 + 3z^2 x z_y) = 0 \Rightarrow z_x = \dfrac{z^3}{2zy - 3zx} \quad \left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,2,1)} = 1$.

4. $\lambda = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} (n+1)\sin\dfrac{\pi}{3^{n+1}} / n\sin\dfrac{\pi}{3^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n}\cdot\dfrac{\pi}{3^{n+1}} / \dfrac{\pi}{3^n} = \dfrac{1}{3} < 1 \quad \therefore \sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sin\dfrac{\pi}{3^n}$ 收敛.

5. 设 $f(x) = a_0 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\dfrac{n\pi x}{\pi} + b_n\sin\dfrac{n\pi x}{2})$

$$\begin{cases} a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x dx = \frac{\pi}{2} \\ a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos n\pi x\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos n\pi x\,dx = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1], \\ b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin n\pi x\,dx = 0 \end{cases}$$

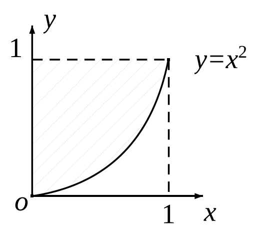
故$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1]\cos nx$

6. $f(x) = -\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{2x-1} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{x+1} = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{1-2x} + \dfrac{1}{3}\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{2}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(2x)^n + \dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-x)^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^{n+1} + (-1)^n}{3}x^n$

7. $L_{AB}: x + y = 1 \quad \int_L (x+y)ds = \int_L ds = 2\sqrt{2}$.

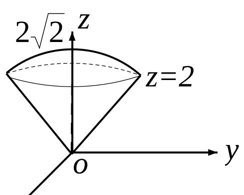
8. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = f + x(f_1 y + f_2\dfrac{1}{y})$， $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = xf_1 - \dfrac{x}{y^2}f_2 + xf_1 + xy(f_{11}x - f_{12}\dfrac{x}{y}) - \dfrac{x}{y^2}f_2 + \dfrac{x}{y}(f_{21}x - f_{22}\dfrac{x}{y_2})$

$= 2xf_1 - \dfrac{2x}{y^2}f_2 + x^2 y f_{11} - \dfrac{x^2}{y}f_{12} + \dfrac{x^2}{y}f_{21} - \dfrac{x^2}{y^3}f_{22}$



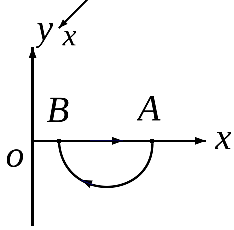
9. 交换积分次序： $I = \int_0^1 dy\int_0^{\sqrt{y}}\dfrac{xy}{\sqrt{1+y^3}}dx = \int_0^1\dfrac{y^2}{2\sqrt{1+y^3}}dy = \dfrac{1}{3}\left.\sqrt{1+y^3}\right|_0^1 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$.

10. $m = \iiint\limits_V \rho dV = \int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^{2\sqrt{2}} r\cos\theta r^2\sin\theta dr = 8\pi$.



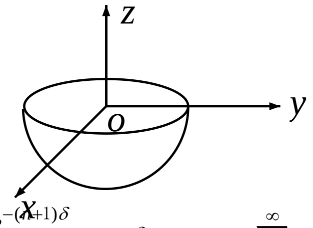
11. $I_1 + I_2 = -\iint\limits_D [e^x\cos y - 1 - (e^x\cos y + 1)]d\sigma = 2\iint\limits_D d\sigma = 2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\pi\cdot 3^2 = 9\pi$,

$I_2 = \int_1^7 dx = 6 \quad \therefore I_1 = 9\pi - 6$.



12. 取 $S_1:\begin{cases}x^2+y^2\le 1\\ z=0\end{cases}$ 的上侧，$-I+I_1=\iiint\limits_V[\cos^2(1+z)+\sin^2(1+z)+4]dv=5\iiint\limits_V dv=5\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi=\frac{10}{3}\pi$，

$I_1=\iint\limits_{S_1}4dxdy=4\pi \quad \therefore I=\frac{2}{3}\pi$.



13.（1） $\forall x\in[\delta,+\infty)$，$\forall n\in N_+$，恒有 $ne^{-nx}\le ne^{-n\delta}$，$\because \lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+1)e^{-(n+1)\delta}}{ne^{-n\delta}}=e^{-\delta}<1$，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 收敛.

由 M 判别法知，$\therefore\sum\limits_{n=1}^{\infty}ne^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛，但 $u(\frac{1}{n})=e^{-1}\not\to 0$，$\therefore$ 在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛.

$$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-nx}=\sum_{n=0}^{\infty}(e^{-x})^\wedge n=\frac{1}{1-e^{-x}}$$

（2）$\lambda=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(2n+3)}{(n+1)!}x^{2n+2}/\frac{(2n+1)}{n!}x^{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+3}{(2n+1)(n+1)}x^2=0<1$，$\therefore$ 收敛域：$x\in(-\infty,+\infty)$

$$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n!}+2x^2\frac{x^{2(n-1)}}{(n-1)!}=e^{x^2}+2x^2e^{x^2}=e^{x^2}(1+2x^2)$$

14. $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}|f(x,y)|=\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\left|\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\le\lim\limits_{x\to0}|x|=0$，$\therefore$ 在 $(0,0)$ 处连续；$f_x(0,0)=\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0$

$f_y(0,0)=\lim\limits_{\Delta y\to0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0$，$\therefore$ 在 $(0,0)$ 处可偏导，则：

$\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{f(\Delta x,\Delta y)-f_x(0,0)\Delta x-f_y(0,0)\Delta y-f(0,0)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\lim\limits_{\substack{\Delta x\to0\\\Delta y\to0}}\frac{\Delta x\Delta y}{\Delta x^2+\Delta y^2}$ 不存在，$\therefore$ 在 $(0,0)$ 处不可微.

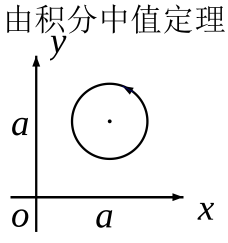
15. 设 $C=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，$f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-C$，$C=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\frac{1}{\pi}\iint\limits_D(\sqrt{1-x^2-y^2}-C)dxdy$

$=\frac{1}{\pi}(\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\sqrt{1-\rho^2}\cdot\rho d\rho-C\pi)=\frac{2}{3}-C$，$\therefore C=\frac{1}{3}\quad f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}-\frac{1}{3}$.

16. $I=\iiint\limits_V[(y+1)f''(x)+(1-2y)f(x)+yf'(x)-2e^x]dv=0$，任意取一体积极小的区域，由积分中值定理

$\therefore(y+1)f''(x)+yf'(x)+(1-2y)f(x)=2e^x$

$y[f''(x)+f'(x)-2f(x)]+[f''(x)+f(x)]=2e^x$，$\begin{cases}f''(x)+f'(x)-2f(x)=0\\f''(x)+f(x)=2e^x\end{cases}\Rightarrow f(x)=e^x$



17. $I=\iint\limits_D[f(y)+2x+\frac{1}{f(x)}+4y]d\sigma=\iint\limits_D[f(y)+\frac{1}{f(x)}]d\sigma+\iint\limits_D(2x+4y)d\sigma$，

由于积分区域对称性，有$\iint f(y)dS=\iint f(x)\,dS,\iint xdS=\iint ydS=\iint a+(x-a)dS=\iint adS$

$\therefore I=\iint\limits_{D}[f(x)+\frac{1}{f(x)}]d\sigma+\iint\limits_{D}6ad\sigma$. $f(x)+\frac{1}{f(x)}\geq 2$，$I\geq\iint\limits_{D}2d\sigma+\iint\limits_{D}6ad\sigma=2\pi+6a\pi$

2012 年高数下期末答案

一、计算题

1. $\dot{r}(t)=(-\sin t,\cos t,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{t}{2}})=(-1,0,1)$ $\therefore \frac{x}{-1}=\frac{y-1}{0}=\frac{z-1}{1}$

2. 令 $F=z-e^z+2xy-3=0$ $F_x=2y=4$ $F_y=2x=2$ $F_z=1-e^z=0$

$\therefore 4(x-1)+2(y-2)=0$ $\therefore 2x+y-4=0$

3. $\int_0^1 dy\int_{2-y}^{1+\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(1-\cos\frac{1}{n})\sqrt{n}}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}$ $\because \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛 $\therefore$ 原级数收敛

5. 采用奇延拓：$a_n=0$ $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 令 $f(0)=0$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x+\frac{\pi}{2})\sin nxdx=\frac{1}{n}-\frac{2}{n}\cos\frac{n\pi}{2}+\frac{2}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$$

$$\therefore f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2k}-\frac{(-1)^k}{k}\right]\sin 2kx+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{1}{2k+1}-\frac{2}{(2k+1)^2\pi}\cdot(-1)^k\right]\sin(2k+1)x$$

6. $(x-\frac{a}{2})^2+y^2=\frac{a^2}{4}$ $\therefore\begin{cases}x=\frac{a}{2}+\frac{a}{2}\cos t\\ y=\frac{a}{2}\sin t\end{cases}$ $\dot{x}(t)=-\frac{a}{2}\sin t$ $\dot{y}(t)=\frac{a}{2}\cos t$

$$\therefore\int_L\sqrt{x^2+y^2}ds=\int_0^{2\pi}\sqrt{ax}\cdot\sqrt{\dot{x}^2(t)+\dot{y}^2(t)}dt=\int_0^{\pi}\frac{a^2}{2}\sqrt{\frac{1+\cos t}{2}}dt=a^2\int_0^{\pi}\cos\frac{t}{2}dt=2a^2$$

也可直接令$x=\rho cos\theta, y=\rho sin\theta$

7. $z_x=2f_1+yf_2\cos x$

$z_{xy}=-2f_{11}+2f_{12}\sin x+y\cos x(-f_{21}+f_{22}\sin x)+f_2\cos x$

8. $\iint\limits_D\sin\frac{x}{y}dxdy=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}dy\int_0^{y^2}\sin\frac{x}{y}dx=\frac{3\pi^2}{8}+\frac{\pi}{2}+1$

9. $\begin{cases}z=\sqrt{4-x^2-y^2}\\ z=\frac{1}{3}(x^2+y^2)\end{cases}$ 交线为 $\begin{cases}x^2+y^2=3\\ z=1\end{cases}$

$$\therefore m=\iiint\limits_V zdv=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{\sqrt{3}}\rho d\rho\int_{\frac{1}{3}\rho^2}^{\sqrt{4-\rho^2}}zdz=\frac{13}{4}\pi$$

10. $I_1+I_2=\iint ye^xd\sigma=\int_0^{\pi}dx\int_0^{\sin x}ye^xdy=\frac{e^{\pi}-1}{5}$ $I_2=\int_0^{\pi}e^xdx=e^{\pi}-1$

$\therefore$ 原式 $=-I_1=\frac{4}{5}(e^{\pi}-1)$

11. S_2 为平面 $x^2+y^2=1$，取 $z=0$ 下侧

$$I=I_1+I_2=\iiint(P_x+Q_y+R_z)dv=\iiint 3dv=3\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\rho d\rho\int_0^{1-\rho^2}dz=\frac{3\pi}{2}$$

$I_2=-\iint d\sigma=-\pi$ $\therefore$ 原式 $=I-I_2=\frac{5\pi}{2}$

12. $\lambda=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{x\to\infty}\left|\frac{x^n}{(n+1)2^{n+1}}/\frac{x^{n-1}}{n2^n}\right|=\frac{|x|}{2}<1\Rightarrow -2<x<2$

当 $x=2$ 时，原式 $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n-1}}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$ 发散；当 $x=-2$ 时，原式 $=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n-1}}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n}$ 收敛

$\therefore$ 收敛域：$[-2,2)$

$x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{x}{2}\right)^n=S(\frac{x}{2})$ 　令 $\frac{x}{2}=t$ 　$S(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}t^n$ 　$S'(t)=\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}=\frac{1}{1-t}$

$\therefore S(t)-S(0)=\int_0^t\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-t)$ 　$S(t)=-\ln(1-t)$ 　$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n2^n}=-\frac{1}{x}\ln(1-\frac{x}{2})$

13.（1）$\forall x\in[\delta,+\infty),\forall n\in N^+$ 恒有 $\sqrt{n}\cdot 2^{-nx}\le\sqrt{n}\cdot 2^{-n\delta}$ 　$\lambda=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}\le 2^{-\delta}<1$

$\because\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot 2^{-n\delta}$ 收敛 　由 M 判别法知 $\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}\cdot 2^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛

$\because u(\frac{1}{n})=\frac{\sqrt{n}}{2}\not\to 0$ 　$\therefore$ 在 $(0,+\infty)$ 内不一致收敛

（2）$f(x)=\frac{1}{5}(\frac{2}{x+2}+\frac{1}{2x-1})$ 　$\frac{2}{x+2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1+\frac{x-2}{4}}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-2}{4}\right)^n$

$\frac{1}{2x-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{2(x-2)}{3}}=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2(x-2)}{3}\right]^n$

$\therefore f(x)=\frac{1}{10}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{x-2}{4}\right)^n+\frac{1}{15}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{2(x-2)}{3}\right]^n$

14. $z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 　$z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$ 　$\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}=\sqrt{2}$

原式 $=\iint\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{1+{z_x}^2+{z_y}^2}d\sigma=\sqrt{2}\int_0^{2\pi}d\theta\int_1^2\rho^2d\rho=\frac{14\sqrt{2}\pi}{3}$

15. $f=(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2-a^2=0$ 　令 $F=u+\lambda f$ 　$F_x=1+2\lambda(x-a)=0$

$F_y=1+2\lambda(y-a)=0$ 　$F_z=1+2\lambda(z-a)=0$ 　$F_\lambda=(x-a)^2+(y-a)^2+(z-a)^2-a^2=0$

$\therefore x=y=z=(1-\frac{\sqrt{3}}{3})a$ 时 $u_{\min}=(3-\sqrt{3})a$ 　$\oiint_\Sigma(x+y+z+\sqrt{3}a)^3ds\ge\oiint_\Sigma(3a)^3ds=108\lambda a^5$