

概率统计与随机过程 知识串讲+例题讲解

2026.07.03

人工智能2501 范晨昊

【STAGE 0】这门课到底学了什么

1. 概率论：通过理论形式揭示随机现象的数学原理
 - 事件、概率的运算
 - 一维随机变量和常见一维随机分布
 - 多维随机向量和常见多维随机分布
 - 数学期望、方差、协方差、相关系数
 - 大数定律、中心极限定理
2. 数理统计：基于数据做出合理的推断和预测
 - 统计量
 - 常见随机抽样分布
 - 参数估计和衡量
 - 区间估计
 - 假设检验
3. 随机过程：描述并预测随机系统随时间的演变规律
 - 随机过程的表示方法
 - 随机过程的数字特征
 - 泊松过程、布朗运动
 - 平稳过程的谱密度和自相关函数

往年的考试占比

- 概率论：大约25%
- 数理统计：大约45%
- 随机过程：大约30%

你需要学习什么

- 知识和应用
- **如何使用计算器**

【STAGE 1】重走概率人生路

知识点

- 什么是随机试验？什么是随机事件？
- 事件的运算（重点：**互斥事件与对立事件**）
 - $A = AB + \overline{A}B$
 - $B \subset A$ 时有 $AB = B$

- $A - B = A - AB = A\overline{B}$
- 随机事件的概率
 - 古典概型
 - 几何概型
- 概率的性质
 - 介于 $[0, 1]$ 之间
 - 如果 $A \subset B$, 那么 $P(B - A) = P(B) - P(A)$
 - 互斥完备事件组
 - 容斥原理 $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- 条件概率和乘法公式
 - $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$
- 全概率公式与贝叶斯公式
 - $P(A) = \sum_{i=1}^n P(B_i)P(A|B_i)$
 - $P(B_i|A) = \frac{P(AB_i)}{P(A)}$
- 独立性
 - A, B 独立当且仅当 $P(AB) = P(A)P(B)$
 - 对立事件组和原事件组的独立性

例题

【EX 1】设 A, B, C 为三个事件，表示下面几个事件

- A, B 发生且 C 不发生
- A, B, C 都发生
- A, B, C 中至少有一个发生
- A, B, C 中至多有两个发生

【EX 2】设袋中有红、白、黑球各1个，从中有放回的抽取球，每次取一个直到三种颜色都取到则停止。则取球次数恰好为 4 的概率为 ()

【EX 3】设随机事件 A, B ，且 $0 < P(A), P(B) < 1$ ，且 $P(A|B) = 1$ ，则下面四个命题的真值为

- $P(\overline{B}|\overline{A}) = 1$
- $P(A|\overline{B}) = 1$
- $P(A \cup B) = 1$
- $P(B|A) = 1$

【EX 4】设 A, B 是任意两个随机事件，且 $0 < P(A) < 1$ ，证明 $P(B|A) = P(B|\overline{A})$ 的充分必要条件为事件 A, B 独立。

【STAGE 2】随机变量的青春

知识点

- 随机变量与分布函数

- 随机变量 X
- 分布函数 $F(x) = P(X \leq x)$
 - 单调不减
 - 有界
 - $F(\pm\infty)$
 - 右连续
- 分布函数求概率 $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$
- 离散型随机变量
 - 分布律
 - 两点分布
 - 二项分布 $B(n, p)$
 - 最可能值出现在 $\lfloor (n+1)p \rfloor$
 - 泊松分布 $P(\lambda)$
 - 泊松近似定理
 - 几何分布 $Ge(p)$
- 概率密度
 - 和分布函数的关系 $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$
 - 性质
 - 非负
 - 归一化
- 连续型随机变量
 - 概率密度求概率 $P(a < X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$
 - 均匀分布 $U[a, b]$
 - 正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$
 - 概率密度函数为 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
 - 标准正态分布 $N(0, 1)$ 的转化 $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$
 - $\Phi(x), \varphi(x)$
 - 指数分布 $Exp(\lambda)$
- 随机变量函数的分布 $Y = g(X)$
 - 离散型
 - 连续型
 - 分布函数法 $F_Y(y) = P(g(X) \leq y) = \int_{g(x) \leq y} f(x)dx$
 - 反函数法
 - 泊松分布、正态分布的可加性
 - $P(a) + P(b) = P(a + b)$
 - $aN(\mu_1, \sigma_1^2) \pm bN(\mu_2, \sigma_2^2) = N(a\mu_1 \pm b\mu_2, a^2\sigma_1^2 + b^2\sigma_2^2)$

分布	符号	参数	分布律或概率密度	数学期望	方差
0-1 分布	$b(1, p)$	$0 < p < 1$	$P\{X = k\} = p^k (1-p)^{1-k}$ $k = 0, 1$	p	$p(1-p)$
二项分布	$B(n, p)$	$n \geq 1$ $0 < p < 1$	$P\{X = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ $k = 0, 1, \dots, n$	np	$np(1-p)$
几何分布	$P(\lambda)$	$0 < p < 1$	$P\{X = k\} = p(1-p)^{k-1}$ $k = 1, 2, \dots$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$
超几何分布	$H(N, M, n)$	N, M, n $n \leq M$	$P\{X = k\} = \frac{C_M^k C_{N-M}^{n-k}}{C_N^n}$ $k = 0, 1, \dots, n$	$\frac{nM}{N}$	$\frac{nM}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \left(\frac{N-n}{N-1}\right)$
泊松分布	$P(\lambda)$	$\lambda > 0$	$P\{X = k\} = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ $k = 0, 1, \dots$	λ	λ
均匀分布	$U(a, b)$	$a < b$	$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x < b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布	$E(\lambda)$	$\lambda > 0$	$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
正态分布	$N(\mu, \sigma^2)$	μ, σ^2 $\sigma > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	μ	知乎 σ^2 @叁晟

例题

【EX 5】设 $f(x) = Ce^{-x^2+x}$ 是随机变量 X 的概率密度，求 C 的值

【EX 6】设随机变量 $X = N(\mu, \sigma^2)$ ，随着 σ 的增大，概率 $p = P(|X - \mu| < \sigma)$ 的变化趋势为 ()

【EX 7】设随机变量 $X \sim U[2, 5]$ ，现在对 X 进行三次独立观测，求至少有两次观测值大于 3 的概率

【EX 8】设随机变量 $X \sim Exp(2)$ ，证明 $Y = 1 - e^{2X} \sim U[0, 1]$

【STAGE 3】随机向量彼此陪伴

知识点

- 随机向量
 - 联合分布函数 $F(x, y)$
 - 离散型随机向量的联合分布律
 - 连续型随机向量的联合概率密度
- 边缘分布
 - $F_X(x), F_Y(y)$
 - 边缘分布律
 - 边缘概率密度

- $f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$
- $f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$
- 常见二维分布
 - 二维均匀分布
 - 二维正态分布 $N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho)$
 - $(X, Y) \sim N(\mu_1, \mu_2; \sigma_1^2, \sigma_2^2; \rho) \Rightarrow X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$
- 条件分布
 - 条件分布律
 - 条件概率密度
 - 固定 $Y = y$ 有 $f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)}$
 - 固定 $X = x$ 有 $f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)}$
- 随机变量的独立性
 - $F_X(x)F_Y(y) = F(x, y)$
 - $f_X(x)f_Y(y) = f(x, y)$
- 随机向量函数的分布 $Z = g(X, Y)$
 - 离散型随机向量
 - 连续型随机向量 $F_Z(z) = P(g(X, Y) \leq z) = \int_{g(x, y) \leq z} f(x, y) dx dy$
 - 卷积公式, 当 $Z = X + Y$ 时有 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, z-x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y, y) dy$
 - 商公式, 当 $Z = X/Y$ 时有 $f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz, y) dy$
 - Jacobi矩阵公式法
 - max, min 函数
 - $F_{\max}(z) = F_{X_1}(z)F_{X_2}(z) \cdots F_{X_n}(z)$
 - $F_{\min}(z) = 1 - [1 - F_{X_1}(z)][1 - F_{X_2}(z)] \cdots [1 - F_{X_n}(z)]$

例题

【EX 9】设随机变量 X, Y 相互独立, 并且 X 的概率分布列为 $P\{X = 1\} = P\{X = -1\} = \frac{1}{2}$, 且 $Y \sim P(\lambda)$, 求 $Z = XY$ 的概率分布。

【EX 10】设随机向量 (X, Y) 的概率密度为

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 2x \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

求 X, Y 的边缘概率密度, 并求 $Z = 2X - Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$ 。

【EX 11】设随机向量 (X, Y) 在区域 G 上服从均匀分布, 其中 G 是由 $x - y = 0, x + y = 2, y = 0$ 围成的闭区域, 求 $f_{X|Y}(x|y)$

【EX 12】某种电子元件的寿命 (单位: 小时) 近似服从 $N(160, 20^2)$, 随机挑选4只, 求其中没有一只寿命小于 $180h$ 的概率。

【STAGE 4】TA们的数字特征

知识点

- 数学期望

- 离散型 $E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$
- 连续型 $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$
- 连续型函数 $E(g(x)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f(x) dx$
- 多元型 $E(g(X, Y)) = \iint_{\mathbb{R}^2} g(X, Y) f(x, y) dx dy$
- 性质
 - $E(C) = C$
 - $E(CX) = CE(X)$
 - $E(X \pm Y) = E(X) \pm E(Y)$
 - $[E(XY)]^2 \leq E(X^2)E(Y^2)$

- 方差

- $D(X) = E[X - E(X)]^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$
- 性质
 - $D(C) = 0$
 - $D(CX) = C^2 E(X)$
 - 若 X, Y 独立, 那么 $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y)$

- 协方差与相关系数

- $Cov(X, Y) = E[(X - E(X))[Y - E(Y)]] = E(XY) - E(X)E(Y)$
- 协方差的性质
 - $Cov(X, X) = D(X)$
 - $Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$
 - $Cov(X_1 \pm X_2, Y) = Cov(X_1, Y) \pm Cov(X_2, Y)$
 - $D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2Cov(X, Y)$
- 相关系数 $\rho_{XY} = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{D(X)D(Y)}}$
 - 反映线性关系时, $|\rho| = 1$
 - 反映相互独立性时, $\rho = 0$ (不相关)
 - 正态向量的分量相互独立当且仅当 $\rho = 0$

- 矩

- 中心矩 $a_k = E(X^k)$
- 原点矩 $\mu_k = E[X - E(X)]^k$

- 常见分布的数学性质

常用分布的数学期望和方差

分 布	分布列 p_k 或概率密度 $f(x)$	期望	方差
0 ~ 1 分布	$P\{X=k\} = p^k (1-p)^{1-k}$	p	$p(1-p)$
二项分布 $B(n, p)$	$P\{X=k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$
泊松分布 $\pi(\lambda)$	$P(X=k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$	λ	λ
几何分布 $G(p)$	$P\{X=k\} = (1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{(1-p)}{p^2}$
正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$	μ	σ^2
均匀分布 $U(a, b)$	$f(x) = \frac{1}{b-a} \quad a < x < b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$
指数分布 $E(\lambda)$	$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad x \geq 0$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$
$\chi^2(n)$ 分布	不 记	n	$2n$

<https://blog.csdn.net/wangqingbang>

例题

【EX 13】从西交到市中心的旅游车一共载有 20 位乘客从西交发车，沿途有 10 个车站，每到达一个车站如果没有旅客下车那么不停车。设 X 表示停车次数，假设每位旅客在各个车站下车的概率是均等的，求 $E(X)$ 。

【EX 14】设随机变量 $X_1, X_2, X_3 \sim P(\lambda)$ 且相互独立，令 $Y = \frac{1}{3}(X_1 + X_2 + X_3)$ ，求 $E(Y^2)$

【EX 15】设随机向量 $(X, Y) \sim N(0, 1; 0, 4; \rho)$ ，且 $D(2X - Y) = 1$ ，求 ρ

【EX 16】设随机变量 $X \sim N(0, 1)$ ，且 $Y = X^2$ ，判断 X, Y 的不相关性和独立性。

【STAGE 5】大数的极限到此为止

知识点

- 几种概率收敛
 - 依概率收敛
 - 依分布收敛
 - 均方收敛
 - 几乎处处收敛
- 切比雪夫不等式 $P(|X - E(X)| \geq \varepsilon) < \frac{D(X)}{\varepsilon^2}$
- 切比雪夫大数定律
 - X_i 期望、方差都有上界，相互独立

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

- 伯努利大数定律
- 辛钦大数定律
 - X_i 独立同分布, 期望为 μ

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \mu \right| < \varepsilon \right\} = 1$$

- 列维-林德伯格中心极限定理
 - X_i 独立同分布, 期望为 μ , 方差 σ 有界

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x \right\} = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

- 棣莫弗-拉普拉斯中心极限定理
 - $X_i \sim N(n, p)$ 时的列维-林德伯格中心极限定理
- 中心极限定理实际上表明了一个重要的近似分布

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim N(n\mu, n\sigma^2)$$

例题

【EX 17】设随机变量 X, Y 的期望分别为 $-2, 2$, 方差分别为 $1, 4$, 相关系数为 0.5 。使用切比雪夫估计下述概率的上界

$$P(|X + Y| \geq 6)$$

【EX 18】设 $\{X_n, n = 1, 2, \dots\}$ 独立同分布, 服从参数为 λ 的泊松分布, 对这个随机变量序列应用列维-林德伯格中心极限定理。

【EX 19】设 $X_1, X_2, \dots, X_n$ 独立同分布, 且 $E(X_i) = 0$, 求

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P \left\{ \sum_{i=1}^n X_i < n \right\}$$

【EX 20】某游戏在挂机期间有 50 条生产线处于生产状态, 每分钟产出物品的数量服从参数为 $\lambda = 0.05$ 的泊松分布, 使用中心极限定理估计每分钟产数总和大于 3 的概率。

【STAGE 6】于是他重新踏上数理统计之路

知识点

- 样本与总体

- 样本是随机变量 X ，其观测值是具体的数 x
- 样本联合分布函数、联合概率密度
- 经验分布函数
- 统计量：不含未知参数的样本函数
 - 样本均值 $\bar{X}$
 - $E(\bar{X}) = \mu, D(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n}$
 - 样本方差 S^2
 - $E(S^2) = \sigma^2$
 - 样本标准差 S
 - 样本矩 A_k, B_k
 - $E(A_k) = \alpha_k$
 - 顺序统计量 $X_{(k)}$
- Γ 分布： $X \sim \Gamma(\alpha, \lambda)$
 - $E(X) = \frac{\alpha}{\lambda}, D(X) = \frac{\alpha}{\lambda^2}$
 - 可加性
- χ^2 分布： $\chi^2 \sim \chi^2(n)$
 - $E(X) = n, D(X) = 2n$
 - 可加性
 - n 个标准正态变量的平方和 $\chi^2 = \sum_{i=1}^n X_i^2$ ，其中 $X_i \sim N(0, 1)$
- t 分布： $T \sim t(n)$
 - $E(X) = 0, D(X) = \frac{n}{n-2} (n \geq 3)$
 - 极限分布为 $N(0, 1)$
 - 正态分布和 χ^2 分布的商 $T = \frac{X}{\sqrt{Y/n}}$ ，其中 $X \sim N(0, 1), Y \sim \chi^2(n)$
- F 分布： $F \sim F(n_1, n_2)$
 - 倒数性质 $\frac{1}{F} \sim F(n_2, n_1)$
 - χ^2 分布的商 $F = \frac{X/n_1}{Y/n_2}$ ，其中 $X \sim \chi^2(n_1), Y \sim \chi^2(n_2)$
- 分位数（上侧分位数）： $P(X > x_\alpha) = 1 - \alpha$
- 正态总体的抽样分布
 - 单正态总体：总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，样本数为 n
 - $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$
 - $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
 - $\frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$
 - $\bar{X}$ 与 S^2 相互独立
 - 双正态总体：总体 $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2), Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ ，样本数为 n_1, n_2
 - $\frac{S_1^2/\sigma_1^2}{S_2^2/\sigma_2^2} \sim F(n_1-1, n_2-1)$
 - 方差相同时 $\frac{(\bar{X} + \bar{Y}) - (\mu_1 + \mu_2)}{S_W \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \sim t(n_1 + n_2 - 2)$ ，其中

$$S_W = \frac{(n_1 - 1)S_1^2 + (n_2 - 1)S_2^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

例题

【EX 21】快速指出下述变量的分布，假定出现的都是总体的简单随机样本

- $X \sim N(0, 2^2)$, 随机变量 $Y = \frac{X_1^2 + \cdots + X_{10}^2}{2(X_{11}^2 + \cdots + X_{15}^2)}$
- $X \sim t(n)$, 随机变量 $Y = \frac{1}{X^2}$
- $X \sim N(1, \sigma^2)$, 随机变量 $Y = \frac{X_1 - X_2}{|X_3 + X_4 - 2|}$
- $X \sim N(0, 1)$, 随机变量 $Y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{10} X_i^2 + \sum_{i=1}^5 X_{2i-1} X_{2i}$

【EX 21】的答案依次为 $F(10, 5), F(n, 1), t(1), \chi^2(5)$

【EX 22】设 $X_1, X_2, \cdots, X_5$ 来自总体 $N(0, 2)$ 的简单随机样本，且 $Y = \frac{a(X_1 + X_2)}{\sqrt{X_3^2 + X_4^2 + X_5^2}}$ 服从 t 分布，求 a 的值。

【EX 23】设总体 $X \sim N(0, 1)$ ，其简单样本 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 的样本均值和样本方差分别为 $\bar{X}, S^2$ 。现在独立的得到另一观测值 X_{n+1} ，证明统计量

$$Y = \frac{X_{n+1} - \bar{X}}{S} \sqrt{\frac{n+1}{n}} \sim t(n-1)$$

【EX 24】设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，从该总体中抽取简单随机样本 $X_1, X_2, \cdots, X_{2n}$ ，其样本均值为 $\bar{X}$ ，求下列统计量的数学期望

$$Y = \sum_{i=1}^n (X_i + X_{n+i} - 2\bar{X})^2$$

【EX 25】设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 来自 $N(0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，令 $\bar{X}_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k X_i (1 \leq k \leq n)$ ，证明

$$\text{Cov}(\bar{X}_k, \bar{X}_{k+1}) = \frac{\sigma^2}{k+1}$$

【EX 26】在总体 $N(\mu, \sigma^2)$ 中抽取一些容量为 16 的简单样本，其中 μ, σ^2 未知。求 $P\left(\frac{S^2}{\sigma^2} \leq 2.041\right)$ 和 $D(S^2)$ 。

【EX 26】中，给定数据 $\chi_{0.01}^2(15) = 30.615$

【STAGE 7】估计大概应该可能

知识点

- 点估计的概念 $\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$

- 矩估计法
 - 检查有 k 个未知参数
 - 构造 k 个方程 $\alpha_i(\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k) = A_i$
 - 解方程组, 得到**矩估计量**
 - 二阶矩存在时, $\bar{X}, \sqrt{B_2}$ 是 μ, σ 的矩估计量
- 最大似然估计法
 - 构造似然函数 $L = \prod_{i=1}^n p(x_i; \theta)$ 或 $L = \prod_{i=1}^n f(x_i; \theta)$
 - 对 L 或 $\ln L$ 求偏导, 令偏导为 0。在某些特殊情况下, 根据似然函数的定义式, 直接求使得 $\max L$ 或 $\max \ln L$ 的 $\hat{\theta}$
 - 解方程, 得到**最大似然估计量**
 - 二阶矩存在时, $\bar{X}, \sqrt{B_2}$ 是 μ, σ 的最大似然估计量
- 估计量的评选标准
 - 无偏性: $E(\hat{\theta}) = \theta$
 - 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} E(\hat{\theta} - \theta) = 0$, 称之为渐进无偏估计量
 - $\bar{X}$ 是 μ 的无偏估计
 - S^2 是 σ^2 的无偏估计
 - A_k 是 α_k 的无偏估计
 - 有效性: $D(\hat{\theta})$ 尽可能小
 - $\bar{X}$ 是 μ 的最有效线性无偏估计量
 - 相合性: $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon) = 1$
 - 如果 $\lim_{n \rightarrow +\infty} E[(\hat{\theta} - \theta)^2] = 0$, 称之为均方相合估计量
- 区间估计的概念 $P(\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2) = 1 - \alpha$, 称之为置信度为 $1 - \alpha$ 的置信区间
 - 可靠性和精度的权衡
- 正态总体的区间估计
 1. 找到一个枢轴量 $Z = Z(X_1, X_2, \dots, X_n; \theta)$
 2. 给定置信度 $1 - \alpha$, 定出两个常数 a, b 使得 $P(a < Z < b) = 1 - \alpha$
 3. 从不等式 $a < Z < b$ 得到等价的 $\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2$
- 常见的单正态总体枢轴量构造
 - $U = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{\sigma} \sim N(0, 1)$
 - $T = \frac{\sqrt{n}(\bar{X} - \mu)}{S} \sim t(n-1)$
 - $\chi^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \right)^2 \sim \chi^2(n)$
 - $\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$
 - 双正态总体同理

待估参数	条件	统计量	置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间
μ	σ^2 已知	$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0,1)$	$(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}z_{\frac{\alpha}{2}})$
	σ^2 未知	$\frac{\bar{X}-\mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$	$(\bar{X} - \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1), \bar{X} + \frac{S}{\sqrt{n}}t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1))$
σ^2	μ 已知	$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \sim \chi^2(n)$	$(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n)})$
	μ 未知	$\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1)$	$(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)S^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)})$

CSDN @Douglassssssss

待估参数	条件	统计量	置信度为 $1-\alpha$ 的双侧置信区间
$\mu_1 - \mu_2$	σ_1^2, σ_2^2 已知	$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}} \sim N(0,1)$	$(\bar{X} - \bar{Y} - z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}, \bar{X} - \bar{Y} + z_{\frac{\alpha}{2}} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}})$
	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$ 未知	$\frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} S_w} \sim t(m+n-2)$	$(\bar{X} - \bar{Y} - S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2), \bar{X} - \bar{Y} + S_w \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(m+n-2))$
$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$	μ_1, μ_2 未知	$\frac{S_1^2/S_2^2}{\sigma_1^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$	$(\frac{S_1^2/S_2^2}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)}, \frac{S_1^2/S_2^2}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)})$

CSDN @Douglassssssss

例题

【EX 27】设总体 $X \sim U[a, b]$ 有样本 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ，求 a, b 的矩估计量和最大似然估计量。

【EX 28】设总体 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \alpha x^{\alpha-1} e^{-\lambda x^\alpha}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

其中 $\lambda > 0$ 未知， $\alpha > 0$ 已知。根据来自总体的简单样本 $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 求最大似然估计量 $\hat{\lambda}$

【EX 29】设总体 $X \sim U[0, \theta]$ ， $\theta(\theta > 0)$ 未知， (X_1, X_2, X_3) 是来自总体的样本。设估计量

$$\hat{\theta}_1 = \frac{4}{3} \max_{i=1,2,3} X_i, \quad \hat{\theta}_2 = 4 \min_{i=1,2,3} X_i$$

证明他们都是 θ 的无偏估计，并说明谁更有效。

【EX 30】设总体 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ，现在对 μ 进行假设检验。如果在 $\alpha = 0.05$ 下接受原假设 $H_0: \mu = \mu_0$ ，则在 $\alpha = 0.01$ 下是否接受 H_0 ？

【EX 31】对于下面的区间估计问题，快速指出合适的枢轴量和对应的置信区间公式，假设出现的字母参数都是未知的。

- 某工厂生产的灯泡使用寿命 $X \sim N(\mu, 100^2)$ ，求平均寿命 μ 的 $\alpha = 0.05$ 的置信区间
- 随机抽取某种炮弹若干发做实验，测得炮口速度的样本标准差 $s = 11$ ，若炮口速度总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，求炮口速度标准差 σ 的 $\alpha = 0.05$ 的置信区间
- 使用钢球测定引力常数，设测定值总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，测定样本均值 $\bar{x} = 6.678$ ，样本方差 $s^2 = 1.5 \times 10^{-5}$ ，分别求 μ, σ^2 的 $\alpha = 0.01$ 的置信区间
- 两位游戏玩家 A, B 分别独立进行 10 次速通挑战，测得通关时长样本方差 $S_A^2 = 0.5419, S_B^2 = 0.6065$ 。设总体为正态分布，求方差比 $\frac{\sigma_A^2}{\sigma_B^2}$ 的 $\alpha = 0.05$ 的置信区间
- 研究两种火箭固体燃料的燃烧率，设两者都服从正态分布，标准差近似为 0.05，已知 20 份样本的均值为 $\bar{x}_1 = 18, \bar{x}_2 = 24$ ，求燃烧总体均值差 $\mu_1 - \mu_2$ 的 $\alpha = 0.05$ 的置信区间

【EX 31】的答案分别为 U 枢轴量（求均值，方差已知）； χ^2 枢轴量（求标准差，均值未知）； T, χ^2 枢轴量； F 枢轴量（求方差比，均值未知）； U 枢轴量（求均值差，方差已知）

【STAGE 8】假设你说得都对

- 假设检验的概念
 - 小概率原理：概率很小的事件在试验中发生的概率很小
 - 原假设 H_0 和备择假设 H_1
 - 显著性水平 α
 - 接受域 $\bar{W}$ 和拒绝域 W
- 两种错误
 - 第 I 类错误：弃真错误 $\alpha = P(\text{拒绝 } H_0 \mid H_0 \text{ 为真})$
 - 第 II 类错误：存伪错误 $\beta = P(\text{接受 } H_0 \mid H_0 \text{ 为假})$
 - 当样本容量 n 固定时， α 越小则 β 越大。通常固定 α ，增大 n 以减小 β
- 假设检验的一般步骤
 - 提出原假设和备择假设
 - 选取合适的检验枢轴量
 - 确定拒绝域 W
 - 计算检验统计量，判断是否落入 W （落入则拒绝）
- 正态分布参数的假设检验
 - U 检验
 - χ^2 检验
 - T 检验
 - F 检验
- 拒绝域的确定技巧：上分 α 位数
 - 双边检验：下标为 $\frac{\alpha}{2}$
 - 单边检验：下标为 α

表 8.2 正态总体参数显著性检验表

名称	条 件	假设 H_0	拒 绝 域	统 计 量
u 检验	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 已知	$\mu = \mu_0$	$ u \geq u_{\alpha/2}$	$u = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma} \sqrt{n}$
		$\mu \leq \mu_0$	$u \geq u_\alpha$	
		$\mu \geq \mu_0$	$u \leq -u_\alpha$	
t 检验	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ σ^2 未知	$\mu = \mu_0$	$ t \geq t_{\alpha/2}(n-1)$	$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s} \sqrt{n}$
		$\mu \leq \mu_0$	$t \geq t_\alpha(n-1)$	
		$\mu \geq \mu_0$	$t \leq -t_\alpha(n-1)$	
	$X \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ $Y \sim N(\mu_2, \sigma^2)$ σ^2 未知	$\mu_1 = \mu_2$	$ t \geq t_{\alpha/2}(n_1+n_2-2)$	$t = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{S_p \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}}$
		$\mu_1 \leq \mu_2$	$t \geq t_\alpha(n_1+n_2-2)$	
		$\mu_1 \geq \mu_2$	$t \leq -t_\alpha(n_1+n_2-2)$	
χ^2 检验	$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ μ 未知	$\sigma^2 = \sigma_0^2$	$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2(n-1)$ 或 $\chi^2 \geq \chi_{\alpha/2}^2(n-1)$	$\chi^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2}$
		$\sigma^2 \leq \sigma_0^2$	$\chi^2 \geq \chi_\alpha^2(n-1)$	
		$\sigma^2 \geq \sigma_0^2$	$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(n-1)$	
名称	条 件	假设 H_0	拒 绝 域	统 计 量
F 检验	$X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ μ_1, μ_2 未知	$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$	$F \leq F_{1-\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$ 或 $F \geq F_{\alpha/2}(n_1-1, n_2-1)$	$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$
		$\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$	$F \geq F_\alpha(n_1-1, n_2-1)$	
		$\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2$	$F \leq F_{1-\alpha}(n_1-1, n_2-1)$	

例题

【EX 31】假设检验中，设 H_1 为备择假设，基于 H_1 的真假和接受性写出两类错误。

【EX 32】设总体 $X \sim N(\mu, \sigma_0^2)$ ，其中 σ_0^2 已知。检验假设 $H_0: \mu = \mu_0$ ， $H_1: \mu > \mu_0$ ，如果取 H_0 的拒绝域为

$$W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : \bar{X} > c\}$$

其中 $\bar{X}$ 为样本均值，那么对于固定的样本容量 n ，指出 c 和犯第 I 类错误概率 α 的关系式和变化趋势。

【EX 33】对于下列正态总体的假设检验问题，快速指出构造的枢轴量和拒绝域

- 某批矿物中 5 个样品的含矿量数据已知，设测定值总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，在 $\alpha = 0.01$ 下检验假设“含矿量均值为 3.25”
- 某种导线要求电阻标准差不超过 0.005，今在生产的一批导线中取样品 9 根，测得 $s = 0.007$ 。设总体服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$ ，在 $\alpha = 0.05$ 下检验假设“这批导线的标准差显著地偏大”

- 有两个机器生产金属零件，分别取容量为 $n_1 = 60, n_2 = 40$ 的样本测得部件重量的样本方差分别为 $s_1^2 = 15.46, s_2^2 = 9.66$ 。设两样本相互独立，其总体分别服从正态分布且参数未知。在 $\alpha = 0.05$ 下检验假设 $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$
- 语言学家统计了 Mark·Twain 的 8 篇小品文以及 Snodgrass 的 10 篇小品文中由三个字母组成的单词比例。设两组数据独立且均来自正态总体，方差相等但参数均未知。在 $\alpha = 0.05$ 下检验假设“两个作家小品文中，由三个字母组成的单词比例无显著差距”

【EX 33】的答案分别为 T 检验, χ^2 检验, F 检验, T 检验

【STAGE 9】随机的世界有什么不好

知识点

- 随机过程的定义 $\{X(t, \omega), t \in T\} = X_T$
 - 一维分布函数 $F_t(x) = P(X(t) \leq x)$
 - 二维分布函数 $F_{t_1, t_2}(x_1, x_2) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2)$
 - n 维分布函数

$$F_{t_1, t_2, \dots, t_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n)$$

- 随机过程的数字特征
 - 均值函数 $m_X(t)$
 - 方差函数 $D_X(t) = \sigma_X^2(t)$
 - 标准差函数 $\sigma_X(t)$
 - 自相关函数 $R_X(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)]$
 - 自协方差函数 $C_X(t_1, t_2) = Cov(X(t_1), X(t_2))$
 - 互相关函数 $R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)]$
 - 互协方差函数 $C_{XY}(t_1, t_2) = Cov(X(t_1), Y(t_2))$
 - 常用的公式

$$C_X(t_1, t_2) = R_X(t_1, t_2) - m_X(t_1)m_X(t_2), \quad D_X(t) = C_X(t, t) - m_X^2(t)$$

- 随机过程的不相关性和独立性
- 随机过程的分类
 - 二阶矩过程: $\forall t \in T, E[X^2(t)]$ 存在
 - 正态过程: 任意有限维分布都是多维正态分布
 - 正交增量过程: $E(\Delta_1 \Delta_2) = 0$
 - 平稳过程
 - 独立增量过程: 不相交的 $X(t_k) - X(t_{k-1})$ 相互独立
 - 马尔科夫过程: 无后效性
- 计数过程 $N(t)$
 - $N(t)$ 取非负整数
 - $0 \leq s < t$ 时 $N(s) \leq N(t)$
 - $0 \leq s < t$ 时 $N(t) - N(s)$ 表示 $t \in (s, t]$ 内随机事件 A 发生次数
- 泊松过程: 一种特殊的计数过程
 - $N(0) = 0$
 - 独立增量过程

- 对于任意 $s \geq 0, t > 0$ 有

$$P\{N(s+t) - N(s) = k\} = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, \quad a.k.a. \quad N(s+t) - N(s) \sim P(\lambda t)$$

- 泊松过程的性质和应用实例
 - $m_N(t) = D(t) = \lambda t, C_N(s, t) = \lambda \min(s, t), R_N(s, t) = \lambda^2 st$
 - 在任意时间长度为 t 的时间段内, 事件发生次数 $N \sim P(\lambda t)$
 - 总过程中事件 A_i 的发生概率为 p_i , 则类别 i 是参数为 λp_i 的泊松过程
 - 事件发生间隔序列 $\{T_n\}$ 独立同分布, 且 $T_n \sim Exp(\lambda)$
- 布朗运动 $\{W(t), t \geq 0\}$
 - $W(0) = 0$
 - 独立增量过程
 - 增量 $W(t) - W(s) \sim N(0, \sigma^2 |t - s|)$
- 布朗运动的性质
 - $\{W(t), t \geq 0\}$ 是平稳独立增量过程
 - $\{W(t), t \geq 0\}$ 是正态过程
 - $m_W(t) = 0, C_W(s, t) = R_W(s, t) = \sigma^2 \min(s, t)$

例题

【EX 34】设 $X \sim N(0, 1)$, b 是常数, 求随机过程 $X(t) = X \sin bt$ 的一维分布函数。

【EX 35】设随机过程 $X(t) = A \cos(\omega_0 t + \Theta)$, $\omega_0 > 0$, 其中 $A, \Theta \sim U[0, 1]$ 且相互独立, 求 $m_X(t), R_X(s, t)$

【EX 36】假定某天文台观测到的流星流是一个泊松过程, 根据以往资料统计为每小时平均观察到 3 颗流星。求在上午 8 点到 12 点期间, 该天文台没有观察到流星的概率。

【EX 37】在一条马路上红车, 黄车, 绿车分别通过某一路口服从强度为 3, 4, 5 的泊松过程。求

1. 第一辆车到达路口平均时间
2. 第一辆红车通过路口平均时间
3. 求红车第一个通过路口的概率
4. 求相继两辆红车之间有 k 辆车通过的概率

【STAGE 10】平平稳稳 SAY GOODBYE

知识点

- 平稳过程
 - 严平稳过程
 - 宽平稳过程: 设 X_T 是二阶矩过程, 满足条件
 - 对于任意 $t \in T$, 有 $E[X(t)]$ 为常数
 - 对于任意 $t \in T, t + \tau \in T$, 有 $E[X(t)X(t + \tau)]$ 不依赖于 t
 - 宽平稳过程的自相关函数表示为 $R_X(\tau)$
 - 正态过程 X_T 的平稳充要性
- 白噪声序列: 一种特殊的宽平稳过程

- $X(n), n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 互不相关的随机变量序列
- $E[X(n)] = 0, D[X(n)] = \sigma^2$
- 若 $X(n) \sim N(0, \sigma^2)$, 称之为正态白噪声
- 自相关函数的性质
 - $R_X(\tau) \geq 0$
 - $|R_X(\tau)| \leq R_X(0)$
 - $R_X(\tau) = R_X(-\tau)$
 - $R_X(\tau)$ 非负定
- 功率谱密度 $S_X(\omega)$ 和自相关函数 $R_X(\tau)$
 - $R_X(0)$ 表示平稳随机信号的平均功率
 - **构成一对傅里叶变换**

$$S_X(\omega) = \mathcal{F}[R_X(\tau)], \quad R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[S_X(\omega)]$$

傅里叶变换的进一步介绍

什么是傅里叶变换

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上的任意有限区间满足

1. 在区间上连续或只有有限个第一类间断点
2. 只有有限个极值点

那么存在函数 $F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)e^{-i\omega\tau} d\tau$, 并且

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{i\omega t} d\omega$$

称 $f(t)$ 和 $F(\omega)$ 互为**一对傅里叶变换对**, 记作

$$F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)], \quad f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(\omega)]$$

上述两个式子分别称作傅里叶变换和傅里叶逆变换, 他们构成一对傅里叶变换对。

在随机过程中, 傅里叶变换通常应用于求**功率谱密度**。维纳-辛钦定理表明, 当一个平稳过程 $R_X(\tau)$ 满足条件时, 其和功率谱密度 $S_X(\omega)$ 构成一对傅里叶变换对。因此需要学习如何求解一些傅里叶变换。

δ 函数

狄拉克首次定义了一个广义函数 δ 函数, 其满足

1. 当 $t \neq 0$ 时, $\delta(t) = 0$
2. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$

这个函数对于求解傅里叶变换十分有用, 我们介绍两个重要性质。

1. (筛选性质) 若 $f(t)$ 在 $t = t_0$ 处连续, 那么有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) f(t) dt = f(t_0)$$

2. δ 是一个偶函数

根据定义求傅里叶变换

我们来看 δ 函数的傅里叶变换是什么。根据筛选性质有

$$\mathcal{F}[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) e^{-i\omega t} d\tau = e^{-i\omega t} \Big|_{t=0} = 1$$

因此我们得到了一个最常用的傅里叶变换对

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = 1, \quad \mathcal{F}^{-1}[1] = \delta(t)$$

下面来求 $f(t) = 1$ 的傅里叶变换。根据定义有

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} d\tau \\ &= 2\pi \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} d\tau \right] \\ &= 2\pi \mathcal{F}^{-1}[1] \\ &= 2\pi\delta(\omega) \end{aligned}$$

这是一个重要的积分公式，其借助 δ 函数表明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega\tau} d\tau = 2\pi\delta(\omega)$$

【EX 38】求 $f(t) = e^{i\omega_0 t}$ 的傅里叶变换。

解：根据定义有

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\omega_0 - \omega)\tau} d\tau = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

【EX 39】设某平稳过程的自相关函数 $R_X(\tau) = \cos \omega_0 \tau$ ，求该过程的功率谱密度。

解：由于功率谱密度 $S_X(\omega) = \mathcal{F}[R_X(\tau)]$ ，根据定义有

$$\begin{aligned} S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega\tau} \cos \omega_0 \tau d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega_0\tau} + e^{-i\omega_0\tau}}{2} e^{-i\omega\tau} d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} [e^{i(\omega_0 - \omega)\tau} + e^{i(-\omega_0 - \omega)\tau}] d\tau \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(-\omega - \omega_0)] \\ &= \pi [\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)] \end{aligned}$$

【EX 40】设某平稳过程的自相关函数 $R_X(\tau) = e^{-a|\tau|}$ ($a > 0$)，求该过程的功率谱密度。

解：根据定义有

$$\begin{aligned}
 S_X(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|\tau|} e^{-i\omega\tau} d\tau \\
 &= \int_{-\infty}^0 e^{a\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau + \int_0^{\infty} e^{-a\tau} e^{-i\omega\tau} d\tau \\
 &= \left[\frac{e^{(a-i\omega)\tau}}{a-i\omega} \right]_{-\infty}^0 + \left[\frac{e^{-(a+i\omega)\tau}}{-(a+i\omega)} \right]_0^{+\infty} \\
 &= \frac{2a}{a^2 + \omega^2}
 \end{aligned}$$

常见函数的傅里叶变换一般可以通过**查表**得到，如果遇到了有这些函数复合而成的复杂函数，可以利用下面的一些性质方便求解。设 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$, $G(\omega) = \mathcal{F}[g(t)]$, a, b 是两个常数，那么有

1. (线性性质) $\mathcal{F}[af(t) + bg(t)] = aF(\omega) + bG(\omega)$, 逆变换同理
2. (位移性质) 设 t_0, ω_0 是实常数，那么有

$$\mathcal{F}[f(t - t_0)] = e^{-i\omega t_0} F(\omega), \quad \mathcal{F}^{-1}[F(\omega - \omega_0)] = e^{i\omega t_0} f(t)$$

【EX 41】设谱密度 $S_X(\omega) = \sigma^2$ ，求自相关函数 $R_X(\tau)$

解：根据定义有

$$R_X(\tau) = \mathcal{F}^{-1}[\sigma^2] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sigma^2 e^{-i\omega\tau} d\omega = \sigma^2 \delta(\tau)$$

复变函数基础

留数定理是复变函数中的一个重要定理，其可以简化很多反常积分的求解。在本篇，我将简单介绍涉及的复变函数知识，为留数定理的介绍进行铺垫。

一个定义在复数域上的函数 $f(z)$ 具有和实函数 $F(x)$ 相似的性质（极限，导数等都可以类比实函数的定义）。如果 $f(z)$ 在某点 $z = z_0$ 和其邻域上可导，那么称其在 $z = z_0$ 处**解析**。如果 $f(z)$ 在某个区域 D 上处处解析，称其在 D 上是一个**解析函数**。假设下面我们讨论的函数全部在定义域上解析。

洛朗定理表明，如果一个函数 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 上处处解析，那么 $f(z)$ 可以展开为一个无穷级数的形式，即**洛朗级数**

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n$$

其中， C_n 称为洛朗级数系数， C 是该圆环域内的任意一个简单闭曲线，且有

$$C_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2$$

事实上，洛朗级数可以类比实数域上的**幂级数**，其包括了自变量的任意正负次幂项。

下面我们来介绍**奇点**的定义。设 $f(z)$ 在 z_0 不解析，但是在 z_0 的某个去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 上解析，那么称 z_0 是 $f(z)$ 的一个**孤立奇点**。就像实数域函数具有不同类型的间断一样，孤立奇点也可以分为不同的类别。设解析函数 $f(z)$ 在 z_0 的某个去心邻域上的洛朗级数为

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n (z - z_0)^n$$

1. 如果对于任意 $n < 0$ 都有 $C_n = 0$, 那么称 z_0 为 $f(z)$ 的**可去奇点**。 z_0 是 $f(z)$ 可去奇点的充要条件为

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = C_0 \neq \infty$$

2. 如果存在一个正整数 m 使得 $C_{-m} \neq 0$, 且所有的 $n < -m$ 都有 $C_n = 0$, 那么称 z_0 为 $f(z)$ 的 m **阶极点**。特别地, 当 $m = 1$ 时称之为**简单极点**。 z_0 是 $f(z)$ 极点的充要条件为

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$$

3. 如果有无限个 $n < 0$ 都有 $C_n \neq 0$, 那么称 z_0 为 $f(z)$ 的**本性奇点**。

特别地, z_0 是 $f(z)$ 的 m 阶极点的充要条件为

$$f(z) = \frac{1}{(z - z_0)^m} \varphi(z)$$

其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 处解析并且 $\varphi(z_0) \neq 0$ 。根据洛朗级数的定义有

$$C_{-m} = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0)^m \neq 0$$

留数定理

柯西积分定理表明, 当 $f(z)$ 在一个简单闭曲线 C 围成的区域内处处解析时, 有

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

如果上述区域内存在孤立奇点 z_0 , 那么柯西积分定理的条件不成立, 上述积分很可能不再是0。根据洛朗级数系数的表达式有

$$C_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z) dz$$

因此有

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i C_{-1}$$

这表明洛朗级数中的系数 C_{-1} 在求积分 $\oint_C f(z) dz$ 等中有重要的地位。一般的, 假设 z_0 是解析函数 $f(z)$ 的孤立奇点, 称 $f(z)$ 在 z_0 处的**留数**为 $f(z)$ 在 z_0 去心邻域中洛朗展开式的系数 C_{-1} , 记作

$$\text{Res}[f(z), z_0] = C_{-1}$$

我们举一个例子, 函数 $f(z) = ze^{\frac{1}{z}}$ 显然有一个孤立奇点 $z_0 = 0$ 。由于自然指数函数的幂级数展开在复数域仍然成立, 因此其洛朗展开式可以表示为

$$f(z) = z \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z}\right)^n = z + 1 + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!z^2} + \cdots$$

因此 $\text{Res}[f(z), 0] = C_{-1} = \frac{1}{2}$ 。下面介绍留数定理。

设函数 $f(z)$ 在区域 D 内除了有限个孤立奇点 $z_1, z_2, \dots, z_n$ 外处处解析, C 是包围 D 内所有孤立奇点的一条正向简单闭曲线, 那么有

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k]$$

这表明, 一个围道积分可以通过其在闭曲线内部所有孤立奇点的留数求得, 这大大简化了一些围道积分的运算, 甚至可以推广到实数域的反常积分中。

傅里叶变换的留数法

在傅里叶变换中, 我们经常接触形如 $\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} (a > 0)$ 的积分, 下面来介绍如何利用留数定理求解。

注意, 指数中的常数 a 必须大于0。

设 $R(x)$ 是一个**真分式函数** (分子和分母都是多项式, 且分母多项式具有更高的次数)。如果 $R(x)$ 在实数轴上没有奇点, 设 $f(z) = R(x)e^{iax}$ 在复平面的上半部分 (虚部大于0) 有孤立奇点 $z_1, z_2, \dots, z_n$, 根据若尔当引理可以证明

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)e^{iax} = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k], \quad (a > 0)$$

现在的问题在于, 如何求一个函数在某个孤立奇点的留数呢。如果 z_0 是函数 $f(z)$ 的可去奇点, 根据定义有 $\text{Res}[f(z), z_0] = C_{-1} = 0$, 如果 z_0 是函数 $f(z)$ 的本性奇点, 那么一般只能通过洛朗展开式求解系数 C_{-1} 。而对于 m 阶极点而言, 一般有

$$\text{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

特别地, 当 z_0 为一阶极点时, 前面已经提到

$$C_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)(z - z_0) \neq 0$$

【EX 42】求函数 $f(z) = \frac{1}{z(z-2)(z+5)}$ 在各孤立奇点的留数。

解: 设 $z_1 = 0, z_2 = 2, z_3 = -5$, 不难有

$$\lim_{z \rightarrow z_k} f(z) = \infty, \quad (k = 1, 2, 3)$$

因此 z_1, z_2, z_3 都是 $f(z)$ 的极点, 进一步可以得到是一阶极点, 根据上述讨论有

$$\text{Res}[f(z), z_k] = \lim_{z \rightarrow z_k} f(z)(z - z_k)$$

所以有

$$\text{Res}[f(z), z_1] = \lim_{z \rightarrow 0} (z - 0) \cdot \frac{1}{z(z-2)(z+5)} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z-2)(z+5)} = -\frac{1}{10}$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_2] = \lim_{z \rightarrow 2} (z - 2) \cdot \frac{1}{z(z - 2)(z + 5)} = \lim_{z \rightarrow 2} \frac{1}{z(z + 5)} = \frac{1}{14}$$

$$\operatorname{Res}[f(z), z_1] = \lim_{z \rightarrow -5} (z + 5) \cdot \frac{1}{z(z - 2)(z + 5)} = \lim_{z \rightarrow -5} \frac{1}{z(z - 2)} = \frac{1}{35}$$

到这里，我们可以来看两个基于傅里叶变换的留数定理例题。

【EX 43】求 $R(t) = \frac{1}{a^2 + t^2}$ ($a > 0$) 的傅里叶变换

由于 $f(t)$ 是偶函数，因此其傅里叶变换 $F(\omega)$ 也是偶函数。考虑 $\omega < 0$ 并构造函数 $f(z) = \frac{1}{a^2 + z^2} e^{-i\omega z} = \frac{1}{(z + ia)(z - ia)} e^{-i\omega z}$ ，其在上半平面有一阶极点 $z_1 = ia$ ，其留数为

$$\operatorname{Res}[f(z), ia] = \lim_{z \rightarrow ia} (z - ia) \cdot \frac{1}{(z + ia)(z - ia)} e^{-i\omega z} = \frac{e^{\omega a}}{2ai}$$

此时有

$$F(\omega) = \mathcal{F}[R(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = 2\pi i \operatorname{Res}[f(z), z_1] = \frac{\pi}{a} e^{\omega a} = \frac{\pi}{a} e^{-|\omega|a}$$

前面提到 $F(\omega)$ 是一个偶函数，因此 $\omega > 0$ 时也有

$$F(\omega) = \mathcal{F}[R(t)] = \frac{\pi}{a} e^{-|\omega|a}$$

【EX 44】设某随机过程的功率谱密度为 $S_X(\omega) = \frac{\omega^2 + 7}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4} + 4$ ，求自相关函数 $R_X(\tau)$

解：谱密度函数关于 ω 是一个偶函数，类比上例考虑 $\tau > 0$ 的情况。构造函数

$$f(z) = \left(\frac{z^2 + 7}{z^4 + 5z^2 + 4} + 4 \right) e^{i\tau z} = \left(\frac{z^2 + 7}{(z + i)(z - i)(z + 2i)(z - 2i)} + 4 \right) e^{i\tau z}$$

由于常数项 4 不影响留数计算，把 $f(z)$ 中去除 $4e^{i\tau z}$ 项的新函数记为 $g(z)$ 。根据留数定理，有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z) dz = 2\pi i (\operatorname{Res}[g(z), i] + \operatorname{Res}[g(z), 2i]) = 2\pi \left(e^{-\tau} + \frac{1}{4} e^{-2\tau} \right)$$

因此对于任意 $\tau \neq 0$ 有

$$R_X(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) d\omega = e^{-|\tau|} + \frac{1}{4} e^{-2|\tau|}$$

当 $\tau = 0$ 时，根据积分的可加性有

$$R_X(\tau) = e^{-|\tau|} + \frac{1}{4} e^{-2|\tau|} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} 4e^{i\tau\omega} d\omega = e^{-|\tau|} + \frac{1}{4} e^{-2|\tau|} + 4\delta(\tau)$$

$4\delta(\tau)$ 项并不影响 $\tau \neq 0$ 得到的结果，因此自相关函数即为上式。

【STAGE ??】已经...结束了...

祝大家考试顺利 (づー3ー) づ ♡~