# 第一章主要内容

1.1 随机事件及运算

1.2 概率及性质

1.3 古典概型和几何概型

1.4 条件概率 事件的独立性

# 第二章 随机变量及概率分布

人工智能学院
周三平
Email：spzhou@xjtu.edu.cn

# 本章主要内容

## 2.1 随机变量

2.1.1 随机变量与分布函数

2.1.2 离散型随机变量

2.1.3 连续型随机变量

## 2.2 随机变量的函数及其概率

2.2.1 随机变量函数的概念

2.2.2 离散型随机变量函数的概率分布

2.2.3 连续型随机变量函数的概率分布

# §2.1 随机变量

## 2.1.1 随机变量与分布函数

### 一. 随机变量的定义

许多随机实验的结果与数值有关，如

掷一颗骰子，出现的点数；

每天进入某超市的顾客数；

某人每天收到的短信数；

手机的使用寿命；

但是也存在许多随机实验，它们的实验结果与数值无关，如

掷一枚硬币，出现的结果为正面或反面；

检验某一产品的质量，检验的结果为正品或次品；

尽管如此，可人为的将实验结果与实数联系起来，如

$$X=\begin{cases}0,\ \text{出现的结果为正面（正品）}\\1,\ \text{出现的结果为反面（次品）}\end{cases}$$

上述例子中，试验的结果能用一个数量$X$来表示，这个$X$的取值随着试验结果的不同而变化，即它的取值具有随机性，称这样的变量为**随机变量**。随机变量就是试验结果的函数。

**定义** 设$E$为一随机试验，$\Omega$为它的样本空间，若$X = X(\omega)$，$\omega \in \Omega$为单值实函数，且$\forall x \in R$，集合$\{\omega \mid X(\omega) \le x\}$都是随机事件，则称$X$为**随机变量**。

## 随机变量的特点:

随机变量是定义在样本空间上的单值实函数，它的取值是随机的，试验前只知道它的可能取值范围，而不能事先确定它将取哪一个值；试验的每一个结果的出现都有一定的概率,因而随机变量取各个值都有概率，这是随机变量与普通变量的本质区别。

随机变量常用$X,Y,Z$等表示，它的取值常用x,y,z。

$$\{\omega \mid \mathrm{X}(\omega) \le x\} \triangleq \{X \le x\}$$

例如，设$X$表示随机抽取的一个人的年龄， 则$\{\mathrm{X} > 80\}$，

$\{18 < X < 35\}$及$\{X < 12\}$ 就分别表示年龄在80岁以上

的长寿者，年龄在18岁至35岁的年轻人以及不到12岁

的儿童这些随机事件。

随机变量包含更广泛的随机事件，是概率论的研究基础

**案例1:** 设 $A \subset \Omega$ 为一随机事件，令

$$I_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

试证$I_A(\omega)$为随机变量。

**证明：** 对任意实数$x$，因

$$\{\omega | I_A(\omega) \le x\} = \begin{cases} \emptyset, & x < 0 \\ \overline{A}, & 0 \le x < 1 \\ \Omega, & x \ge 1 \end{cases}$$

可见对$x$，$\{\omega | I_A(\omega) \le x\}$都是事件，故$I_A(\omega)$为随机变量。

## 随机变量与普通实函数的区别:

**相同点:** 它们都是一个集合到另外一个集合的映射

**不同点:** （1）普通实函数的定义域是数的集合，而随机变量的定义域不一定是数的集合;

（2）普通实函数不需要做实验便可依据自变量的值确定函数值，而随机变量的取值在做随机试验之前是不确定的。

## 为什么研究随机变量?

对于随机变量$X$，我们不但要看它取哪一些值，而且要看它以多大的概率取那些值。由随机变量的定义可以知道，对于任意一个实数$x$，$\{X \le x\}$都是一个随机事件，因而有一个确定的概率$P\{X \le x\}$与$x$相对应，即$P\{X \le x\}$是$x$的函数。

## 二 分布函数的定义

**定义** 设$X$是一个随机变量，则称函数

$$F(x)=P\{X\le x\},\ x\in(-\infty,+\infty)$$

为随机变量$X$的**分布函数**。

**注** (1) 若将$X$看成数轴上随机点的坐标，则分布函数$F(x)$的值就表示X落在$(-\infty,x]$的概率，因而$0\le F(x)\le 1.$

(2) $\forall a, b \in R$ 且 $\mathrm{a} < b$，$X$ 落在 $(a,b]$ 的概率为

$$P\{a < X \le b\} = P\{X \le b\} - P\{X \le a\} = F(b) - F(a).$$

(3) 分布函数的**双重含义**：首先具有概率含义，它完整描述随机变量的统计规律性； 其次是普通函数，可以用微积分的方法全面研究随机变量。

## 三 分布函数的性质

1) F(x) 是一个非降的函数;

2) F(x)是右连续函数即F(x+0)=F(x); 证明

3) 0≤F(x)≤1且F(-∞)=0 F(+∞)=1。

满足上述性质的实函数$F(x)$一定是某个随机变量$X$的分布函数.

这三个性质是判别某函数是随机变量分布函数的充要条件。

**思考：**为什么引入随机变量和分布函数？

- 随机变量的引入是概率论中一个非常重要的问题，它将一个随机事件用一个随机变量来表示；
- 将一个随机事件的概率用一个分布函数来表示，然后就可以用高等数学的知识研究概率问题。

## 2.1.2 离散型随机变量的定义

**离散型随机变量**：所有可能取值为有限个或可列无穷个。

**定义 （离散随机变量分布律）**设离散型随机变量$X$的所有可能取值为 $x_i, i=1,2,\cdots$，相应的概率为

$$p_i = P\{X = x_i\},\ i=1,2,\cdots$$

则称这组概率为$X$的**分布律或概率函数**。

分布律常表示为

| $X$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $\cdots$ | $x_n$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $p_1$ | $p_2$ | $p_3$ | $\cdots$ | $p_n$ | $\cdots$ |

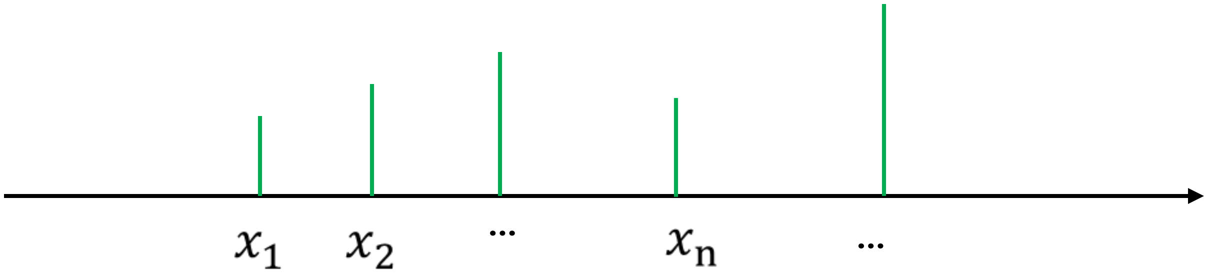
分布律的性质

1）$p_i \geq 0$;　2) $p_1 + p_2 + \cdots = 1.$　　证明

离散型随机变量的分布函数为

$$F(x) = P\{X \leq x\} = \sum_{x_i \leq x} P\{X = x_i\} = \sum_{x_i \leq x} p_i$$

$X$的分布律指出了全部概率1在$X$的可能值的集合$\{x_1, x_2, \cdots\}$上的分布情况，因此$X$的分布律又叫做$X$的概率分布




$X$的分布律可以形象地用上图表示：在横坐标上标出各个值可能的坐标；在每一个坐标点处画一条竖线，其高度表示事件$\{X = x_i\}$发生的概率；所有的竖线高度和应该等于1.

若已知离散型随机变量$X$的分布律 $p_i = P\{\boldsymbol{X} = x_i\}, i = 1,2,\cdots,$

则可以通过下式求得$X$的分布函数：

$$F(x) = P\{\boldsymbol{X} \le x\} = \sum_{x_i \le x} P\{\boldsymbol{X} = x_i\} = \sum_{x_i \le x} p_i$$

若已知离散型随机变量$X$的分布函数$F(x)$,欲求其分布律，可记$\{x_1, x_2, \cdots\}$为$F(x)$的间断点的集合，令$p_i = F(x_i) - F(x_i - 0)$, $x_i \in \{x_1, x_2, \cdots\}$, 则$X$的的分布律为：

$$P\{\boldsymbol{X} = x_i\} = p_i, \quad x_i \in \{x_1, x_2, \cdots\}$$

**案例2**某系统有两台机器相互独立地运行，设第一、第二机器发生故障的概率分别为0.1和0.2，以X表示系统中发生故障的机器数，求$X$的分布律。

**解** 记$A_i$表示第$i$台机器发生故障，$i=1,2$，且$X=0,1,2$，则

$$P\{X=0\}=P(\overline{A_1}\,\overline{A_2})=P(\overline{A_1})P(\overline{A_2})=0.9\times0.8=0.72$$

$$P\{X=1\}=P(A_1\overline{A_2})+P(\overline{A_1}A_2)=0.1\times0.8+0.9\times0.2=0.26$$

$$P\{X=2\}=P(A_1A_2)=0.1\times0.2=0.02$$

故X的分布律为

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.72 | 0.26 | 0.02 |

**案例3** 设离散型随机变量$X$的分布律为

| $X$ | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.2 | 0.4 | 0.4 |

$$F(x)=P\{X\le x\}=\sum_{x_i\le x}P\{X=x_i\}=\sum_{x_i\le x}p_i$$

求$X$的分布函数。

**解**

$$F(x)=P\{X\le x\}=\begin{cases}P\{\phi\}, & x<0,\\ P\{X=0\}, & 0\le x<1,\\ P\{X=0\}+P\{X=1\}, & 1\le x<2,\\ P\{\Omega\}, & x\ge 2\end{cases}=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.2, & 0\le x<1,\\ 0.6, & 1\le x<2,\\ 1, & x\ge 2.\end{cases}$$

## 几种重要的离散型随机变量及其分布律

**1 单点分布** $X$的分布律为$P\{X=a\}=1$

**2 两点分布** $X$的分布律为$P\{X=a_i\}=p^i(1-p)^{1-i},0<p<1,i=0,1$

**特别地**

当$a_0=0,a_1=1$时的两点分布也称为0-1分布，其分布律为

| $X$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| $P$ | $1-p$ | $p$ |

## 3 二项分布

若随机试验只有两种结果：$A$和$\overline{A}$,则称这种试验为贝努力试验.记

$$P(A)=p,P(\overline{A})=1-p=q,0<p<1,p+q=1$$

将贝努力试验在相同的条件下独立重复进行$n$次，称这一串重复独立的试验为$n$重贝努力试验。

## 贝努力试验的分解：

在$n$重贝努力试验中，$X$表示事件$A$发生的次数，则事件$X$可能的取值为：0，1，2，$\cdots$，$n$. 则事件$\{X=k\}$可以分解为如下形式：

$$\{X=k\}=A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n\cup\cdots\cup\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-k}A_{n-k+1}\cdots A_n$$

其发生的概率为

$$P\{X=k\}=P(A_1A_2\cdots A_k\overline{A}_{k+1}\cdots\overline{A}_n)+\cdots+P(\overline{A}_1\overline{A}_2\cdots\overline{A}_{n-k}A_{n-k+1}\cdots A_n)$$

$$=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}$$

**定义（二项分布）** 若随机变量$X$的分布律为

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}, 0<p<1, k=0,1,\cdots,n$$

**则称X服从参数为$n,p$的二项分布，** 记作$X\sim B(n,p)$.

表示在这$n$次试验中事件$A$发生的概率。

显然

$$P\{X=k\}\geq 0,\quad \sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k(1-p)^{n-k}=(p+1-p)^n=1$$

当$n=1$时，二项分布$B(1,p)$就是参数为$p$的0-1分布。

**案例4** 某导弹发射塔发射导弹 的成功率为0.9，求在10次发射中，(1) 至少成功2次的概率；（2）至多成功8次的概率。

**解** 设X为10次发射中成功的次数， 则$X \sim B(10,0.9)$,所以

(1) 至少成功2次的概率为

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X < 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$$
$$= 1 - 0.1^{10} - C_{10}^{1} \times 0.9 \times 0.1^{9} \approx 1$$

（2）至多成功8次的概率为

$$P\{X \leq 8\} = 1 - P\{X > 8\} = 1 - P\{X = 9\} - P\{X = 10\}$$
$$= 1 - C_{10}^{9} 0.9^{9} \times 0.1 - 0.9^{10} = 0.2639$$

**案例5** 设每次射击击中目标的概率为0. 002, 现独立射击1000次，求至少击中目标2次的概率。

**解** 以X表示1000次射击击中目标的次数，则$X \sim B(0.001,1000)$，故所求概率为

$$P\{X \geq 2\} = 1 - P\{X < 2\} = 1 - P\{X = 0\} - P\{X = 1\}$$

$$= 1 - 0.999^{1000} - C_{1000}^{1} 0.001 \times 0.999^{999}$$

$$\approx 0.264$$

**泊松定理** 设随机变量$X_n$服从二项分布$B(n,p_n),n=1,2,\cdots,$

其中$p_n$与$n$有关且满足$\lim\limits_{n\to\infty} np_n=\lambda>0$,则

$$\lim_{n\to\infty} C_n^k p_n^k (1-p_n)^{n-k}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},k=0,1,2,\cdots$$

**证** 令$np_n=\lambda_n$，则$p_n=\lambda_n/n$,而

$$C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{\lambda_n}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{n-k}$$

$$=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{\lambda_n^k}{k!}\left(1-\frac{\lambda_n}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda_n}\cdot\frac{-\lambda_n(n-k)}{n}}$$

$$\to\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\ n\to+\infty.$$

即当$n$很大且$p$较小时，

$$C_n^k p_n^k(1-p_n)^{n-k}\approx\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{k!},\ k=0,1,2,\cdots$$

**续案例5** $\lambda = 1000 \times 0.001 = 1,$ 由泊松近似公式，

$$P\{X=0\} = C_{1000}^{0} p^{0} (1-p)^{1000} \approx e^{-1},$$

$$P\{X=1\} = C_{1000}^{1} p^{1} (1-p)^{999} \approx e^{-1},$$

**案例6** 某工厂生产某种产品300件，生产这种产品的次品率为0.01，求这300件产品中次品数大于5的概率？

**解** 设X是这300件产品中的次品数，则$X \sim B(300,0.01)$，

$\lambda = 300 \times 0.01 = 3$，由泊松定理，所求概率为

$$P\{X > 5\} = \sum_{k=6}^{300} C_{300}^{k} 0.01^{k} \times 0.99^{300-k}$$

$$\approx \sum_{k=6}^{300} \frac{3^{k} e^{-3}}{k!}$$

查泊松分布表得 $P\{X > 5\} \approx 0.083918$

**4 泊松分布** 若X的分布律为

$$P\{X=k\}=\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!},\lambda>0,k=0,1,\cdots$$

则称X服从参数为$\lambda$的泊松分布，记作$X\sim P(\lambda)$

**显然** $P\{X=k\}>0,\ \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=e^{\lambda}\cdot e^{-\lambda}=1$

稀有事件（故障，不幸事件，自然灾害等）在$n$次重复独立试验中出现的次数，一段时间内来到公共设施（汽车站、商店、银行等）要求给以服务的顾客数等都服从或近似服从泊松分布

# 4 泊松分布

- 泊松分布是概率论中重要的分布之一，它是由法国数学家泊松引入；
- 一方面，泊松分布是二项分布的极限分布，在一定的条件下可以用泊松分布作为二项分布的近似；
- 另一方面，有许多随机变量服从或近似服从泊松分布。

**案例7**某商店由过去的销售记录表明，某种商品每月的销售件数可用参数为$\lambda=5$的泊松分布描述，为了以0.999以上的把握保证不脱销，该商店在月底应进多少件这种商品？

**解** 设该商品的销售件数为X，则$X \sim P(5)$,月底应进$n$件，求满足

$$P\{X \le n\} > 0.999$$

的最小的$n$,

即

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{5^k}{k!} e^{-5} > 0.999$$

查泊松分布表得，$n=13.$

# 5 几何分布

**几何分布** 若随机变量$X$的分布律为：

$$P\{X=k\}=(1-p)^{k-1}p,(k=1,2,3,\cdots)$$

其中$0<p<1$为常数，则称$X$服从参数为$p$的几何分布，记为：$X\sim Ge(p)$.

**几何分布**的来源：在伯努利试验的条件下，若设为事件$A$首次发生时所需要的次数，则$\{X=k\}$表示第$k$次试验时事件$A$发生，且前$k-1$次试验时事件$A$都不发生。

# 5 几何分布

**命题** 若$X\sim Ge(p)$, 则$P\{X=k+n|X>k\}=P\{X=n\}, k,n=1,2,3,\cdots$

**证明** $P\{X=k+n|X>k\}=\dfrac{P\{X=k+n,X>k\}}{P\{X>k\}}=\dfrac{P\{X=k+n\}}{P\{X>k\}}$

$$P\{X=k+n\}=(1-p)^{k+n-1}p$$

$$P\{X>k\}=\sum_{i=k+1}^{\infty}(1-p)^{i-1}p=\frac{p(1-p)^k}{1-(1-p)}=(1-p)^k$$

# 5 几何分布

**命题** 若$X \sim Ge(p)$，则$P\{X=k+n|X>k\}=P\{X=n\}, k,n=1,2,3,\cdots$

**续** $P\{X=k+n|X>k\}=\dfrac{p(1-p)^{k+n-1}}{(1-p)^k}=(1-p)^{n-1}p=P\{X=n\}$

几何分布具有的上述性质称为“无记忆性”，可以证明：在可能取值为正整数的离散型分布中只有几何分布具有无记忆性。

## 小结：

**（1）分布函数的性质：** $F(x)=P\{X\le x\},\ x\in(-\infty,+\infty)$

1) $F(x)$ 是一个非降的函数；

2) $F(x)$是右连续函数 即$F(x+0)=F(x)$；

3）$0\leqslant F(x)\leqslant 1$且$F(-\infty)=0$ $F(+\infty)=1$。

**（2）离散型随机变量的概率分布性质：**

1）$p_i\ge 0$;　2) $p_1+p_2+\cdots=1$.

**（3）几种典型的概率分布：**

单点分布　0-1分布　二项分布　泊松分布　几何分布

# 2.1.3 连续型随机变量的定义

## 一. 概率密度的定义

**定义** 设随机变量$X$的分布函数为 $F(x)$, 若存在非负可积可积函数 $f(x)$, 使对于任意实数$x$, 有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt$$

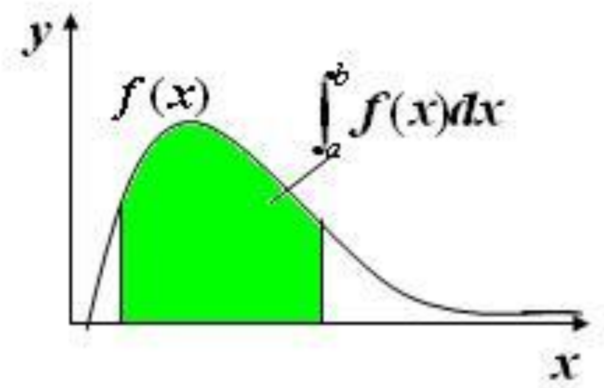
则称$X$为连续型随机变量, 并称$f(x)$为$X$的**概率密度函数,**

简称**概率密度**或**密度函数**。

# 二. 概率密度的性质

1） $f(x) \geq 0, -\infty < x < +\infty$

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$




3) $P\{a < X \leq b\} = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx;$

4) 若$x$为$f(x)$的连续点,则$F'(x) = f(x).$

**命题：** 连续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 必为连续函数。

**证明：** 在$(-\infty,+\infty)$上任取一点$x$, 显然有$x+\Delta x\in(-\infty,+\infty)$

那么：

$$\Delta F=\int_{-\infty}^{x+\Delta x}f(s)ds-\int_{-\infty}^{x}f(s)ds=\int_{x}^{x+\Delta x}f(s)ds$$

因为$f(t)$在$(-\infty,+\infty)$上有界，设$|f(t)|\le M$，$t\in(-\infty,+\infty)$于是：

当$\Delta x>0$时，$|\Delta F|=\left|\int_{x}^{x+\Delta x}f(s)ds\right|\le\int_{x}^{x+\Delta x}|f(s)|ds\le M\Delta x$

当$\Delta x<0$时，$|\Delta F|=\left|\int_{x}^{x+\Delta x}f(s)ds\right|\le\int_{x-\Delta x}^{x}|f(s)|ds\le M|\Delta x|$

**命题：** 连续型随机变量的分布函数 $F(x)$ 必为连续函数。

**续：** 当$\Delta x \to 0$时，有：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta F = 0$$

连续型随机变量的分布函数一定是连续的。

若$X$为连续型随机变量，则对

$$\forall a \in R, P\{X = a\} = 0.$$

$$P\{a < X < b\} = P\{a \le X < b\} = P\{a < X \le b)$$

$$= P\{a \le X \le b\} = \int_a^b f(x)dx$$

**上述结论说明：**

若事件A＝$\phi$，则P(A)＝0；反之,若事件A的概率P(A)＝0，A未必是不可能事件。

**命题：** $X$为连续型随机变量，则 $\forall x \in R, P\{X=x\}=0.$

**证明：** 设$X$的分布函数为$F(x)$, 对于任意$\Delta x > 0$, 由

$$\{X = x\} \subset \{x - \Delta x < X \leq x\}$$

得：

$$0 \leq P\{X = x\} \leq P\{x - \Delta x < X \leq x\}$$
$$= F(x) - F(x - \Delta x)$$

因为$X$为连续型随机变量，其分布函数为$F(x)$为连续型函数，所以：

$$\lim_{\Delta x \to 0} F(x) - F(x - \Delta x) = 0$$

**命题：** $X$为连续型随机变量，则 $\forall x \in R, P\{X=x\}=0.$

**续：** 所以， $0 \le P\{X=x\} \le 0$

即：

$$P\{X=x\}=0$$

**案例1** 设随机变量$X$的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} ax^2, & 0\le x\le 1, \\ 0, & 其它, \end{cases}$$

求（1）$a$的值；

(2) $X$的分布函数；

(3) $P\{-1<X<\frac{1}{2}\}$.

**解** （1）$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^1 ax^2dx=\frac{a}{3},a=3.$

（2）

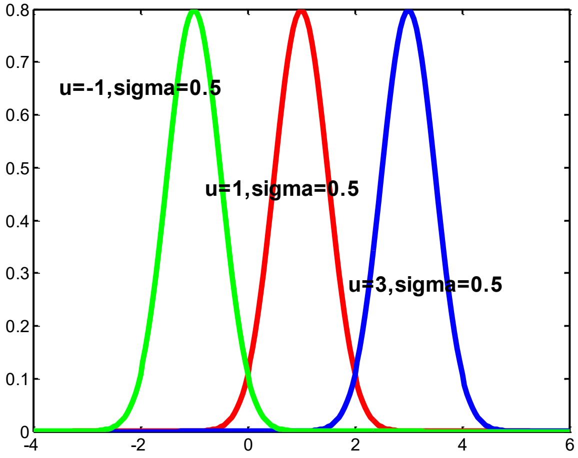
$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0,\ x<0,\\ \int_0^x 3t^2dt,\ 0\le x<1,\\ 1,\ x\ge 1,\end{cases}=\begin{cases}0,\ x<0,\\ x^3,\ 0\le x<1,\\ 1,\ x\ge 1.\end{cases}$$

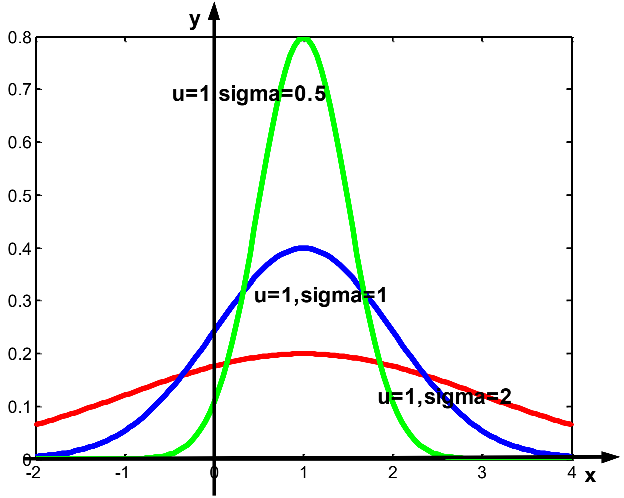
（3）$P\{-1<X<\frac{1}{2}\}=\int_0^{0.5}3t^2dt=\frac{1}{8}.$

1）**正态分布** 若$X$的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},\quad -\infty<x<+\infty$$

其中$\mu$，$\sigma(\sigma>0)$为常数，记作$X\sim N(\mu,\sigma^2)$.



**命题：正态分布概率密度函数满足$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$。**

**证明：令$t = \frac{x-u}{\sigma}$，则上述命题可以转化为：**

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$$

**为此，考虑下面的积分：**

$$I^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s^2}{2}} ds = \iint_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}} dsdt$$

命题：正态分布概率密度函数满足$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$。

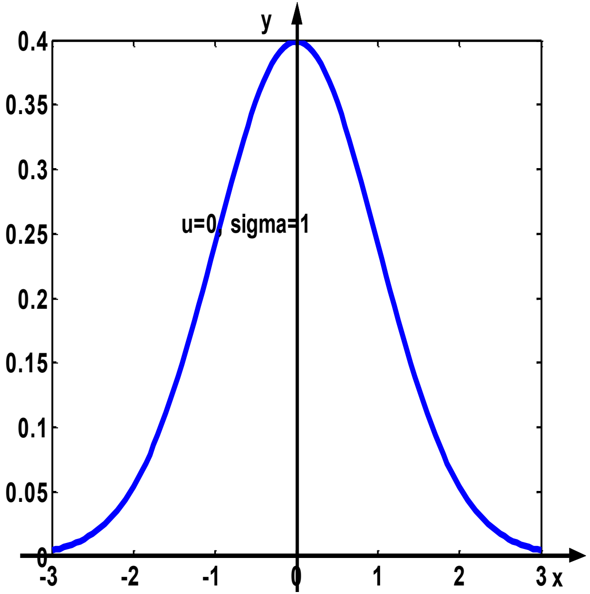
续：转化为极坐标：$s = \rho cos\varphi$，$t = \rho sin\varphi$，得

$$\boldsymbol{I}^2 = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\rho^2}{2}} \rho d\rho = 2\pi$$

当$\mu = 0, \sigma = 1$时，称$X$服从标准正态分布.记作$X \sim N(0,1)$.

若$X \sim N(0,1)$，其概率密度为

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, -\infty < x < +\infty$$




其分布函数$\Phi(x)$满足：

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$$

**命题** 若$X \sim N(\mu,\sigma^2)$,则$Z = \dfrac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$.

**证明：** $Z$的分布函数为

$$F_Z(z) = P\{Z \le z\} = P\{\frac{X-\mu}{\sigma} \le z\}$$

$$= P\{X \le \mu + \sigma z\} = \int_{-\infty}^{\mu+\sigma z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)_2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\overset{x-\mu=\sigma t}{=} \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(z)$$

即 $Z \sim N(0,1)$.

**案例2** 设 $X \sim N(1.4, 4)$，求

(1) $P\{1 < X \le 1.6\}$; (2) $P\{|X - 1.4| > 2\}$; (3) $P\{X > 1.8\}$

**解** $P\{1 < X < 1.6\} = \{\frac{1-1.4}{2} < \frac{X-1.4}{2} < \frac{1.6-1.4}{2}\}$

$$= \Phi(0.1) - \Phi(-0.2) = 0.5398 - (1 - 0.5793)$$

$$= 0.1191$$

同理

$$P\{|X - 1.4| > 2\} = 0.1374$$

$$P\{X > 1.8\} = 0.4207$$

2） **均匀分布** 若$X$的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其它}\end{cases}$$

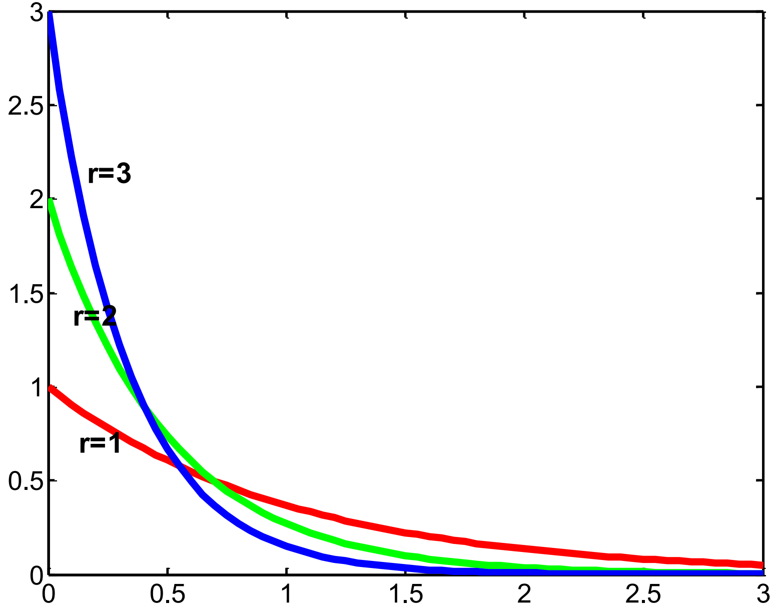
其中$a,b$为常数，记作$X\sim U[a,b]$.

若$X\sim U(a,b)$,则$X$的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x<b,\\ 1, & x\ge b.\end{cases}$$

3） **指数分布** 若$X$的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$




其中参数$\lambda>0$,记作$X\sim \exp(\lambda)$.

若$X\sim \exp(\lambda)$,则$X$的分布函数为

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt=\begin{cases}0, & x\le 0\\ 1-e^{-\lambda x}, & x>0.\end{cases}$$

若$X \sim \exp(\lambda)$,则对任意的实数$s,t>0$,有

$$P\{X>s+t \mid X>s\}=P\{X>t\}$$

证明：$P\{X>s+t \mid X>s\}=\dfrac{P\{X>s+t, X>s\}}{P\{X>s\}}=\dfrac{P\{X>s+t\}}{P\{X>s\}}$

$$=\frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}}=e^{-\lambda t}=P\{X>t\}$$

- 指数分布的上述性质称为**无记忆性**，即其分布和它的先期条件没有关系；
- 指数分布适合研究电子元件的寿命，电话的通话时间，随机服务系统服务时间等模型。

**案例2** 已知某种电子元件的寿命$X$(单位:$h$)服从参数$\lambda=0.01$指数分布,求3个这样元件使用100$h$至少有一个已损坏的概率?

**解** $$P\{X>100\}=\int_{100}^{+\infty}f(x)dx=\int_{100}^{+\infty}0.01e^{-0.01}dx=e^{-1}$$

3个元件使用100$h$都未损坏的概率为$e^{-3}$,从而至少有一个已损坏的概率为$1-e^{-3}$.

# §2.2 随机变量的函数及其概率分布

在数学理论上经常会对变量作变换，当一个随机变量换成另外一个随机变量时，如何由原来的随机变量的概率分布来确定新随机变量的概率分布？

在实际应用中经常会遇到这一类的问题：某些随机变量本身的概率分布很难获得（例如，滚珠的体积），但是和他相关的另外一些随机变量（例如，滚珠的直径）却很容易测量。

# §2.2 随机变量的函数及其概率分布

## 2.2.1 随机变量的函数

**定义** 设$D$是随机变量$X$的一切可能取值的集合，$g(x)$是$D$上的实函数，若$\forall x\in D$,随机变量$Y$的相应的取值为$y=g(x)$，则称Y是$X$的函数，记为$Y=g(X)$.

根据上述定义，如果$X$为随机变量，那么对一个普通的函数$g:D\to R$, 就能保证$g(X)$仍为随机变量。

# 2.2.2 离散型随机变量的函数的概率分布

**案例1** 设离散型随机变量X的分布律为

| $X$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | $0.1$ | $0.3$ | $0.1$ | $0.2$ | $0.3$ |

求 (1) $Y_1 = 2X$的分布律;

(2) $Y_2 = X^2$的分布律.

**解** (1) $Y_1$的可能取值为$-4,-1,0,2,4$，且

$$P\{Y_1=-4\}=P\{2X=-4\}=P\{X=-2\}=0.1$$

故$Y_1$的分布律为

| $Y_1$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $P$ | 0.1 | 0.3 | 0.1 | 0.2 | 0.3 |

(2)　$Y_2$的可能取值为0,1,4，且

$$P\{Y_2=1\}=P\{X^2=1\}=P\{(X=-1)\cup(X=1)\}=0.5$$

故$Y_2$的分布律为

| $Y_2$ | 0 | 1 | 4 |
|---|---|---|---|
| $P$ | 0.1 | 0.5 | 0.4 |

**案例3** 设$X$的分布律为$P\{X_k=k\}=0.5^k,k=1,2,\cdots$,求$Y=\cos(\frac{\pi}{2}X)$的分布律。

**解** $Y$的不同取值为$-1,0,1$，且

$$P\{Y=-1\}=0.5^2+0.5^6+0.5^{10}+\cdots=\frac{4}{15}$$

$$P\{Y=0\}=0.5^1+0.5^3+0.5^5+\cdots=\frac{10}{15}$$

$$P\{Y=1\}=0.5^4+0.5^8+0.5^{12}+\cdots=\frac{1}{15}$$

故$Y$的分布律为

| $Y$ | $-1$ | $0$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $P$ | $\frac{4}{15}$ | $\frac{2}{3}$ | $\frac{1}{15}$ |

# 2.2.3 连续型随机变量的函数的概率分布

**案例3** 设$X$具有概率密度$f_X(x)$，求$Y = kX + b$(其中$k,b$为常数，$k \neq 0$)的概率密度$f_Y(y)$.

**解** 先求$Y$的分布函数

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=\{kX+b\le y\}=\begin{cases}P\{X\le \dfrac{y-b}{k}\}, & k>0,\\ P\{X\ge \dfrac{y-b}{k}\}, & k<0,\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\int_{-\infty}^{y-b/k} f_X(x)dx, & k>0,\\ \int_{y-b/k}^{+\infty} f_X(x)dx, & k<0,\end{cases}$$

故$Y$的概率密度为

$$f_Y(y)=F_Y'(y)=\begin{cases}f_X(\dfrac{y-b}{k})\dfrac{1}{k}, k>0,\\ f_X(\dfrac{y-b}{k})\dfrac{-1}{k}, k<0,\end{cases}=f_X(\frac{y-b}{k})\frac{1}{|k|}.$$

**定理** 设$X$的概率密度为$f_X(x)$,若$g(x)$为$(-\infty,+\infty)$上的可导函数，

且恒有$g'(x)>0$(或$g'(x)<0$)，记$x=h(y)$为$y=g(x)$的反函数，

则$Y=g(X)$为连续型随机变量，其概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases} f_X(h(y))\,|h'(y)|, & y\in g(R), \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

其中$g(R)=\{g(x)\mid x\in R\}$为$g(x)$的值域。

**案例4** 设随机变量$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，令$Y=e^X$，求$Y$的概率密度$f_Y(y)$。

**解** 因$e^x$满足定理中的条件，当$y>0$时，$y=e^x$的反函数为$x=\ln(y)$，所以由上述定理可得：

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}\left|\dfrac{1}{y}\right|, y>0\\ 0, y\le 0\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}y\sigma}e^{-\frac{(\ln y-\mu)^2}{2\sigma^2}}, y>0\\ 0, y\le 0\end{cases}$$

通常称具有上述概率密度的随机变量$Y$服从对数正态分布

**案例5** 设随机变量 $X\sim N(0,1)$，令$Y=X^2$，求$Y$的概率密度$f_Y(y)$。

**解** 因$x^2$在$(-\infty,+\infty)$上不是单调函数，故不能用上述定理进行直接求解。注意到$Y=X^2$ 总取非负值，因此，当$y<0$时，可得$Y$ 的分布函数：

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=P(\emptyset)=0$$

当$y\ge 0$时，

$$F_Y(y)=P\{Y\le y\}=P\{X^2\le y\}=P(-\sqrt{y}\le X\le \sqrt{y})$$

$$=\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)dx=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

**案例5** 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，令$Y=X^2$，求$Y$的概率密度$f_Y(y)$。

**续** 因而，在$y \neq 0$处，$F_Y(y)$为可导函数，其导数为：

$$F_Y'(y)=\begin{cases} f_X(\sqrt{y})\dfrac{1}{2\sqrt{y}}-f_X(-\sqrt{y})\left(-\dfrac{1}{2\sqrt{y}}\right), & y>0 \\ 0, & y<0 \end{cases}$$

$$=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}y^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{y}{2}}, & y>0 \\ 0, & y<0 \end{cases}$$

**案例5** 设随机变量 $X \sim N(0,1)$，令$Y = X^2$，求$Y$的概率密度$f_Y(y)$。

**续** 令

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}, & y > 0 \\ 0, & y < 0 \end{cases}$$

不难验证上述$f_Y(y)$与$F_Y(y)$满足关系$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{y} f_Y(t)dt$，因而$f_Y(y)$即为所求的概率密度。

一般地，求$Y=g(X)$的概率密度的步骤是：

- 求出$Y$的分布函数$F_Y(y)$；
- 求出$F_Y(y)$的导函数$F_Y'(y)$；
- 令$f_Y(y)=F_Y'(y)$，并且在$F_Y(y)$不可导处规定的$f_Y(y)$函数值为零。

**命题：** 若随机变量$X$的分布函数为连续函数且严格单调递增，证明：$Y=F(X)$是服从均匀分布$U(0,1)$的随机变量。

**证明：** 由定义2.1可知：$Y=F(X)$是随机变量，下面考察$Y$的分布函数：$F_Y(\mathrm{y})$.

当$\mathrm{y}<0$时，因为$F(X)\geq 0$，故：

$$F_Y(\mathrm{y})=P\{Y\leq y\}=P\{F(x)\leq y\}=0$$

当$0\leq \mathrm{y}<1$时，因为$F(X)$是严格单调增函数，其必有反函数$F^{-1}(y)$，故：

$$F_Y(\mathrm{y})=P\{Y\leq y\}=P\{F(x)\leq y\}=P\left\{X\leq F^{-1}(y)\right\}$$

$$=F\left\{F^{-1}(y)\right\}=y$$

**命题：** 若随机变量$X$的分布函数为连续函数且严格单调递增，证明：$Y=F(X)$是服从均匀分布$U(0,1)$的随机变量。

**续：** 当$y>1$时，因为$F(X)\leq 1$，故：

$$F_Y(y)=P\{Y\leq y\}=P\{F(x)\leq y\}=1$$

即，

$$F_Y(y)=\begin{cases}0, & y<0\\ y, & 0\leq y<1\\ 1, & y\geq 0\end{cases}$$

因而$Y\sim U(0,1)$.

# 本章主要内容

## 2.1 随机变量

2.1.1 随机变量与分布函数

2.1.2 离散型随机变量

2.1.3 连续型随机变量

## 2.2 随机变量的函数及其概率

2.2.1 随机变量函数的概念

2.2.2 离散型随机变量函数的概率分布

2.2.3 连续型随机变量函数的概率分布

# 谢谢大家！