第二章主要内容

2.1 随机变量

2.1.1 随机变量与分布函数

2.1.2 离散型随机变量

2.1.3 连续型随机变量

2.2 随机变量的函数及其概率

2.2.1 随机变量函数的概念

2.2.2 离散型随机变量函数的概率分布

2.2.3 连续型随机变量函数的概率分布

第三章 随机向量及概率分布

人工智能学院
周三平
Email: spzhou@xjtu.edu.cn

本章主要内容

3.1 n维随机变量

3.1.1 随机向量的概念

在实际问题中，有些试验的结果需要同时用两个或者两个以上的随机变量来描述。例如：

- 热带风暴中心位置需要用经度和纬度来描述
- 制定服装标准时，需要对上身长、臂长、胸围、下肢长、腰围、臀围多个指标进行测量

对于同一个试验结果的各个随机变量之间，一般存在某种联系，需要把它们当做一个整体来研究。

3.1 n维随机变量

3.1.1 随机向量的概念

定义 设E是随机试验,$\Omega=\{\omega\}$为E的样本空间,而$X_1(\omega)$, $X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega)$是在$\Omega$上的$n$个随机变量,则$n$维向量$(X_1(\omega),X_2(\omega),\cdots,X_n(\omega))$称为 **$n$维随机变量或$n$维随机变量**,简记为$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$.

3.1 n维随机变量

在上述定义中，需要注意三点：

（1）随机向量$\left(X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)\right)$中的每一个分量$X_1(\omega)(1 \leq i \leq n)$是一个一维的随机变量；

（2）随机向量$\left(X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)\right)$是从样本空间$\Omega$到$n$维欧氏空间$R^n$的一个映射：$\omega \in \Omega \vdash \left(X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)\right) \in R^n$；

（3）随机向量的所有分量中包含的ω是同一个ω。

3.1 n维随机变量

举个例子：

如果某个样本空间$\Omega=\{\omega_1, \omega_2\}$，定义的两个随机变量：

$$X(\omega)=\begin{cases}1, \omega=\omega_1,\\0, \omega=\omega_2,\end{cases} \quad Y(\omega)=\begin{cases}1, \omega=\omega_1,\\0, \omega=\omega_2,\end{cases}$$

那么随机向量$\big(X(\omega), Y(\omega)\big)$把样本空间$\Omega$映射成平面上的两个点：$(1,0)$，$(0,1)$，而不是四个点。

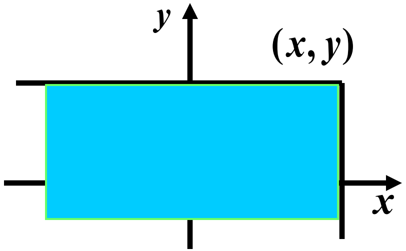
今后不必再强调样本点ω，随机向量$\big(X_1(\omega), X_2(\omega), \cdots, X_n(\omega)\big)$一律简写成量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$

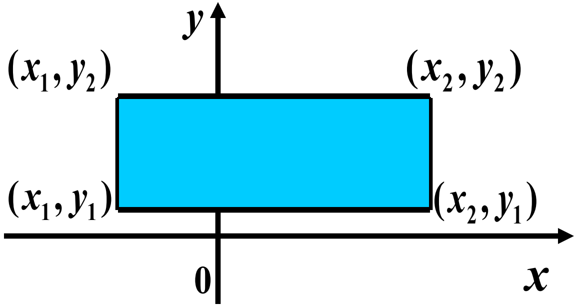
3.1.2 分布函数与边缘分布函数

定义 设(X,Y)是二维随机变量，$\forall x,y\in R$，二元函数

$$F(x,y)=P\{X\le x, Y\le y\}$$

称为(X,Y)的**联合分布函数**，表示事件$\{X\le x\}$和$\{Y\le y\}$同时发生。





设$x_1<x_2, y_1<y_2$，则

$$P\{x_1<X\le x_2, y_1<Y\le y_2\}=F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)$$

联合分布函数的性质

1) $F(x,y)$对每个变元是非降函数；

2) $F(x,y)$对每个变元是右连续的；

证明

3) $F(-\infty,y)=F(x,-\infty)=F(-\infty,-\infty)=0,$

$F(+\infty,+\infty)=1;$

4) 对任意两点$(x_1,y_1),(x_2,y_2),x_1\le x_2,y_1\le y_2$,则

$$F(x_2,y_2)-F(x_2,y_1)-F(x_1,y_2)+F(x_1,y_1)\ge 0$$

问题：满足性质1）、2）和3），一定会满足4）吗？

考察二元函数：

$$G(x,y)=\begin{cases}0, x+y<0\\1, x+y\geq 0\end{cases}$$

从$G(x,y)$定义看出：若用直线$x+y=0$将平面xOy一分为二：

（1）$G(x,y)$在右上半平面$(x+y\geq 0)$取值为1，在左下半平面$(x+y<0)$取值为0，可见它具有非降性、有界性和右连续性；

（2）在正方形区域$\{(x,y): -1\leq x\leq 1, -1\leq y\leq 1\}$ 的四个顶点上，右上三个顶点位于右上半闭平面，只有左下顶点$(-1,-1)$位于左下半开平面，故：

$$G(1,1)-G(1,-1)-G(-1,1)+G(-1,-1)=1-1-1+0=-1<0$$

边缘分布函数

称
$$F_X(x)=\lim_{y\to+\infty}F(x,y)$$
与
$$F_Y(y)=\lim_{x\to+\infty}F(x,y)$$

分别为(X,Y)关于X,Y的边缘分布函数。

联合分布函数唯一确定边缘分布函数，反之不然。

3.1.3 二维离散型随机变量

二维离散型随机变量： (X, Y)的取值是有限对或可列无穷对：

$$(x_i, y_j), i, j = 1,2,\cdots.$$

称

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = p_{ij}, i, j = 1,2,\cdots$$

为 (X, Y) 的**联合分布律**。

联合分布律的性质

1) $0 \le p_{ij} \le 1, i, j = 1,2,\cdots$

2) $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1$

称 $p_{i\cdot} = P\{X = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij}$

与 $p_{\cdot j} = P\{Y = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij}$

分别为(X,Y)关于X、Y的 **边缘分布律。**

联合分布律的表示

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$\cdots$	y_m	$\cdots$	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	$\cdots$	p_{1m}	$\cdots$	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	$\cdots$	p_{2m}	$\cdots$	$p_{2\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\cdots$	p_{nm}	$\cdots$	$p_{n\cdot}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$p_{\cdot j}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	$\cdots$	$p_{\cdot m}$	$\cdots$	1

联合分布律唯一确定边缘分布律，反之不然。

案例1 一袋中有6个大小相同的球，其中2红4白。每次从中任取一球，共取两次，设

$$X=\begin{cases}0, \text{第一次取出红球}, \\ 1, \text{否则},\end{cases} \quad Y=\begin{cases}0, \text{第二次取出红球}, \\ 1, \text{否则},\end{cases}$$

试就有放回取球与无放回取球这两种方式分别写出(X,Y)的联合分布律及关于X, 关于Y的边缘分布律。

解 在有放回取球方式下，由事件的独立性，(X,Y)的联合分布律及边缘分布律为

$$P\{X=0,Y=0\}=\frac{2}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{9}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=\frac{2}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{2}{9}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=\frac{4}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{2}{9}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=\frac{4}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{4}{9}$$

解 在有放回取球方式下，由事件的独立性，(X,Y)的联合分布律及边缘分布律为

$X \backslash Y$ (p_{ij})	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{2}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{2}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

在无放回取球方式下 (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律为

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{X=0\}\times P\{Y=0|X=0\}=\frac{2}{6}\times\frac{1}{5}=\frac{1}{15}$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{X=0\}\times P\{Y=1|X=0\}=\frac{2}{6}\times\frac{4}{5}=\frac{4}{15}$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{X=1\}\times P\{Y=0|X=1\}=\frac{4}{6}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{X=1\}\times P\{Y=1|X=1\}=\frac{4}{6}\times\frac{3}{5}=\frac{6}{15}$$

在无放回取球方式下 (X,Y) 的联合分布律及边缘分布律为

$X \backslash Y$	0	1	$p_{i\cdot}$
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{1}{3}$
1	$\frac{4}{15}$	$\frac{6}{15}$	$\frac{2}{3}$
$p_{\cdot j}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1

3.1.3 二维连续型随机变量

二维连续型随机变量：设$F(x,y)$是二维随机变量(X,Y)的联合分布函数，若存在非负可积函数$f(x,y)$，使 $\forall x, y \in R$，都有

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv$$

称$f(x,y)$为(X,Y)**联合概率密度**，简称**概率密度**

联合概率密度的性质

1) $f(x,y) \geq 0;$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = 1;$

3) 若$f(x,y)$在(x,y)处连续，则 $\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} = f(x,y);$

4) $P\{(X,Y)$落在区域G中$\} = \iint\limits_G f(x,y)dxdy.$

称 $$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

与 $$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx$$

分别为(X,Y)关于X,关于Y的边缘概率密度。

联合概率密度唯一确定了边缘概率密度，反之不然。

案例2 设(X, Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} axy, & 0\le y\le x\le 1, \\ 0, & 其它, \end{cases}$$

（1） 确定a的值；

（2）求X与Y边缘概率密度。

(3) 求$P\{X+Y<1\}$.

解 (1) $1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dxdy = \int_0^1 dx\int_y^1 axydx = \frac{a}{8},\ a=8.$

(2) $f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy = \begin{cases}\int_0^x 8xydy, 0<x<1\\ 0,\quad 其它\end{cases} = \begin{cases}4x^3, 0\le x\le 1,\\ 0,\quad 其它,\end{cases}$

$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dx = \begin{cases}\int_y^1 8xydx, 0\le y\le 1,\\ 0, 其它,\end{cases} = \begin{cases}4y(1-y^2), 0\le y\le 1,\\ 0,\quad 其它,\end{cases}$

(3) $P\{X+Y<1\} = \int_0^{0.5} dy\int_y^{1-y} 8xydx = \frac{1}{6}.$

公式使用的注意点：

$$P\{(X,Y)落在区域G中\}=\iint_G f(x,y)dxdy.$$

- 在具体使用上述公式时，要注意积分范围是$f(x,y)$的非零区域与G的交集部分；然后设法化成累次积分，最后计算出具体结果；
- “直线的面积为零”，故积分区域的边界线是否在积分区域内不影响积分计算的结果。

几种重要的二维随机变量

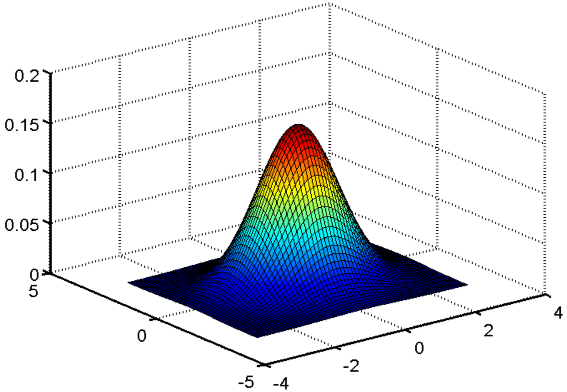
1） **二维正态分布** 若(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\exp\{\frac{-1}{2(1-\rho^2)}(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2})\}$$

其中$\mu_1,\mu_2,\sigma_1,\sigma_2,\rho$为常数,$\sigma_1>0,\sigma_2>0,|\rho|<1,$

记作$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$.

右图是在$\mu_1=0,\sigma_1=1;\mu_2=0,$ $\sigma_2=1;\rho=0$概率密度曲面



令：

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy$$

$$u=\frac{x-\mu_1}{\sigma_1} \qquad v=\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$$

则： $f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}exp\{-\frac{u^2}{2}\}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}dv$

作变量代换$t=\frac{v-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}$，并利用恒等式：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\equiv 1$$

得：
$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}exp\{-\frac{u^2}{2}\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

于是：
$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty}f_1(x)dx$$
$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}}dx$$
$$=1$$

命题 若$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$,

则 $X\sim N(\mu_1,\sigma_1^2)$, $Y\sim N(\mu_2,\sigma_2^2)$.

结论:

（1）二维正态分布的边缘分布仍然是正态分布；

（2）当ρ取不同值时，(X,Y)服从不同的二维正态分布，但是它的两个边缘概率密度却不变。

证明： 令$t=\frac{x-u}{\sigma}$，则上述命题可以转化为：

$$I=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=\sqrt{2\pi}$$

为此，考虑下面的积分：

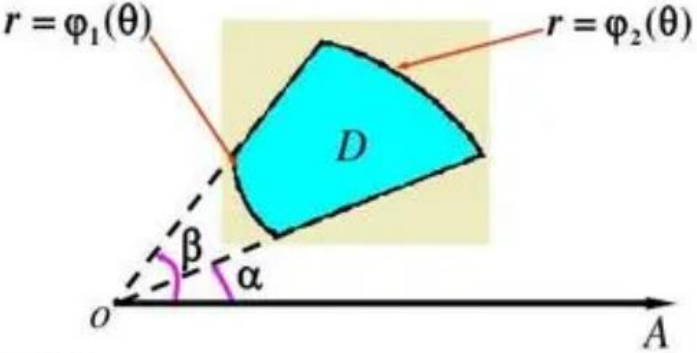
$$I^2=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2}{2}}dt\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{s^2}{2}}ds=\iint_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{t^2+s^2}{2}}dsdt$$

利用极坐标将二重积分转化为二次积分：

区域特征如图

$$\alpha \le \theta \le \beta,$$

$$\varphi_1(\theta) \le r \le \varphi_2(\theta).$$



$$\iint_D f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr d\theta$$

$$= \int_\alpha^\beta d\theta \int_{\varphi_1(\theta)}^{\varphi_2(\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta) r dr.$$

续：转化为极坐标：$s=\rho cos\varphi$，$t=\rho sin\varphi$，**得**

$$\boldsymbol{I}^{2}=\int_{0}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{0}^{+\infty}e^{-\frac{\rho^{2}}{2}}\rho d\rho=2\pi$$

2） **二维均匀分布** 设平面区域G的面积为 A（$A>0$），二维随机变量

(X,Y)在G上服从均匀分布，若其概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{A}, & (x,y)\in G,\\ 0, & (x,y)\notin G.\end{cases}$$

案例3 设平面区域G由曲线$y=\frac{1}{x}$及直线$y=0,x=1,x=e^2$所围成，二维随机向量(X,Y)在G上服从均匀分布，试求：

（1）(X,Y)的概率密度；（2）关于X和Y的边缘概率密度

（3）$P\left\{XY>\frac{1}{3}\right\}$

解：(1)平面区域G的面积：

$$S_G=\iint\limits_G dxdy=\int_1^{e^2}dx\int_0^{\frac{1}{x}}dy=\int_1^{e^2}\frac{1}{x}dx=2$$

因此，(X,Y)的概率密度为：$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2},1\le x\le e^2,0\le y\le\frac{1}{x}\\ \quad 0, \qquad\qquad else\end{cases}$

案例3 设平面区域G由曲线$y=\frac{1}{x}$及直线$y=0, x=1, x=e^2$所围成，二维随机向量(X,Y)在G上服从均匀分布，试求：

（1）(X,Y)的概率密度；（2）关于X和Y的边缘概率密度

（3）$P\left\{XY>\frac{1}{3}\right\}$

解： (2) 关于X的边缘概率密度为：

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)dy=\begin{cases}\int_0^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dy=\frac{1}{2x}, & 1\le x\le e^2\\ 0, & else\end{cases}$$

案例3 设平面区域G由曲线$y=\frac{1}{x}$及直线$y=0,x=1,x=e^2$所围成，二维随机向量(X,Y)在G上服从均匀分布，试求：

（1）(X,Y)的概率密度；（2）关于X和Y的边缘概率密度

（3）$P\left\{XY>\frac{1}{3}\right\}$

解： (2) 关于Y的边缘概率密度为：

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_1^{e^2}\frac{1}{2}dx=\frac{e^2-1}{2}, & 0\le y\le e^{-2}\\ \int_1^{\frac{1}{y}}\frac{1}{2}dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{y}-1\right), & e^{-2}\le y\le 1\\ 0, & else\end{cases}$$

案例3 设平面区域G由曲线$y=\frac{1}{x}$及直线$y=0,x=1,x=e^2$所围成，二维随机向量(X,Y)在G上服从均匀分布，试求：

（1）(X,Y)的概率密度；（2）关于X和Y的边缘概率密度

（3）$P\left\{XY>\frac{1}{3}\right\}$

解： (3) 关于Y的边缘概率密度为：

$$P\left\{XY>\frac{1}{3}\right\}=\iint\limits_{xy>\frac{1}{3}} f(x,y)dxdy=\int_1^{e^2}dx\int_{\frac{1}{3x}}^{\frac{1}{x}}\frac{1}{2}dy=\frac{2}{3}$$

§3.2 条件分布

3.2.1. 条件分布的概念

当同时研究多个随机变量时，变量间的相互影响、相互依赖关系是一个值得关注的问题。人们可以从不同角度来研究这个问题，例如在统计中用回归分析或者相关分析进行研究。条件分布主要研究如下问题：

设$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$为n维随机向量，在已知其中一部分分量值的条件下，问其余分量的条件概率分布是什么？

§3.2 条件分布

3.2.1. 条件分布的概念

设(X,Y)为二维离散型随机向量，其分布律为：

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=p_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots)$$

(X,Y)关于X和Y的边缘分布律分别为：

$$P\{X=x_i\}=p_{i\cdot}=\sum_{i=1}p_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots)$$

$$P\{Y=y_j\}=p_{\cdot j}=\sum_{i=1}p_{ij}\ (i,j=1,2,\cdots)$$

§3.2 条件分布

3.2.1. 条件分布的概念

当$P\{Y=y_j\}>0$时，利用条件概率的计算公式，可知：

$$P\{X=x_i|Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_i\}}{P\{Y=y_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}\ (i=1,2,\cdots)$$

不难发现，上述这组条件概率符合分布的两条性质：

（1）$P\{X=x_i|Y=y_i\}\geq 0\ (i=1,2,\cdots)$

（2）$\sum_{i=1}^{\infty}P\{X=x_i|Y=y_i\}=1$

§3.2 条件分布

3.2.2 二维离散型随机变量的条件分布

设(X,Y)的联合及边缘分布律分别为 $p_{ij}, p_{i\cdot}, p_{\cdot j}, i, j=1,2,\cdots,$

当$p_{\cdot j}=P\{Y=y_j\}>0$时,称

$$P\{X=x_i \mid Y=y_j\}=\frac{P\{X=x_i, Y=y_j\}}{P\{Y=y_j\}}=\frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}, i=1,2,\cdots$$

为在$Y=y_j$ 的条件下**随机变量X的条件分布律**。

同理，当$p_{i\cdot}=P\{X=x_i\}>0$时，称

$$P\{Y=y_j\mid X=x_i\}=\frac{P\{X=x_i,Y=y_j\}}{P\{X=x_i\}}=\frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}\quad ,j=1,2,\cdots$$

为在$X=x_i$ 的条件下**随机变量Y的条件分布律。**

条件分布函数:

给定条件 $Y = y_j (P\{Y = y_j\} > 0)$, X 的条件分布函数为

$$F_{X|Y}(x \mid y_j) \triangleq P\{X \le x \mid Y = y_j\} = \sum_{x_i \le x} \frac{p_{ij}}{p_{\cdot j}}$$

同理

给定条件 $X = x_i (P\{X = x_i\} > 0)$, Y 的条件分布函数为

$$F_{Y|X}(y \mid x_i) \triangleq P\{Y \le y \mid X = x_i\} = \sum_{y_j \le y} \frac{p_{ij}}{p_{i\cdot}}$$

案例4 设 (X, Y) 的联合分布律为 $p_{ij} = 0.25, i, j = 1,2,$

求(1) $P\{Y = 2 \mid X = 1\}$; (2) $F_{Y|X}(Y \le 1.2 \mid X = 1)$.

解 (1) 因为 $p_{1\cdot} = P\{X = 1\} = p_{11} + p_{12} = 0.25 + 0.25 = 0.5 > 0,$

故 $P\{Y = 2 \mid X = 1\} = p_{12} \big/ p_{1\cdot} = \dfrac{0.25}{0.5} = 0.5$

$$(2)\ F_{Y|X}(Y \le 1.2 \mid X = 1) = \sum_{j \le 1.2} \frac{p_{1j}}{p_{1\cdot}} = \frac{0.25}{0.5} = 0.5.$$

案例5 设在一段时间内进入某一商店的顾客人数X服从泊松分布$P(\lambda)$，每位顾客购买某种物品的概率为p，并且各位顾客是否购买该种物品相互独立，求进入商店的顾客购买这种物品的人数Y的分布列。

解 由题意可知：$P(X=m)=\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}, \mathrm{m}=0,1,\cdots$

在进入商店的人数$X=m$的条件下，购买某种商品的人数Y的条件分布为二项分布$B(m,p)$，即

$$P(Y=k|X=m)=\binom{m}{k}p^k(1-p)^{m-k}, \mathrm{k}=0,1,\cdots,m.$$

案例5 设在一段时间内进入某一商店的顾客人数X服从泊松分布$P(\lambda)$，每位顾客购买某种物品的概率为p，并且各位顾客是否购买该种物品相互独立，求进入商店的顾客购买这种物品的人数Y的分布列。

续 由全概率公式：$P(Y=k)=\sum_{m=k}^{\infty}P(X=m)P(Y=k|X=m)$

$$=\sum_{m=k}^{\infty}\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda}\cdot\frac{m!}{k!\,(m-k)!}p^k(1-p)^{m-k}$$

$$=e^{-\lambda}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{\lambda^m}{k!\,(m-k)!}\cdot p^k(1-p)^{m-k}=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}\sum_{m=k}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda]^{m-k}}{k!\,(m-k)!}$$

案例5 设在一段时间内进入某一商店的顾客人数X服从泊松分布$P(\lambda)$，每位顾客购买某种物品的概率为p，并且各位顾客是否购买该种物品相互独立，求进入商店的顾客购买这种物品的人数Y的分布列。

续 因为 $\sum_{m=k}^{\infty}\frac{[(1-p)\lambda]^{m-k}}{k!\,(m-k)!}=e^{\lambda(1-p)}$，所以 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$

$$\text{上式}=e^{-\lambda}\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{\lambda(1-p)}=\frac{(\lambda p)^k}{k!}e^{-\lambda p}$$

即Y服从参数为λp的泊松分布。

知识点：试证明 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=e^x$

证明： $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=s(x)$$

得：$s'(x)=s(x)$，即$s(x)=Ae^x$

又因为：$s(0)=1$，所以$A=1$，即$s(x)=e^x$。

3.2.3 二维连续型随机变量的条件分布

设(X,Y)边缘概率密度分别为$f(x,y)$, $f_X(x)$及$f_Y(y)$,则

$$P\{X \le x | Y = y\} \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0^+} P\{X \le x | y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{P\{X \le x, y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\}}{P\{y-\varepsilon < Y \le y+\varepsilon\}}$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\int_{-\infty}^{x}\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f(u,v)dudv}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{y-\varepsilon}^{y+\varepsilon} f(u,v)dudv}$$

若$f(x,y)$在点(x,y)处连续，则：

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\int_{-\infty}^{x} f(u,\bar{v})du}{\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,\bar{v})du} = \int_{-\infty}^{x} \frac{f(u,y)}{f_Y(y)} du$$

上式就是在给定$Y=y$时X的条件分布函数，即

$$F_{X|Y}(x \mid y) \triangleq P\{X \le x \mid Y = y\} = \int_{-\infty}^{x} f_{X|Y}(u \mid y)du$$

其中

$$f_{X|Y}(x \mid y) \triangleq f(x,y) / f_Y(y)$$

称为在$Y=y$的条件下X的条件概率密度。

类似地，可定义给定$X=x$时Y的条件分布函数为

$$F_{Y|X}(y|x) \triangleq P\{Y \le y | X = x\} = \int_{-\infty}^{y} f_{Y|X}(v|x)dv$$

其中

$$f_{Y|X}(y|x) \triangleq f(x,y)/f_X(x)$$

称为在$X=x$的条件下Y的条件概率密度。

案例6 设二维随机变量 (X, Y) 在单位圆上服从均匀分布, 即

$$f(x, y)=\begin{cases}1/\pi, & \text{当} x^2+y^2 \le 1, \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求条件概率密度 $f_{X|Y}(x \mid y)$.

解 Y的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dx=\begin{cases}\int_{-\sqrt{1-y^2}}^{+\sqrt{1-y^2}}\dfrac{1}{\pi}dx, & |y|\le 1\\ 0, & \text{其他},\end{cases}=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-y^2}, & |y|\le 1\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

故当给定$Y=y(|y|<1)$时，X的条件概率密度为

$$f_{X|Y}(x|y)=\frac{f(x,y)}{f_Y(y)}=\begin{cases}\dfrac{1/\pi}{(2/\pi)\sqrt{1-y^2}}=\dfrac{1}{2\sqrt{1-y^2}}, & |x|<\sqrt{1-y^2}, |y|<1,\\ 0, & \text{其他}。\end{cases}$$

案例6 设(X,Y)服从二维正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，由边缘分布可知$X$服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$， Y服从正态分布$N(\mu_2,\sigma_2^2)$. 现在试求条件分布。

解： $p(x|y)=\dfrac{p(x,y)}{p_Y(y)}$

$$=\frac{\dfrac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\dfrac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\dfrac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}-2\rho\dfrac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2}+\dfrac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right]\right\}}{\dfrac{1}{2\pi\sigma_2}exp\left\{-\dfrac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}}exp\left\{-\frac{1}{2\sigma_1^2(1-\rho^2)}\left[x-\left(\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2)\right)\right]^2\right\}$$

案例6 设(X,Y)服从二维正态分布$N(\mu_1,\mu_2,\sigma_1^2,\sigma_2^2,\rho)$，由边缘分布可知$X$服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$， Y服从正态分布$N(\mu_2,\sigma_2^2)$. 现在试求条件分布。

续： 这是正态密度函数，其均值μ_3和方差σ_3^2分别为：

$$\mu_3=\mu_1+\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-\mu_2) \qquad \sigma_3^2=\sigma_1^2(1-\rho^2)$$

在给定$X=x$的条件下，Y的条件分布仍为正态分布$N(\mu_4,\sigma_4^2)$，其均值方差分别为：

$$\mu_4=\mu_2+\rho\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-\mu_1) \qquad \sigma_4^2=\sigma_2^2(1-\rho^2)$$

二维正太分布的边际分布和条件分布都是一维正太分布

3.3 随机变量的相互独立性

一. 随机变量独立性的定义

在多维随机变量中，各分量取值有时会相互影响，有时会毫无影响。例如：一个人的身高X和体重Y就会相互影响，与收入Z一般没有关系。当两个随机变量取值互不影响时，就称它们相互独立。

定义 设$F(x,y)$及$F_X(x)$、$F_Y(y)$分别是(X,Y)及X,Y的联合分布函数和边缘分布函数，若$\forall x,y\in R$,恒有

$$F(x,y)=F_X(x)F_Y(y)$$

则称X与Y相互独立。

当(X,Y)是二维离散型随机变量时，

X与Y相互独立的$\Leftrightarrow$是：对(X,Y)的所有取值(x_i,y_j)，$i,j=1,2,\cdots$，都有

$$p_{ij}=p_{i\cdot}\cdot p_{\cdot j},\quad i,j=1,2,\cdots$$

当(X,Y)是二维连续随机变量时,

$f(x,y)$及$f_X(x)$、$f_Y(y)$分别是(X,Y)及X,Y的联合与边缘概率密度，则X与Y相互独立的$\Leftrightarrow$是：$\forall x,y\in R$

$$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$$

几乎处处成立。

案例7 设（X, Y）的联合分布律为

X \ Y	0	1
1	1/6	2/6
2	1/6	2/6

判别X与Y是否相互独立?

解：

$$P(X=1)=P(X=1|Y=0)+P(X=1|Y=1)=\frac{1}{2}$$

$$P(X=2)=P(X=2|Y=0)+P(X=2|Y=1)=\frac{1}{2}$$

$$P(Y=0)=P(Y=0|X=1)+P(Y=0|X=2)=\frac{1}{3}$$

$$P(Y=1)=P(Y=1|X=1)+P(Y=1|X=2)=\frac{2}{3}$$

可得：

$$P(X=i,Y=j)=P(X=i)P(Y=j)$$

即：X和Y相互独立。

案例8 设二维正态随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$,

试证：X与Y相互独立的 $\Leftrightarrow$ 是 : $\rho=0.$

证明：充分性

先设$\rho=0$，把$\rho=0$代入联合概率密度$f(x,y)$,有

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2}\exp\{\frac{-1}{2}(\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2}+\frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2})\}=f_X(x)f_Y(y)$$

故X与Y相互独立。

案例8 设二维正态随机变量$(X,Y)\sim N(\mu_1,\sigma_1^2;\mu_2,\sigma_2^2;\rho)$,

试证：X与Y相互独立的$\Leftrightarrow$是$:\rho=0.$

证明：必要性

又设X与Y相互独立，则有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$对一切的x,y

都成立，特别地，取$x=\mu_1, y=\mu_2$,有

$$\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2},$$

从而$\rho=0.$

相互独立的概念可以推广到$n(n>2)$个随机变量的场合。

设n维随机向量$(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的分布函数为：

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=P\{X_1\le x_1,X_2\le x_2,\cdots,X_n\le x_n\}$$

若对任意实数$x_1,x_2,\cdots,x_n$，都有：

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=F(x_1)F(x_2)\cdots F(x_n)$$

则称随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$是相互独立的。

关于独立性的几个重要定理

定理1 设$(X_1,\cdots,X_m)$与$(Y_1,\cdots,Y_n)$相互独立,若h,g是连续函数，则$h(X_1,\cdots,X_m)$与$g(Y_1,\cdots,Y_n)$也相互独立。

定理2 若随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，把它们分为不相交的k个组,每个组中所有变量由一个连续函数复合而生成新的随机而生成新的随机变量,则这k个变量仍相互独立。

3.4 随机向量的函数及其概率分布

3.4.1 随机向量的函数

在上章中，我们讨论了随机变量的函数及其概率分布，而有时需要将高维数据进行压缩或者将维，需要引入如下概念：

定义 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是n维随机向量，$D \subset R^n$是$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$所有可能的集合，

（1）若$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为定义在D上的n元函数，Y为随机变量，当$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$取得可能值$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$时，$Y$相应地取值$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，则称$Y$为随机向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的函数，记作：$Y = g(X_1, X_2, \cdots, X_n)$。

3.4.1 随机向量的函数

定义 设$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$是n维随机向量，$D \subset R^n$是$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$所有可能的集合，

（2）若$g(x_1, x_2, \cdots, x_n)(j = 1, 2, \cdots, k)$为定义在$D$上的$n$元函数，$Y_j(j = 1, 2, \cdots, k)$为随机变量，其中正整数$k \le n$，当$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$取得可能值$(x_1, x_2, \cdots, x_n) \in D$时，$Y_j$相应地取值$g_i(x_1, x_2, \cdots, x_n)(j = 1, 2, \cdots, k)$，则称$(Y_1, Y_2, \cdots, Y_k)$为随机向量$(X_1, X_2, \cdots, X_n)$的向量函数，记作：

$$(Y_1, \cdots, Y_k) = (g_i(X_1, \cdots, X_n), \cdots, g_i(X_1, \cdots, X_n))$$

3.4.2 二维离散型随机变量函数的分布

案例9 设二维随机变量(X, Y)的联合分布律为

X \ Y	0	1	2
-1	0.2	0.3	0.1
2	0.1	0.1	0.2

求 (1) $Z=X+Y$; (2) $Z=XY$;

(3) $Z=max(X,Y)$; (4) $Z=\min(X,Y)$**的分布律.**

解 先将(X,Y)的联合分布律改为逐点取值的形式, 再求出随机变量函数在每一点的值及概率, 进而将随机变量函数取相同值的概率合并，最后得到随机变量函数的分布.

(X,Y)	(-1,0)	(-1,1)	(-1,2)	(2,0)	(2,1)	(2,2)
P	0.2	0.3	0.1	0.1	0.1	0.2
X+Y	-1	0	1	2	3	4
XY	0	-1	-2	0	2	4
max(X,Y)	0	1	2	2	2	2
min(X,Y)	-1	-1	-1	0	1	2

续： 所以可以得到：

X+Y	-1	0	1	2	3	4
P	0.2	0.3	0.1	0.1	0.1	0.2

(X,Y)	-2	-1	0	2	4
P	0.1	0.3	0.3	0.1	0.2

min(X,Y)	-1	0	1	2
P	0.6	0.1	0.1	0.2

max(X,Y)	0	1	2
P	0.2	0.3	0.5

3.4.2 二维离散型随机变量函数的分布

案例10 设二维随机向量(X,Y)的联合分布律为

（X，Y）	（1，-1）	（1,0）	（1,1）	（2,-1）	（2,0）	（2,1）
P	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3

求随机向量(Y^2,XY)的分布律。

解 因为(Y^2, XY)把随机向量(X,Y)的6个可能值映射为：$(0,0)$，$(1,-2)$，$(1,-1)$，$(1,1)$，$(1,2)$，且

$$P\{(Y^2, XY)=(0,0)\}=P\{(X, Y)=(1,0)\cup(X, Y)=(2,0)\}$$
$$=0.1+0.1=0.2$$

$$P\{(Y^2, XY)=(1,-2)\}=P\{(X, Y)=(2,-1)\}=0.1$$

$$P\{(Y^2, XY)=(1,-1)\}=P\{(X, Y)=(1,-1)\}=0.3$$

$$P\{(Y^2, XY)=(1,1)\}=P\{(X, Y)=(1,1)\}=0.1$$

$$P\{(Y^2, XY)=(1,2)\}=P\{(X, Y)=(2,1)\}=0.3$$

续 故(Y^2, XY)的分布律为：

(Y^2, XY)	(1，-1)	(1,0)	(1,1)	(2,-1)	(2,0)	(2,1)
P	0.3	0.1	0.1	0.1	0.1	0.3

确定离散型随机向量的函数的概率分布总体思路：

设法将新随机变量（或随机向量）所表示的事件转化成老随机向量所表示的等价事件

案例11 设随机变量$X \sim P(\lambda_1)$， $Y \sim P(\lambda_2)$，且X与Y相互独立，求$Z = X + Y$的分布律。

解： $Z = X + Y$的取值为所有非负整数0，1，2，⋯，事件$\{Z = k\}$是一组互斥事件$\{X = i, Y = k - i\}$，$i = 0$，1，⋯，k的并。因此，对$k = 0$，1，2，⋯，

$$P\{Z = k\} = \sum_{i=0}^{k} P\{X = i, Y = k - i\} = \sum_{i=0}^{k} P\{X = i\}P\{Y = k - i\}$$

$$= \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i}{i!} e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_2^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda_2} = e^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda_1^i \lambda_2^{k-i}}{i!\,(k-i)!}$$

案例11 设随机变量$X \sim P(\lambda_1)$， $Y \sim P(\lambda_2)$，且X与Y相互独立，求$Z = X + Y$的分布律。

续：

$$P\{Z = k\} = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^k}{k!} e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}$$

即$Z = X + Y$ 服从参数为$\lambda_1 + \lambda_2$的泊松分布。

注意： 上面的结论可以推广到有限个相互独立的泊松分布之和的情形，即

若随机变量X_1，X_2，$\cdots$，X_n相互独立，且$X_i \sim P(\lambda_i)$，$i = 1, 2, \cdots, n$，则$X_1 + X_2 + \cdots + X_n \sim P(\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n)$

3.4.3 二维连续型随机变量函数的分布

问题： 设二维连续型随机向量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，$(U,V)=\big(g_1(X,Y),\ g_2(X,Y)\big)$为$(X,Y)$的向量值函数，如何由$(X,Y)$的概率密度为$f(x,y)$来确定$(U,V)$的分布？

分析: 令$\mathcal{B}=\{(u,v)\in R^2|u=g_1(x,y),v=g_2(x,y),(x,y)\in\mathcal{A}\}$

表示向量值函数$(u,v)=\big(g_1(x,y),g_2(x,y)\big)$的值域。对$\forall B\subset\mathcal{B}$，必有唯一的$A\subset\mathcal{A}$与之对应。于是事件$\{(U,V)\in B\}$等价于$\{(X,Y)\in A\}$为等价事件，即

$$P\big((U,V)\in B\big)=P\big((X,Y)\in A\big)=\iint_A f(x,y)dxdy$$

3.4.3 二维连续型随机变量函数的分布

问题： 设二维连续型随机向量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，$(U,V)=\big(g_1(X,Y),\ g_2(X,Y)\big)$为$(X,Y)$的向量值函数，如何由$(X,Y)$的概率密度为$f(x,y)$来确定$(U,V)$的分布？

分析: 令$x=h_1(u,v), y=h_2(u,v)$，则有

$$\iint_A f(x,y)dxdy=\iint_B f\big(h_1(u,v),h_2(u,v)\big)|J|dudv$$

即：

$$f_{U,V}(u,v)=f\big(h_1(u,v),h_2(u,v)\big)|J|$$

3.4.3 二维连续型随机变量函数的分布

定理3.3 设二维连续型随机向量(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，若$U=g_1(X,Y)$，$V=g_2(X,Y)$是(X,Y)到(U,V)的一一对应变换，即$X=h_1(U,V)$，$Y=h_2(U,V)$，并且g_1，g_2，h_1，h_2都存在连续的一阶偏导数，则(U,V)仍为连续型随机向量，且其概率密度为：

$$f_{U,V}=\begin{cases} f\big(h_1(u,v),h_2(u,v)\big)|J|, & (u,v)\in\mathcal{A} \\ 0, & else \end{cases}$$

其中$\mathcal{A}$为向量值函数$(u,v)=\big(g_1(x,y),g_2(x,y)\big)$的值域。

案例12 设随机变量X与Y相互独立且都服从正态分布$N\left(0,\sigma^2\right)$，令$U=X+Y$， $V=X-Y$, 问：（1）U和V分别服从什么分布？（2） U和V是否相互独立？

解：(1) 由独立性知，(X,Y)的概率密度为：

$$f(x,y)=f_X(x)\,f_Y(y)=\frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x,y<+\infty$$

因$(U,V)=(X+Y,X-Y)$存在唯一的逆变换$(X,Y)=\left(\frac{U+V}{2},\frac{U-V}{2}\right)$

且正、逆变换中所有函数都存在连续的一阶偏导数，又雅可比行列式：

案例12 设随机变量X与Y相互独立且都服从正态分布$N(0,\sigma^2)$，令$U=X+Y$，$V=X-Y$，问：（1）U和V分别服从什么分布？（2）U和V是否相互独立？

续：

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}$$

由定理3.3知：

$$f_{U,V}(u,v)=f\left(\frac{u+v}{2},\frac{u-v}{2}\right)\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{4\pi\sigma^2}e^{-\frac{u^2+v^2}{4\sigma^2}},\quad -\infty<u,v<+\infty$$

案例12 设随机变量X与Y相互独立且都服从正态分布$N\left(0,\sigma^2\right)$，令$U=X+Y$， $V=X-Y$, 问：（1）U和V分别服从什么分布？（2） U和V是否相互独立？

续: 对比二维正太分布的定义，可知$(U,V)\sim N\left(0,0;2\sigma^2,2\sigma^2,0\right)$

于是$U\sim N\left(0,2\sigma^2\right)$，$U\sim V\left(0,2\sigma^2\right)$.

(2) 由$(U,V)\sim N\left(0,0;2\sigma^2,2\sigma^2,0\right)$ 且$\rho=0$知U和V相互独立。

有时我们只需要求二维连续型随机向量(X,Y)的一个函数$g(X,Y)$的概率密度，下面分几种情形来讨论：

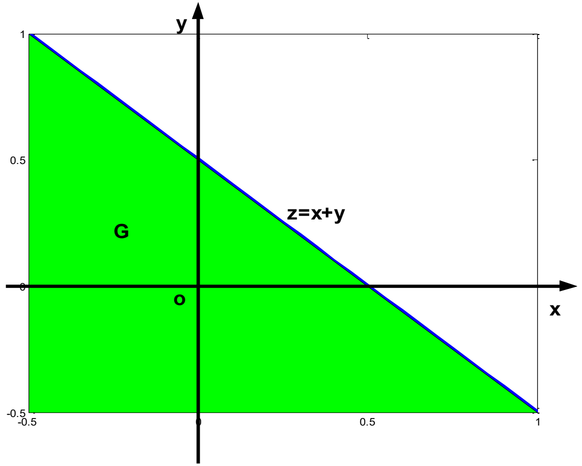
1) Z = X + Y的概率分布

设(X,Y)的概率密度为$f(x,y)$，Z的分布函数为$F_Z(z)$，则有

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{X + Y \le z\}$$

$$= \iint\limits_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z-x} f(x,y)dy\right]dx$$



对内层积分作变量代换，令$t=y+x$,得

$$F_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{z}f(x,t-x)dt\right]dx=\int_{-\infty}^{z}\left[\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t-x)dx\right]dt$$

由概率密度的定义，得Z的概率密度为

$$f_Z(z)=F_Z'(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,z-x)dx$$

由X与Y的对称性，$f_Z(z)$还可以表示为

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y,y)dy$$

当X与Y相互独立时，

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(z-y)f_Y(y)dy$$

上式称为**密度卷积公式**。

案例13 设$X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$, X与Y相互独立,求$Z = X + Y$的概率密度。

解 由卷积公式

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-x)^2}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{z^2}{4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x-\frac{z}{2})^2} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{2}} e^{-\frac{z^2}{4}}$$

即$Z \sim N(0,2)$

从上例可以得出

两个独立的正态随机变量的和仍服从正态分布。

进一步还可得出

有限个独立的正态随机变量的线性组合仍服从正态分布。即

若$X_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2), i=1,2,\cdots,n$，且$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，则

对于任意的实数$a_1, a_2, \cdots, a_n$，及b，有

$$a_1X_1 + a_2X_2 + \cdots + a_nX_n + b \sim N(\sum_{i=1}^{n} a_i\mu_i + b, \sum_{i=1}^{n} a_i^2\sigma_i^2)$$

案例14 设$X\sim U(0,2),Y\sim \exp(\lambda)$,$X$与$Y$相互独立,求$Z=X+Y$的概率密度。

解 由卷积公式

$$f_Z(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)f_Y(z-x)dx=\int_0^2 1/2f_Y(z-x)dx$$

$$\overset{t=z-x}{=}\frac{1}{2}\int_{z-2}^{z}f_Y(t)dt=\begin{cases}0,\ z<0,\\ 1/2\int_0^z 3e^{-3t}dt,\ 0\le z<2,\\ 1/2\int_{z-2}^{z}3e^{-3t}dt,\ z\ge 2,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}0,\ z<0,\\ 1/2(1-e^{-3z}),\ 0\le z<2,\\ 1/2(e^{-3(z-2)}-e^{-3z}),\ z\ge 2.\end{cases}$$

案例15 设$X \sim U(0,2), Y \sim U(0,2)$, X与Y相互独立,求$Z = X + Y$的概率密度。

解 由卷积公式

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_0^2 1/2 f_Y(z-x)dx$$

$$\overset{t=z-x}{=} \frac{1}{2}\int_{z-2}^{z} f_Y(t)dt = \begin{cases} 0, z < 0, \\ 1/2\int_0^z 1/2dt, 0 \le z < 2, \\ 1/2\int_{z-2}^{2} 1/2dt, z \ge 2, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0, z < 0, \\ 0.25z, 0 \le z < 2, \\ 0.25(4-z), z \ge 2. \end{cases}$$

案例15 设$X \sim U(0,2), Y \sim U(0,2)$, X与Y相互独立,求$Z = X + Y$的概率密度。

解 先求$X+Y$的分布函数:

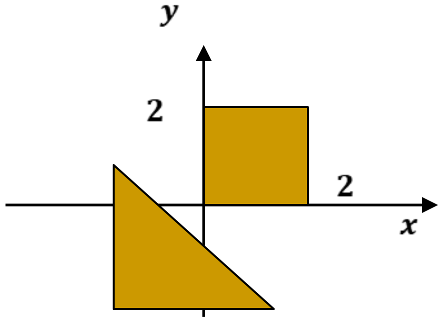
$$F_{X+Y}(z) = P\{X+Y \le z\} = \iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

因被积函数$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2, \\ 0, \quad else \end{cases}$

而积分区域$\{(x,y) \in R^2 | x+y \le z\}$,故需要对集合$\{(x,y) \in R^2 | x+y \le z\}$与$\{(x,y) \in R^2 | 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2\}$的相交情况进行讨论:

案例15 设$X \sim U(0,2), Y \sim U(0,2)$, X与Y相互独立,求$Z = X + Y$的概率密度。

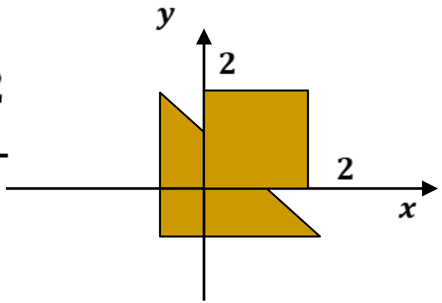
解 当$z < 0$时，两个集合无相交，故：



$$\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy = 0$$

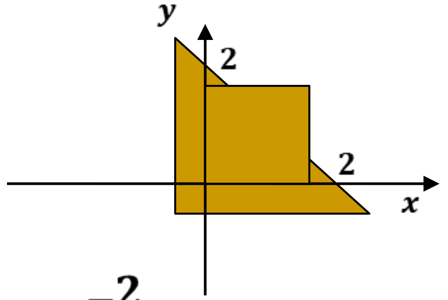
当$0 \le z < 2$时，两个集合有相交，故：

$$\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy = \int_0^z \frac{1}{2}dx\int_0^{z-x}\frac{1}{2}dy = \frac{z^2}{8}$$



当$2\le z < 4$时，两个集合有相交，故：

案例15 设$X\sim U(0,2), Y\sim U(0,2)$, X与Y相互独立,求$Z=X+Y$的概率密度。

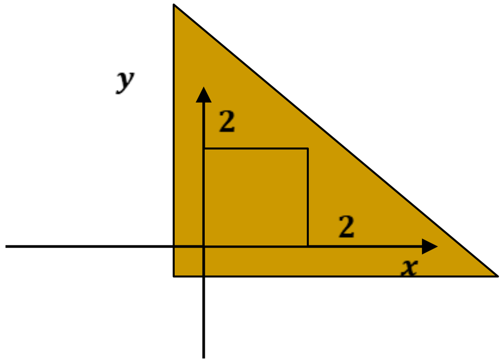


续

$$\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy$$

$$=\int_0^{z-2}\frac{1}{2}dx\int_0^2\frac{1}{2}dy+\int_{z-2}^2\frac{1}{2}dx\int_0^{z-x}\frac{1}{2}dy=-\frac{z^2}{8}+z-1$$

当$z\ge 4$时，两个集合有相交，故：



$$\iint_{x+y\le z} f(x,y)dxdy=1$$

案例15 设$X \sim U(0,2), Y \sim U(0,2)$, X与Y相互独立,求$Z = X + Y$的概率密度。

续

$$F_{X+Y}(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ \dfrac{z^2}{8}, & 0 \le z < 2 \\ -\dfrac{z^2}{8} + z - 1, & 2 \le z < 4 \\ 1, & z \ge 4 \end{cases}$$

略。。。

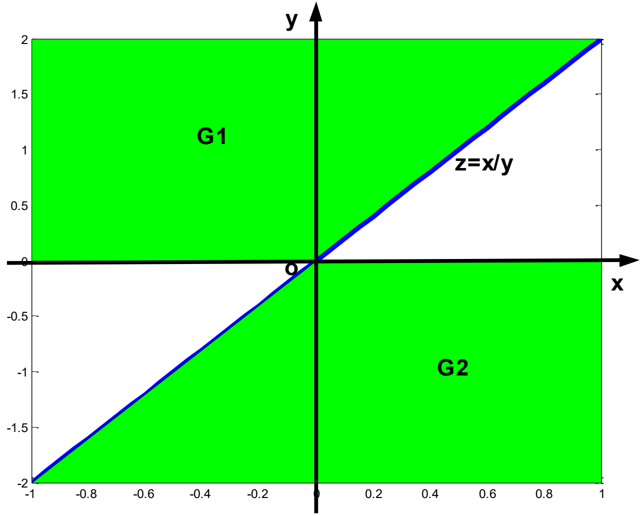
2) $Z=X/Y$ 的概率分布

设 (X,Y) 的联合概率密度为 $f(x,y)$，Z 的分布函数为 $F_Z(z)$，则有

$$F_Z(z)=P\{Z\le z\}=P\{X/Y\le z\}$$

$$=\iint\limits_{x/y\le z} f(x,y)dxdy$$

$$=\iint\limits_{G_1} f(x,y)dxdy+\iint\limits_{G_2} f(x,y)dxdy$$



而

$$\iint\limits_{G_1} f(x,y)dxdy=\int_0^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{zy} f(x,y)dx\Big]dy$$

$$\overset{x=ty}{=}\int_0^{+\infty}\Big[\int_{-\infty}^{z} yf(ty,y)dt\Big]dy=\int_{-\infty}^{z}\Big[\int_0^{+\infty} yf(ty,y)dy\Big]dt$$

类似地

$$\iint\limits_{G_2} f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{0}[\int_{zy}^{+\infty} f(x,y)dx]dy$$

$$\overset{x=ty}{=} \int_{-\infty}^{0}[\int_{z}^{-\infty} yf(ty,y)dt]dy = -\int_{-\infty}^{z}[\int_{-\infty}^{0} yf(ty,y)dy]dt$$

因此

$$F_Z(z) = \int_{-\infty}^{z}[\int_{0}^{+\infty} yf(yt,y)dy - \int_{-\infty}^{0} yf(yt,y)dy]dt$$

$$= \int_{-\infty}^{z}[\int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yt,y)dy]dt$$

故Z的概率密度为

$$f_Z(z) = F_Z'(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f(yz,y)dy$$

当X与Y相互独立时

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |y| f_X(yz) f_Y(y)dy$$

案例16 设$X \sim N(0,1), Y \sim N(0,1)$, X与Y相互独立,求$T = Y/\sqrt{X^2}$的概率密度。

解 令$V = |X|$，则V的概率密度为

$$f_V(v) = \begin{cases} 2/\sqrt{2\pi}e^{-v^2/2}, v > 0, \\ 0, v \le 0, \end{cases}$$

于是 $$f_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} |v| f_Y(vt) f_V(v) dv$$

$$= \int_0^{+\infty} v 1/\sqrt{2\pi}e^{-(vt)^2/2} 2/\sqrt{2\pi}e^{-v^2/2} dv$$

$$= 1/\pi \int_0^{+\infty} v e^{-(1+t^2)v^2/2} dv$$

$$= 1/\pi(1+t^2)$$

3）$\max(X,Y)$与$\min(X,Y)$的分布

设X与Y相互独立，分布函数分别为$F_X(x)$和$F_Y(y)$,记

$M=\max(X,Y), N=\min(X,Y)$,则

$$F_M(z)=P\{\max(X,Y)\le z\}=P\{X\le z,Y\le z\}$$

$$=P\{X\le z\}P\{Y\le z\}=F_X(z)F_Y(z)$$

对分布函数求导可M的概率密度为

$$f_M(z)=F'_M(z)=f_X(z)F_Y(z)+F_X(z)f_Y(z)$$

而 $F_N(z)=P\{\min(X,Y)\le z\}=1-P\{\min(X,Y)>z\}$

$$=1-P\{X>z,Y>z\}=1-(1-P\{X\le z\})(1-P\{Y\le z\})$$

$$=1-(1-F_X(z))(1-F_Y(z))$$

对分布函数求导可得N的概率密度为

$$f_N(z)=F_N'(z)=f_X(z)(1-F_Y(z))+(1-F_X(z))f_Y(z)$$

案例17 设$X_1,X_2,\cdots,X_n$相互独立，都在$[a,b]$上服从均匀分布，求 $M=\max(X_1,X_2,\cdots X_n)$与$N=\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)$的概率密度。

解 由前述公式，有

$$F_M(z)=P\{\max(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le z\}$$
$$=(P\{X_1\le z\})^n$$
$$=\begin{cases}0, & z<a,\\ ((z-a)/(b-a))^n, & a\le z<b,\\ 1, & z>b,\end{cases}$$

故 $$f_M(z)=F_M'(z)=\begin{cases}n(z-a)^{n-1}/(b-a)^n,\\ 0,\ \text{其他}.\end{cases}$$

而 $$F_N(z)=P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)\le z\}$$

$$=1-P\{\min(X_1,X_2,\cdots,X_n)>z\}$$

$$=1-(1-P\{X_1\le z\})^n$$

$$=\begin{cases}0, z<a,\\ 1-((b-z)/(b-a))^n, a\le z<b,\\ 1, z>b,\end{cases}$$

故

$$f_N(z)=F_N'(z)=\begin{cases}n(b-z)^{n-1}/(b-a)^n,\\ 0, \text{其他}.\end{cases}$$

案例18 设随机变量X与Y相互独立，且X服从(0，1)分布：$P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，　Y服从参数为λ的指数分布，求$Z=X+Y$的概率分布。

解　根据全概率公式有：

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= P\{Z \le z\} = P\{X+Y \le z\} \\
&= P\{X=0, X+Y \le z\} + P\{X=1, X+Y \le z\} \\
&= P\{X=0\}P\{Y \le z\} + P\{X=1\}P\{Y \le z-1\} \\
&= \frac{1}{2}F_Y(z) + \frac{1}{2}F_Y(z-1)
\end{aligned}
$$

案例18 设随机变量X与Y相互独立，且X服从(0，1)分布：$P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，$Y$服从参数为$\lambda$的指数分布，求$Z=X+Y$的概率分布。

续 因为$Y\sim Exp(\lambda)$，故Y的分布函数$F_Y(y)=\begin{cases}1-e^{-\lambda y}, & y\geq 0\\ 0, & y<0\end{cases}$

故：

$$F_Z(z)=\begin{cases}1-\frac{1}{2}\left(e^{-\lambda z}+e^{-\lambda(z-1)}\right) & z\geq 1\\ \frac{1}{2}\left(1-e^{-\lambda z}\right), & 0\leq z<1\\ 0, & z<0\end{cases}$$

案例18 设随机变量X与Y相互独立，且X服从(0，1)分布：$P\{X=0\}=P\{X=1\}=\frac{1}{2}$，$Y$服从参数为$\lambda$的指数分布，求$Z=X+Y$的概率分布。

续 显然$F_Z(z)$为连续函数且在点$z=0$与$z=1$之外处处可导，其导数为：

故Z的概率密度为：

$$f_Z(z)=F'_Z(z)=\begin{cases}\frac{1}{2}\lambda\left(e^{-\lambda z}+e^{-\lambda(z-1)}\right) & z>1\\ \frac{1}{2}\lambda e^{-\lambda z}, & 0<z<1\\ 0, & z<0\end{cases}$$

本章主要内容

3.1 n维随机向量

3.2 条件分布

3.3 随机变量的相互独立性

3.4 随机向量的函数及其概率分布

谢谢大家！