

现代物理与人工智能-II（第二部分）

韩子慕，王浩朴

1 序言

本复习资料针对《现代物理与人工智能》课程，主要内容忠实于授课PPT，并对PPT上难以理解（或有省略）的部分进行了补充说明。能给出例题和示例的部分，我们准备了一些练习题供大家参考。2025年考过的题目均以脚注的形式标明。

本复习资料由韩子慕和王浩朴编写。其中热力学与人工智能、统计物理与人工智能、物理仿真内容由韩子慕编写，量子力学与人工智能、混沌与分形部分由王浩朴编写。如有问题请联系对应编者。

2 反馈与迭代系统

2.1 反馈系统的构成

反馈系统的基本构成有：输入单元、处理单元、控制单元、输出单元

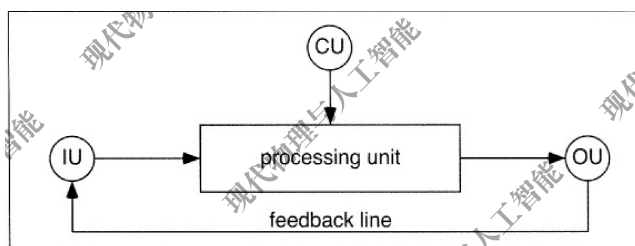


图 1: 反馈系统基本构成

2.2 反馈的基本类型

2.2.1 单步反馈系统

即 $x_{n+1} = g(x_n)$, 主要例子是求平方根。对于牛顿法求解 $x^2 = a, a \geq 0$, 其可以转变为

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

有效性分析有当 $x_n = (1 + e_n)\sqrt{a}$ 时:

$$x_{n+1} = \left(1 + \frac{e_n^2}{2 + 2e_n} \right) \sqrt{a}$$

$$e_{n+1} = \frac{e_n^2}{2 + 2e_n}$$

当 e_n 很小时, 有 $e_{n+1} \approx \frac{1}{2}e_n^2$, 误差是平方级缩小的。

2.2.2 两步反馈系统

即 $x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1})$, 主要例子是斐波那契数列: $x_{n+1} = x_n + x_{n-1}$ 。我们从中也可以得到黄金分割率:

$$r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1.618$$

2.2.3 带存储功能的反馈系统

引入一个带内部存储单元的处理器, 这样两步迭代 $x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1})$ 可以如下实现:

1. 准备过程: 用 x_0 初始化存储单元, 用 x_1 初始化输入单元。
2. 迭代过程: 计算 $x_{n+1} = g(x_n, x_{n-1})$, 然后用 x_n 更新存储单元, 用 x_{n+1} 更新输入单元。实际上, 带存储功能的反馈系统一定程度上等同于单步反馈, 只不过输入与输出信息以矢量模式来处理 (输入 (x_{n-1}, x_n) , 输出 (x_n, x_{n+1}))。

2.2.4 具有两个变量的单步反馈系统

引入新变量 $y_n = x_{n-1}$, 则可以将两步反馈问题转换为单步反馈问题。令 $Z_n = (x_n, y_n)$, 则两步反馈问题等价于 $Z_{n+1} = g(Z_n)$ 。

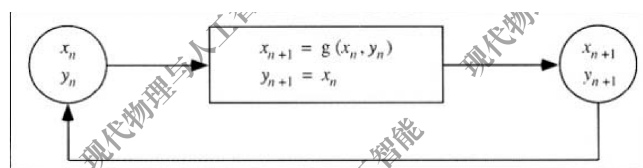
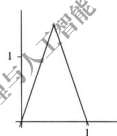


图 2: 双变量反馈系统

2.2.5 基于联合公式的单步反馈系统

有两个例子：帐篷变换和 $(3A+1)$ 问题（会进入一个循环）

帐篷变换



$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{if } x \leq 0.5 \\ 3-3x & \text{if } x > 0.5 \end{cases}$$

$(3A+1)$ 问题

简单的整数产生算法，尚未研究清楚其机制。

第一步：选取任一正整数 a ;

第二步：若 $a = 1$ 停止;

第三步：若 a 为偶数，则用 $a/2$ 代替 a 后转到第二步;

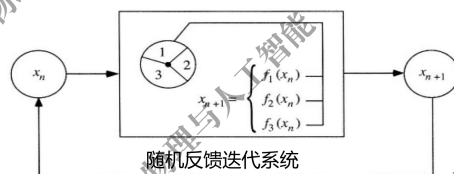
第四步：若 a 为奇数，则用 $3a+1$ 代替 a 后转到第二步。

图 3: 两个例子

2.2.6 随机反馈迭代系统

也有两个例子：幸运轮盘机（混沌问题）和谢尔宾斯三角形的产生。

幸运轮盘机（混沌游戏）：



每一步 随机选择一个函数。

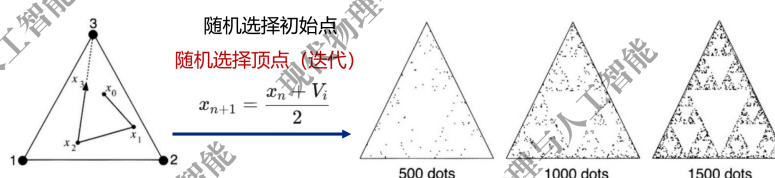
轮盘表示概率选择：

- 选择 f_1
- 选择 f_2
- 选择 f_3

可产生分形

通过“随机选择函数 + 迭代反馈”，来构建一个具有随机性但又有结构规律的动态系统

具体几何规则：



通过简单的随机迭代收缩映射，可以产生稳定的分形结构——谢尔宾斯基三角形

图 4: 两个例子

2.3 误差

2.3.1 误差的产生

误差产生主要有两种方式：超出了处理器能处理的数字位数（比如计算机只能保留 4 位小数，却在计算过程中出现了 5 位小数）；超出可读取的有效数字（受测量工具限制，只能获取有限位数的数据，无法获取无理数等数据）。

2.3.2 误差也能产生严重后果

开普勒天体运动模型的建立。

2.3.3 误差的传播与累积

初始的小误差可能导致大得多的最终误差（三体问题、SLAM 地图建图误、天气模型）。

下面针对 Logistic 模型来分析误差：

$$p_{n+1} = p_n + r p_n (1 - p_n)$$

其中 p_n 是相对人口数量

我们无法直接获得 p_n 的表达式，只能通过 n 次迭代才能获得。而在迭代过程中就会出现数字过长不得不省略的问题。

Lorenz 实验是指在中间计算过程中只是减少了小数精度，最终却对结果有很大影响。这也表明，只要是有限精度的计算，混沌的破坏作用就无药可治，系统的可预测性会被破坏。

3 经典分形和自相似

3.1 经典的分形场景

十进制系统，Cantor 集，Koch 集，Peano 曲线，Hilbert 曲线都是经典的分形系统。

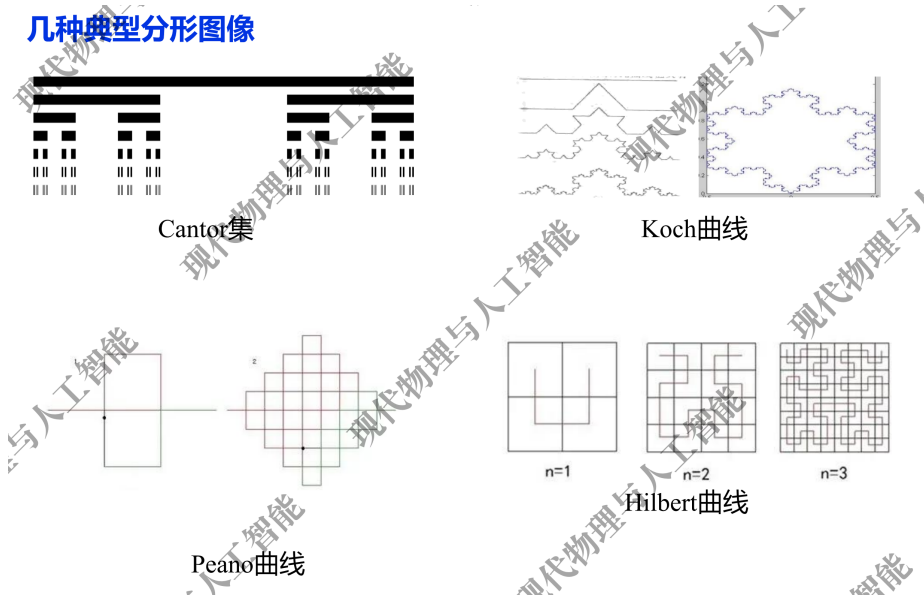


图 5: 经典分形图像

3.2 空间填充曲线

直观上，我们认为直线是典型的一维对象，而平面是典型二维对象。但是 Peano 曲线与 Hilbert 曲线则证明线段也可以是二维的。

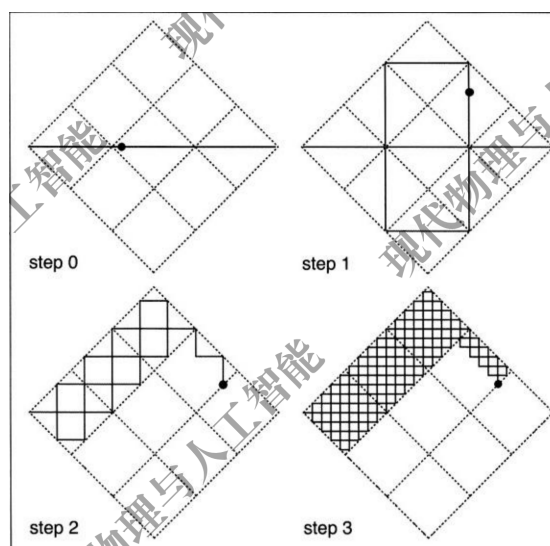


图 6: Peano 曲线

根据图中的变换规则，我们可以得到：1. 在第 k 步之后，直线段长度变为原来的 $\frac{1}{3^k}$ ，曲线总长度变为原来的 3^k 。它是一条不断递归弯曲的线，能够遍历正方形中的每一个点，所以其可以充满一个二维结构。注意，Peano 曲线是满射而不是双射（即正方形中的某个点可以对应着曲线中的很多点）。

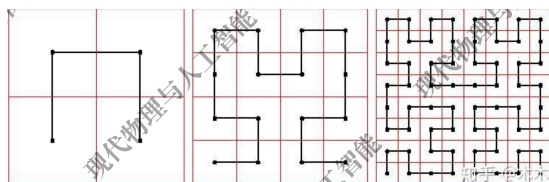


图 7: Hilbert 曲线

但是注意，并不是随意一条曲线就是可以平面填充的，比如 Z 字形曲线就不是一条平面填充曲线。

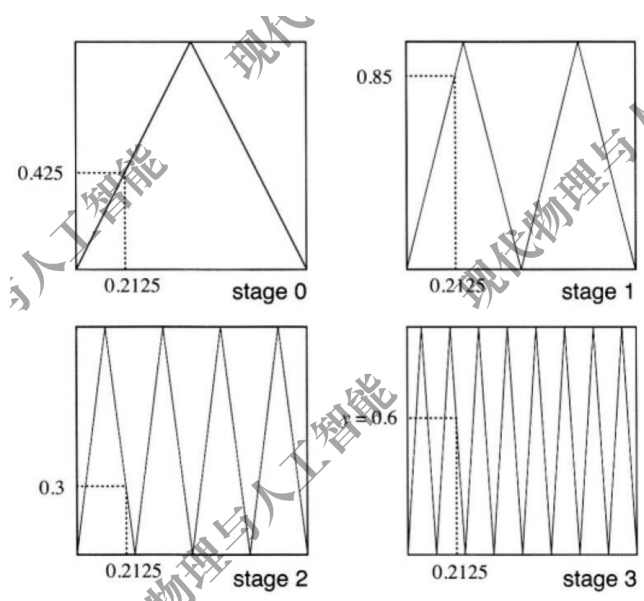


图 8: Z 字形曲线

如果用数学函数来描述生成过程，则引入一个帐篷变换

$$h(x) = \begin{cases} 2\text{frac}(x), & \text{frac}(x) \leq 0.5 \\ 2(1 - \text{frac}(x)), & \text{frac}(x) > 0.5 \end{cases}$$

则每一步构造的曲线形式为 $y_0(x) = h(x)$, $y_1(x) = h(2x)$, ..., $y_n(x) = h(2^n x)$, ... 其中 $x \in [0, 1]$ 。几乎所有点 x 对应序列 $\{y_i(x)\}_0^\infty$ 都没有极限。

3.3 曼德勃集合与 Julia 集

3.3.1 曼德勃集合

曼德勃集合：对 $z_{n+1} = z_n^2 + C$ ，当 $z_0 = 0$ 时，如果序列不发散（有界），则这个 C 属于曼德勃集合（ C 为复数）。

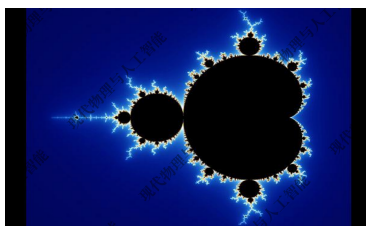


图 9: 曼德勃集合

3.3.2 Julia 集合

对 $z_{n+1} = z_n^2 + C$, 当 C 固定时, 最后的 Z 值有三种可能: 1. 趋向无穷 2. 趋向 0 3. Z 值是变化的。我们通过复数的模长来研究这个迭代 (以 $C = 0.3$ 为例):

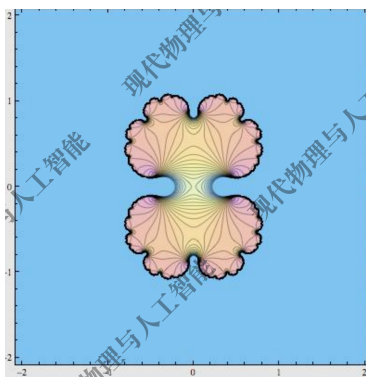
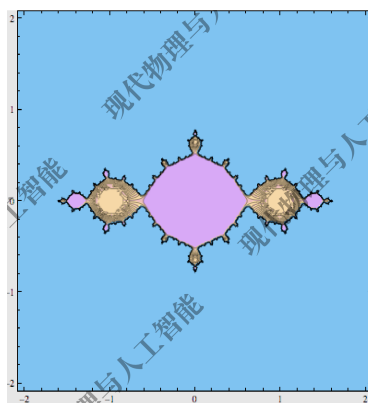


图 10: 12 次迭代后模长

上图中, 大部分区域的模长越来越大, 而原点附近四叶草区域内的模长并不大。上图也可以理解为随着迭代次数的增加, 复平面上各点模长的发散速度。

而有一些点随着迭代次数的增加并不会趋向无穷 (比如不动点), 我们把这些点组成的集合叫做 Julia 集。当 $C=0.3$ 时, 其 Julia 集是由一些弧点组成的, 我们无法画出。但是当 $C=-1$ 时, 它的 Julia 集是连通的。(中间黄色和紫色的点)。同时, C 也可以是复数, 例如 $0.2 + 0.5i$, 它的 Julia 集也是连通的。

图 11: $C=-1$ 时, 12 次迭代后模长

Julia 集的二分定理: 一个 Julia 集要么是完全连通的 (任意两点间有通路); 要么是完全不连通的 (全是孤立点)。

在研究 Julia 集时, 我们经常设定 $|C| < 2$, 所以如果一次迭代后的结果 $|z_n| > 2$, 那么 $|z_{n+1}| > |z_n|$, 后续一定是发散的。所以只要有一步 $|z_n| > 2$, 就一定是发散的。由此我们也可以得出另一种生成 Julia 集合的方式, 即要求无限迭代后模长仍不超过 2 的点。所以可以从半径为 2 的圆开始倒推, 进行反向迭代 (即先 $-C$, 再开根)。下面将展示 $C=-1$ 怎么求解。

首先画出半径为 2 的圆

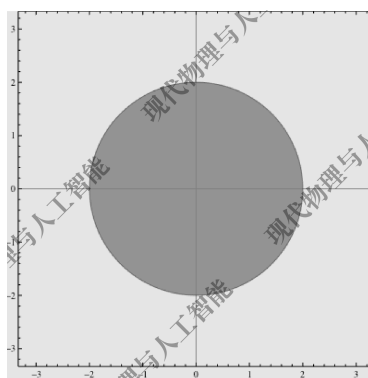


图 12: 半径为 2 的圆

然后进行 12 次反向迭代后可得

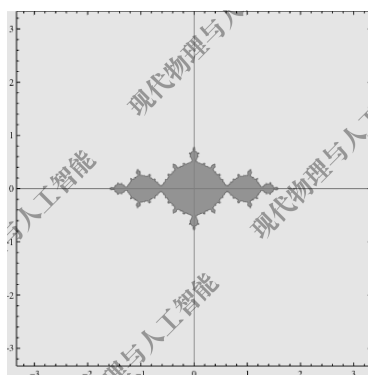
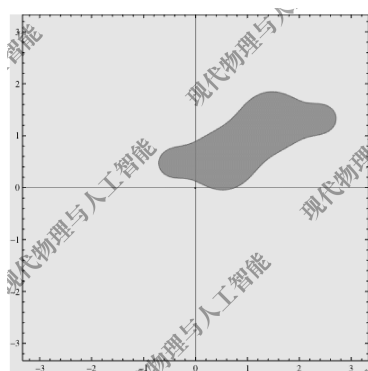


图 13: 反向迭代 12 次后

我们再考虑 $C = -1 - 0.9i$ 的情况，经过几次迭代后，得到如下图像（某次反向迭代开方之前的图像）：

图 14: $C = -1 - 0.9i$ 时

我们发现原点不在图像中，表明 0 并不属于它的 Julia 集。而一个不含原点的区域开方后一定会得到不连通的两块区域。说明该 Julia 集不连通，即到最后阴影的总面积越来越小，只剩下一些离散的点。推广到更一般的情况，如果我们想看一个 Julia 集是否连通，只需要看对初始值 0 迭代无数次，所得的模长是否趋向无穷大。如果你还有记忆的话，这就是曼德勃集合 (Mandelbrot)。

由于曼德勃集合可以包含于一个以原点为圆心，半径为 2 的圆内，所以常常假设 $C < 2$ 。曼德勃集合内的点对应一个连通的 Julia 集，集合外的点对应一个离散的 Julia 集。所以越靠近曼德勃集合边界的 Julia 集形状越

奇怪。曼德勃集合把 Julia 集中十分重要的零点信息汇集了起来，自然而然地归纳出了所有 Julia 集，是 Julia 集的缩略图。

3.4 毕达哥拉斯树

3.4.1 构造

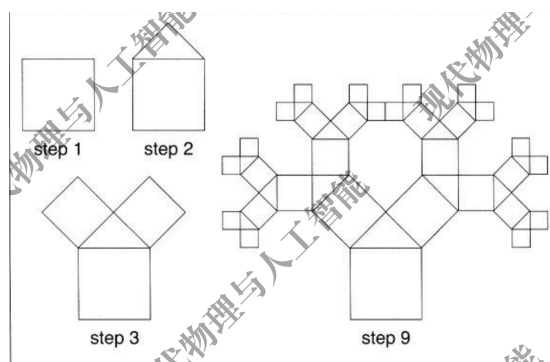


图 15: 毕达哥拉斯树的构造

3.4.2 不同形态

通过改变直角三角形的形态（直角边边长的变化）与生成方向（正方形哪个边上长出直角三角形）这两方面，可以得到不同形态的毕达哥拉斯树。

4 极限与自相似性

4.1 极限与分形图像

分形图像都是通过一个构造过程得到的。理想情况下，此过程应该是无限进行下去的，有限次产生的分形不是真正的分形图像。所以分形只存在于理想状态下。

设

$$x = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n], \quad a_i > 0 \ (i \geq 1)$$

情况1: $a_0 > 0$

$$\frac{1}{x} = [0; a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$$

情况2: $a_0 = 0$

$$x = [0; a_1, a_2, \dots, a_n]$$

$$\frac{1}{x} = [a_1; a_2, \dots, a_n]$$

情况3: $a_0 < 0$

$$\frac{1}{x} = [0; a_0, a_1, \dots, a_n]$$

图 16: 连分数的性质

4.2 连分数

4.2.1 连分数定义

首先我们要确定一点, 就是任意实数都可以表示成无穷级数的形式 $r = \sum_{i=0}^{\infty} a_i 10^{-i}$ 。例如: $\frac{57}{17} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}} = [3; 2, 1, 5]$ 。(注意一开始是分号) 常见的还有黄金分割 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = [1, 1, \dots]$ 。

4.2.2 连分数分类

分为有限连分数与无限连分数。其中所有有限连分数都表示一个有理数, 所有无限连分数都表示一个无理数。

4.2.3 连分数的性质

4.2.4 拓展：连分数的计算

对于有理数，可以直接通过分母除分子，然后化成真分数来计算，例如

$$\frac{57}{17} = 3 + \frac{6}{17} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{5}{6}} = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{5}}}$$

而对于无理数（我们可以只考虑能用整数二次方程算出的），我们只需把整数部分与小数部分拆开，再对小数部分取倒数，重复上述操作即可，例如：

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2} - 1) = 1 + \frac{1}{2 + (\sqrt{2} - 1)} = [1, 2, 2, \dots]$$

5 分形维数

5.1 自相似维数

尺度因子 r 表示经过一次操作后，每一最小单位的物块其边长变为了原来的几倍。子块数目 a 表示经过一次操作后，需要多少个原物块来组成新物块。此时其自相似维数 $D_r = \frac{\log(a)}{\log(\frac{1}{r})}$ 。例如，对 koch 曲线 scale 为 $\frac{1}{3}$ 来讲， $r = \frac{1}{3}, a = 4$ 。

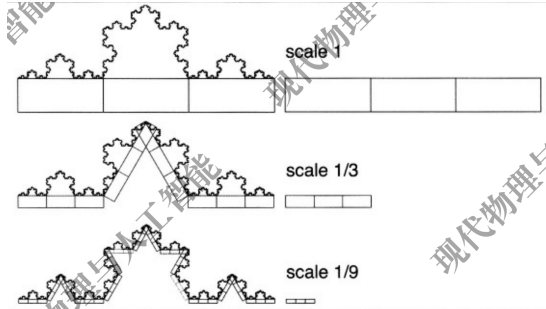


图 17: koch 曲线

对于几部分的尺度因子不一致的情况，我们通过计算

$$r_1^D + r_2^D = 1$$

其实，对尺度因子相同，分成 a 部分的情况，我们也可以这样计算，即

$$a * r^D = 1$$

定义 设 A 是 $\mathbb{R}^n$ 空间的任意非空有界子集, 对于任意 $r > 0$, $N_r(A)$ 表示用来覆盖 A 所需边长为 r 的 n 维立方体 (盒子) 的最小数目。若存在 d , 使得当 $r \rightarrow 0$ 时, 有

$$N_r(A) \propto 1/r^d$$

则称 d 为 A 的**盒计数维数**。

图 18: 盒维数定义

所以这个公式来计算自相似维数其实是全部适用的。

5.2 盒计数维数

5.2.1 定义

所以盒维数为 d 时, 有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{N_r(A)}{\frac{1}{r^d}} = k$$

经过变换得

$$d = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{N_r(A)}{\log(\frac{1}{r})}$$

式子里的 $N_r(A)$ 可以看作自相似维数中的 a 值

5.2.2 计算

由于很难直接计算, 所以可以以 $\log(\frac{1}{r})$ 为横坐标, $\log(N_r(A))$ 为纵坐标, 描点并计算斜率 (常用最小二乘法) 就可估计出盒维数。盒维数可以用于自相似形状, 非自相似形状, 甚至高维空间中的对象。

5.3 豪斯多夫维数 (Hausdorff)

5.3.1 定义

集合 F 的直径定义 (就是相距最远的两点之间的距离):

$$|F| = \sup\{|x - y| : x, y \in F\}$$

集合覆盖的定义: 对于 $U = \{U_i\}$ 是可数的子集族, 且 $\forall i, |U_i| < \delta$ 和 $F \subset \bigcup U_i$ 均成立, 则称 U 是 F 的一个 δ 覆盖。

定义:

$$H_{\delta}^s(F) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s \right\}$$

则对于给定的 F 和 s , $H_{\delta}^s(F)$ 是 δ 的减函数 (当 $\delta_1 < \delta_2$ 时, F 的 δ_1 覆盖包含于 F 的 δ_2 覆盖), 我们由此定义 $H^s(F) = \lim_{\delta \rightarrow 0} H_{\delta}^s(F)$ 。 $H^s(F)$ 可能是非负数或 $+\infty$, 称它为 F 的 s 维 Hausdorff 测度。当原物体比例扩大 λ 倍时, s 维 Hausdorff 测度扩大 λ^s 倍。

下面定义 Hausdorff 维数

定义 设集合 $F \subset \mathbb{R}^n$, 将 $H^s(F)$ 由 ∞ 阶跃到 0 的临界值 s_0 定义为 Hausdorff 维数, 记为 $D_H(F)$, 即

$$D_H(F) = \inf \{s : H^s(F) = 0\} = \sup \{s : H^s(F) = \infty\}$$

由于 Hausdorff 维度不易计算, 一般用盒维数、相似维数等进行计算。

图 19: 豪斯多夫维数

6 分形图像编码

6.1 分形空间定义

设 $\mathcal{H}(X)$ 是 X 的所有非空紧子集构成的集合, 距离 d 定义为:

$$\begin{aligned} d(x, B) &= \min_{y \in B} \{d(x, y)\}, \quad \forall x \in X, B \in \mathcal{H}(X) \\ d(A, B) &= \max_{x \in A} \{d(x, B)\}, \quad \forall A, B \in \mathcal{H}(X) \\ a \vee b &= \max\{a, b\}, \quad a, b \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

图 20: 距离 d 的定义

我们可以看出, 点与集合间距离是点到点距离的最小值; 集合与集合距离是点到集合距离的最大值, 且 $d(A, B) \neq d(B, A)$ 。

下面引入分形空间的概念:

定义 设 $A, B \in \mathcal{H}(X)$, 则 A 和 B 之间的 Hausdorff 距离定义为

$$h(A, B) = d(A, B) \vee d(B, A)$$

Hausdorff 距离为 $\mathcal{H}(X)$ 上的一个度量, 而度量空间 $(\mathcal{H}(X), h)$ 就被称为 **分形空间**。

图 21: 分形空间的定义

设 $f_n (n = 1, 2, \dots, N)$ 是完备度量空间 $(X; d)$ 上的一族压缩映射, 压缩因子 $0 \leq s_n \leq 1$,

定义 Hutchinson(哈钦森) 算子 $f : H(x) \rightarrow H(x)$

$$f(B) = \bigcup_{n=1}^N f_n(B), B \in H(x)$$

则 f 是 $(H(x), h)$ 上的压缩映射, 且满足

$$h(f(A), f(B)) \leq \max_n(s_n) * h(A, B), \forall A, B \in H(x)$$

此时 $f_n (n = 1, 2, \dots, N)$ 也够成了一个迭代函数系统。注意压缩映射具有唯一的不动点。

上述表述笔者表示看不懂, 虽然其数学概念较为抽象, 不过具体而言其实就是对原图形中的每个点分别过一遍 $f_n (n = 1, 2, \dots, N)$ 操作, 就能得到下一个迭代图形。例子是简单易懂的, 以 Koch 曲线为例:

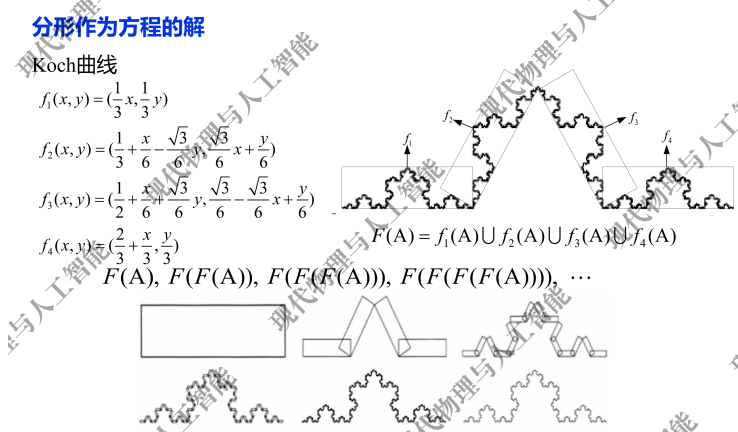


图 22: Koch 曲线的形成

6.2 分形图像的性质

1. 吸引子：对一个迭代系统来说，其 Hutchinson 算子的最终迭代结果与初始图形无关，都会收敛到一个固定的图形，此图形被称为迭代系统的吸引子。

2. 不变性：吸引子本身是该迭代系统的不动点，即对最终图像 E ，有 $f(E) = E$ 。

6.3 一种二维 IFS 的具体生成方法

其实就是用缩放旋转平移的方式来表达 $f_n(n = 1, 2, \dots, N)$ 。对压缩映射 w_i ，我们写成如下形式：

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_i \\ f_i \end{bmatrix}$$

令 $a_i = r_i \cos(\theta_i)$, $b_i = -q_i \sin(\varphi_i)$, $c_i = r_i \sin(\theta_i)$, $d_i = q_i \cos(\varphi_i)$ 。我们称 r_i, θ_i, e_i 为 x 的压缩因子，旋转角度与位移；我们称 q_i, φ_i, f_i 为 y 的压缩因子，旋转角度与位移。

我们用上述方法来表达 Koch 曲线时：

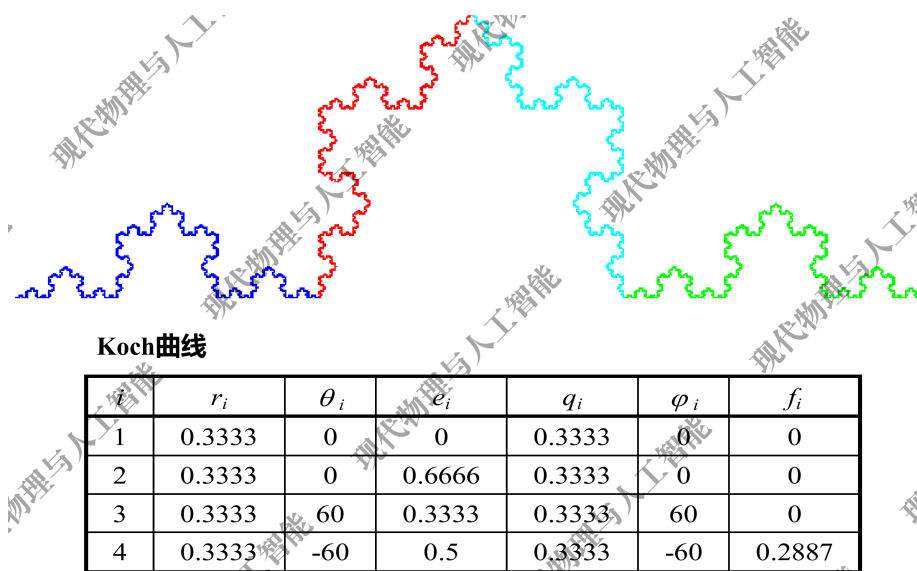


图 23: Koch 曲线的另一种表达方式

6.4 拼贴定理及其推论

定理 (拼贴定理) 设 $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$ 是一个双曲迭代函数系统, 压缩因子 $s < 1$, 吸引子为 E , 则对任意的非空集合 $A \in \mathcal{H}(X)$ 有

$$h(A, E) \leq \frac{1}{1-s} h(A, \bigcup_{i=1}^N f_i(A)).$$

利用拼贴定理, 可以得到如下的推论:

推论 设 $A \in \mathcal{H}(X)$, 则对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在双曲迭代函数系统 $\{X; f_1, f_2, \dots, f_N\}$

使得

$$h(A, E) < \varepsilon,$$

其中 E 是该双曲迭代函数系统的吸引子。

图 24: 拼贴定理与推论

该推论说明, 对于任意图像, 我们可以构造一个双曲迭代系统来无限逼近此图像, 这可以用来进行图像的压缩保存与生成。

6.5 分形图像编码过程

1. 压缩过程: 先将图像分块, 然后对每一个块进行各种变换 (压缩、旋转、平移、灰度变换等), 然后看和哪一个分块最累死, 并记录下变换过程和变换后的最佳匹配块的位置, 形成编码文件, 再对文件进行压缩保存。

2. 解压缩过程: 对文件进行解压缩形成编码文件, 然后对图像进行压缩过程中同样的分块, 之后对每一块进行记录下的变换并放到记录的最佳匹配块的位置, 并重复上述操作直到收敛为止。所得的图像就是原图像的一个近似。

7 混沌与人工智能概述

7.1 动力学系统

非线性动力学系统定义: 力或微分方程中含有坐标或速度的非线性项的系统, 例如:

$$m\ddot{x} = -kx - 2\beta\dot{x}^2$$

$$m\ddot{x} = -\frac{k}{x^2}$$

动力学系统主要有两类：微分方程（连续时间）和迭代反馈系统（离散时间）。其中迭代反馈系统在分形章节已进行了讲解。

动力学系统既有确定性（哈雷彗星、海王星的位置被预测、日月蚀），又有不可预测性（湍流、三体问题、天气系统）。

常微分方程可以分为自治方程与非自治方程：不显示含时间的是自治方程 ($m\ddot{x} = F(x, \dot{x})$)；显示含时间的是非自治方程 ($m\ddot{x} = F(x, \dot{x}, t)$)。

自治方程的一般形式：

◆ 自治常微分方程

$$\ddot{x} = f(x, \dot{x}) \xrightarrow{\begin{matrix} x_1 = x \\ x_2 = \dot{x} = \dot{x}_1 \end{matrix}} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = f(x_1, x_2) \end{cases}$$

2阶, 1维 1阶, 2维

例：受迫简谐振子方程

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0 \xrightarrow{\quad} \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{b}{m}x_2 - \frac{k}{m}x_1 \end{cases}$$

该方程组右侧 x_i 均为1次，因此称其为线性系统。

图 25: 自治方程的一般形式

非自治方程的一般形式：

7.2 相空间

相空间，也就是状态空间，是由广义坐标和广义动量（速度）张成的空间，也称相宇。例如下图的弹簧阻尼振子：

8 运动稳定性分析

8.1 非线性方程解的各种形式

先写出非线性方程的一般形式：

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), i = 1, 2, \dots, n$$

此方程的一个解就是指在 x - t 图像中的一条运动曲线。

◆ 非自治常微分方程

n 维非自治 $\xrightarrow{x_i = t, \dot{x}_i = 1}$ $n+1$ 维自治

杜芬 (Duffing) 方程

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx + \beta x^3 = F \cos \Omega t$$

$$x_1 = x, x_2 = \dot{x}$$

$$x_3 = \cos \Omega t, x_4 = \dot{x}_3$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 - \frac{\beta}{m}x_1^3 - \frac{\alpha}{m}x_2 + \frac{F}{m}x_3 \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = -\Omega^2 x_3 \end{cases}$$

◆ 一阶常微分方程组 $\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad i = 1, 2, \dots, n$

图 26: 非自治方程的一般形式

1. 定态解 (平衡点, 奇点)

$$\dot{x}_i = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

2. 发散解 x_i 之一或几个随时间无限地偏离初值。

3. 振荡解既不趋于无穷大, 也不终止于某一点, 而是在一定区域内无穷变化。以下情况都属于振荡解:

8.2 解的稳定性

Lyapunov 稳定性 (非线性稳定性) 的定义 (右上角的图中, 左边不是 Lyapunov 稳定, 右边是):

阻尼弹簧振子 $\ddot{x} + 2\beta\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

通解 $x = Ae^{\lambda t}$

代入方程 $\lambda^2 + 2\beta\lambda + \omega_0^2 = 0$ $\lambda = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2}$

当阻尼为正阻尼且很小时 $0 < \beta < \omega_0$ $\lambda = -\beta \pm i\omega, \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$

$$x_1 = x = Ae^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha)$$

$$x_2 = \dot{x} = Ae^{-\beta t} [-\beta \cos(\omega t + \alpha) - \omega \sin(\omega t + \alpha)]$$

$$= -\sqrt{\beta^2 + \omega^2} Ae^{-\beta t} \sin(\omega t + \alpha + \alpha_0)$$

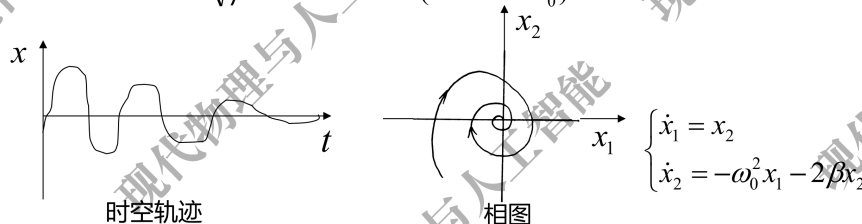


图 27: 弹簧阻尼振子系统

解的稳定性

Lyapunov稳定性定义:

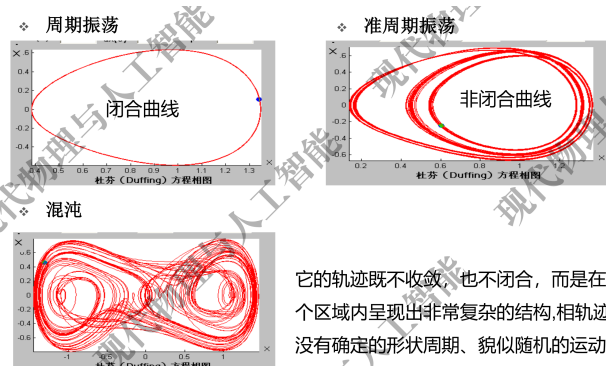
$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad \begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \mathbf{f} &= (f_1, f_2, \dots, f_n) \end{aligned}$$

❖(1) 设 $t = t_0$ 时方程的解为 $\mathbf{x}_0(t_0)$, t 时为 $\mathbf{x}_0(t)$, 另一受扰动而偏离它的解 t_0 时为 $\mathbf{x}(t_0)$, t 时为 $\mathbf{x}(t)$ 。如果对于任意小的数 $\varepsilon > 0$, 存在 $\eta > 0$, 使得当 $\|\mathbf{x}(t_0) - \mathbf{x}_0(t_0)\| < \eta$ 时, 必有 $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0(t)\| < \varepsilon, t_0 < t < \infty$, 则称解 $\mathbf{x}_0(t)$ 是Lyapunov意义下稳定的, 简称**Lyapunov稳定的**或稳定的。

图 29: Lyapunov 稳定性

Lyapunov 稳定表明在特殊解初始条件附近取的初始条件, 最终得到的解也在特殊解附近。

同时, 如果特殊解 $x_0(t)$ 本身是稳定的, 且 $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - x_0(t)\| = 0$, 则称 $x(t)$ 是渐进稳定的。(图中只有 2 是渐进稳定的, 其他不满足上述的解是不稳定的)



它的轨迹既不收敛, 也不闭合, 而是在一个区域内呈现出非常复杂的结构, 相轨迹没有确定的形状周期、貌似随机的运动

图 28: 振荡解的不同形式

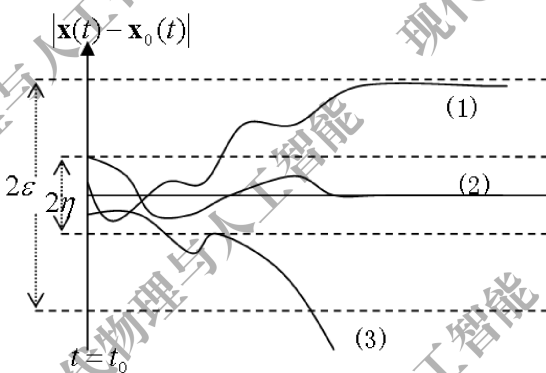


图 30: 渐进稳定的定义

8.3 线性稳定性分析

8.3.1 线性稳定性定理

线性稳定性定理: 设 $x_{i0}(t)$ 为方程的一个解 (参考解), 为研究该参考解的稳定性, 则选一个附近的解 $x_i(t) = x_{i0}(t) + \delta_i(t)$, 称扰动解。则有

$$\dot{x}_i(t) = \dot{x}_{i0}(t) + \dot{\delta}_i(t)$$

$$\dot{\delta}_i(t) = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_0 \delta_j$$

此式即为非线性方程组在参考态 $x_{i0}(t)$ 附近的线性化方程组。

Lyapunov 间接法:

若线性化方程的原点 $\delta_i = 0$ 是渐进稳定的, 则原非线性方程的参考态 $x_{i0}(t)$ 是渐进稳定的; 若线性化方程的原点 $\delta_i = 0$ 是不稳定的, 则原非线性方程的参考态 $x_{i0}(t)$ 是不稳定的。

8.3.2 线性化方程组的解及其稳定性

下面来对上面求得的线性化方程组求解 (只考虑二阶情况)

$$\begin{cases} \dot{\delta}_1 = \alpha_{11}\delta_1 + \alpha_{12}\delta_2 \\ \dot{\delta}_2 = \alpha_{21}\delta_1 + \alpha_{22}\delta_2 \\ \alpha_{ij} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_0 \end{cases}$$

由此得到特征矩阵 (雅可比矩阵) $\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$, 并构造出 $\tau = \alpha_{11} + \alpha_{22}$, $\Delta = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$ 。得到其特征矩阵的特征值 $\lambda_{1,2} = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4\Delta}}{2}$ 。

此时 $\delta_{1,2}$ 是 $e^{\lambda_1 t}$ 与 $e^{\lambda_2 t}$ 的线性组合。所以有:

❖ (1) 两特征根实部都是负的

$\lim_{t \rightarrow \infty} |\xi_i| = 0 \implies$ 原点 $\xi_i = 0$ 是渐进稳定的 $\implies$ 参考态 x_{i0} 也是渐进稳定的。

❖ (2) 两特征根中至少有一个实部为正

$\lim_{t \rightarrow \infty} |\xi_i| = \infty \implies$ 原点 $\xi_i = 0$ 是不稳定的 $\implies$ 参考态 x_{i0} 也是不稳定的。

❖ (3) 两特征根中至少有一个实部为零, 另一个实部为负

原点 $\xi_i = 0$ 是Lyapunov稳定的 $\implies$ 参考态 x_{i0} 处于临界情况。

图 31: 特征根分析

根据对稳定性的研究, 我们再把稳定解分为了结点 (两实根且符号一致)、焦点 (两复根)、中心 (两纯虚数根)、鞍点 (两实数根且符号不一致) 等。

注意线性稳定性定理只适用于分析非线性方程奇点及其附近的解的性质, 离奇点越远, 线性化误差越大。

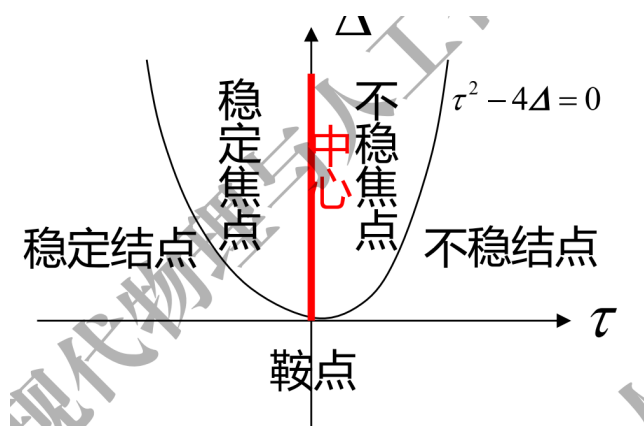


图 32: 奇点的不同分类

9 极限环——渐进稳定的周期震荡

定义：相空间里孤立的（极小临域内无其他闭轨道）闭曲线，称为极限环。需要注意，守恒的周期震荡 ($x(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$) 不是极限环（在闭曲线的极小临域内有其他闭轨道）。

9.1 极限环的稳定性

从极限环的内外两侧出发的任意曲线，随着 $t \rightarrow \infty$ ，都趋于该极限环，则极限环稳定，否则称为不稳定。在不稳定的情况中，如果有一侧（内/外）的任意曲线，随着 $t \rightarrow \infty$ ，趋于该极限环，另一侧并没有，则称为半稳定的极限环（也是一种不稳定的极限环）。

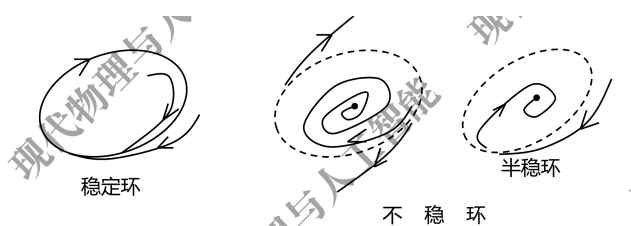


图 33: 极限环的稳定性

9.2 极限环的判定

庞加莱-班狄克生判据：

如果方程
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (\text{二维自治系统})$$

有一解的相轨迹总是局限于相平面中不包含任何奇点的有限区域D内，则此轨迹或者是一极限环，或者趋于一极限环。即在二维系统中，如果运动既不发散、又没有“停下来”的地方（没有奇点），那它就只能“绕圈”，最终形成周期运动

图 34: 庞加莱-班狄克生判据

通俗来讲，一般对极限环的判定过程是：先用极坐标表示相空间中的 $x_{1,2}$ ，然后算出其闭轨道（例如 $r = r_0$ ），并判断当 $r < r_0$ 时， r 是否增大； $r > r_0$ 时， r 是否减小。以 PPT 中的方程为例：

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2 - 1) \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2 - 1) \end{cases}$$

用极坐标表示得

$$\begin{cases} -r\sin(\theta)\dot{\theta} + \cos(\theta)\dot{r} = r\sin(\theta) - r\cos(\theta)(r^2 - 1) \\ r\cos(\theta)\dot{\theta} + \sin(\theta)\dot{r} = -r\cos(\theta) - r\sin(\theta)(r^2 - 1) \end{cases}$$

由于要对任意 θ 成立，则要让等式左右两侧 $\cos(\theta), \sin(\theta)$ 系数相同，得

$$\begin{cases} \dot{\theta} = -1 \\ \dot{r} = r - r^3 \end{cases}$$

由 $\dot{r} = 0$ 可得平衡态为

$$r_1 = 0, r_2 = 1$$

说明原方程的极限环是在 $r = 1$ 的圆环上，以 $\dot{\theta} = -1$ 的角速度匀速转动的。并且此时 $\dot{r} = r(1 - r^2)$ ，当 $r > 1$ 时， $\dot{r} < 0$ ， r 会缩减到 1；当 $r < 1$ 时， $\dot{r} > 0$ ， r 会增大到 1。说明此极限环是稳定的。

10 分岔

分岔问题是非线性问题

10.1 定义

分岔的定义：动态系统的定态行为随着系统参数的改变而发生质的变化。泛指在动力学系统中当控制参量改变时，其相图发生拓扑结构的突然变化（比如解的数目，解的稳定性等）。

例如弹性压杆超过压杆的临界负荷时发生弯曲就是一种分岔。

10.2 分岔的类型

我们知道方程组的雅可比矩阵特征值决定了系统的稳定性，所以我们可以根据雅可比矩阵特征值的变化类型将分岔分成 3 组类型：

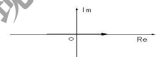
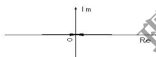
叉型分岔	霍普分岔	鞍结分岔
特征值 λ 为实数, λ 沿复平面的实轴穿过虚轴（反之亦然）。	特征值 λ 为复数, λ 沿左半平面, 穿过虚轴（反之亦然）。	特征值 λ 变为 0, 同时两个平衡点“产生或湮灭”
		

图 35: 分岔的类型

其中，叉型分岔与鞍形分岔是实分岔，而霍普分岔是一种复分岔。而且不管哪种分岔都应满足 $\frac{d(Re[\lambda(\mu)])}{d(\mu)} \neq 0$ （否则解的稳定性就不会发生变化）。

根据系统发生变化的类型也可分为动态分岔（解的类型发生变化，例如霍普分岔就让解从平衡点变为了周期解）与静态分岔（系统平衡点的数目和稳定性变化，例如叉型分岔与鞍形分岔）。

根据系统发生变化的范围也可分为局部分岔（静态分岔和霍普分岔）和全局分岔（除静态分岔和霍普分岔外其他的分岔）。

10.3 典型案例

以 PPT 中的方为例：

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x[\mu - (x^2 + y^2)] \\ \dot{y} = x + y[\mu - (x^2 + y^2)] \end{cases}$$

令 $\dot{x} = 0, \dot{y} = 0$ 得一个平衡点 $x = y = 0$, 对这个平衡点求其线性化方程组 (Lyapunov 间接法) 的雅可比矩阵得 $\begin{pmatrix} \mu & 1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}$, 得出特征值 $\lambda = \mu \pm i$ 。

由此可见当参数 μ 由负变正时, λ 分别从上下方穿过虚轴, 定态解 $(0,0)$ 由稳定的平衡点转变为不稳定的平衡点。

10.4 求解方法

庞加莱——伯克霍夫规范型方法:

对于微分方程 $\dot{x} = f(x), x \in R^n$ 且 $f(0) = 0$, 我们可以在原点附近找一个坐标的 r 次变换, 使得在新坐标系中, 微分方程可以化为下面的标准形式:

$$\dot{y} = Ly + g_2(y) + \dots + g_r(y) + o(\|y\|^r)$$

系统 $\dot{y} = Ly + g_2(y) + \dots + g_r(y)$ 称为原系统的一个 r 阶 PB 范式。形象地说, 就是用一个“聪明的变量变换”, 把系统简化到只保留“真正影响动力学的项”。(线性项 + 少量非线性项)

中心流形定理:

把一个对 n 维动力系统在奇点附近的各种性态研究转化为一个 m 维 ($m < n$) 中心流形上的流的方程去研究。

10.5 庞加莱映射

定义: 对一个连续运动的轨迹用一个截面 (庞加莱截面) 将其横截。在截面上, 轨迹下一次穿过截面的点 $X(n+1)$ 可以看成上一次穿过的点 $X(n)$ 的一种映射 $X(n+1) = f(X(n)) (n = 0, 1, \dots)$ 。这个映射就叫做庞加莱映射。庞加莱映射的核心思想就是把连续时间系统的运动, 转化为离散迭代问题。

当庞加莱截面上只有一个不动点和少数离散点时, 可判定运动是周期的; 当 Poincare 截面上是一封闭曲线时, 可判定运动是准周期的; 当 Poincare 截面上是成片的密集点, 且有层次结构时, 可判定运动处于混沌状态。

10.6 自然界中的分岔现象

水的固液气态变化、房屋高楼的倒塌、沙丘的起伏、管乐/弓弦乐/所有的噪音产生/震颤/“捕食者”振荡/风的成因 (霍普分岔)。

11 混沌

11.1 混沌的发现

庞加莱：确定性动力学系统的某些解有不可预见性。（与之相对的是拉普拉斯兽）；杜芬方程是混沌学研究中的常见方程；洛伦兹（此洛伦兹非彼洛伦兹）通过对天气的简化模型的研究，在计算机上发现了似随机的运算结果，即“混沌”；伊依在研究太阳系时得到了一种简单的吸引子，解决了太阳系的稳定性问题；茹勒和塔肯斯引入了“奇怪吸引子”概念；李天岩和约克揭示了从有序到混沌的演化过程，提出了“Chaos/混沌”一词；Logistic模型（人口方程）中包含了分岔和混沌；

菲根鲍姆发现了在倍周期分岔中的标度性和普适常数。菲根鲍姆常数描述了倍周期分岔之间间距的缩放规律，其值约为 4.6692，即有 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n - r_{n-1}}{r_{n+1} - r_n} = 4.6692\dots$ ， r_i 为每次分岔时的参数值。

11.2 混沌的定义

混沌是“无序中的有序”，有序是指其确定性，无序是指其最终结果的不可预测性。

作为一个科学概念，混沌是指一类确定性非线性系统长期动力学行为所表现出的似随机性。

11.3 混沌的特征

对初始条件的敏感性（蝴蝶效应）、不可预测性（三体问题）、有界性和遍历性（始终局限在一个特定区域，整体稳定，在有限时间内会到混沌区域内每一个状态点）、自我相似性（分形）、非周期性（功率谱的连续与宽频带，类随机）

11.4 走向混沌的道路

(1) 倍周期分岔进入混沌

一个系统，在一定条件下，经过周期加倍，会逐步丧失周期行为而进入混沌。

(2) 阵发混沌进入混沌

阵发混沌是指系统从有序向混沌转化时，在非平衡非线性的条件下，某些参数的变化达到某一临界阈值时，系统会时而有序，时而混沌，在两者之间振荡，有关参数继续变化，整个系统会由阵发混沌发展为混沌。

(3) 茹勒—泰肯 (Ruelle—Takens) 道路

所谓茹勒—泰肯道路，就是指只要系统有三个以上的频率互相耦合时，系统就出现混沌现象。

图 36: 三条不同的道路

下面介绍一下倍周期分岔现象：

对于 Logistic 模型： $x_n = \lambda x_{n-1}(1 - x_{n-1})$ 。当 $1 < \lambda < 3$ 时，不管初值是多少，最终会到一个确定值 $x_\infty = 1 - \frac{1}{\lambda}$ ，这个值就叫做周期/不动点，表明每年人口是一样的；当 $\lambda > 3$ 时，只要初值稍有变化，就回不到原先的周期了。例如初值是 0.7 时是周期一，0.699 就出现周期二了（此周期最终会在两个点之间周期性振荡）。随着 λ 继续增加时，周期二也会不稳定，分裂成周期四。后面会继续随着 λ 的增大而迭代下去，直至 λ_∞ 时，周期变为无穷大，

11.5 ”有趣的”吸引子

吸引子定义：是指非线性系统最终形成的运动状态在相空间中的不变流形和点集。

相空间中的其余点（运动状态）都会被吸引到这些点集或不变流形中，故称为吸引子。通俗来讲，就是相空间中的图形，会把系统的不同运动状态都吸引到这个图形里。

吸引子的一种分类如下：

1. 定态——相空间的定点吸引子（运动状态可预测）

(有阻尼单摆方程)

2. 周期振荡——极限环吸引子 (运动状态可预测)

(范德玻耳方程)

3. 混沌态——奇怪吸引子 (运动状态不可预测)

(洛伦兹方程)

奇怪吸引子的一个例子就是洛伦兹吸引子

洛伦兹吸引子的数学模型

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \sigma(x - y) \\ \frac{dy}{dt} &= -rx - y - xz \\ \frac{dz}{dt} &= xy - bz\end{aligned}$$

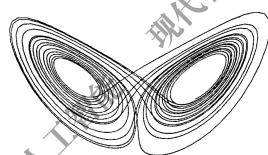


图 37: 洛伦兹吸引子

11.6 混沌在现代科技的应用

通信领域 (利用混沌信号进行保密通信)、气象学领域 (天气预报)、医学领域 (心肌活动, 脑电, 肌电)、经济学领域 (比较困难)、生物学领域 (种群消长, 传染病防控, 渔获量)。