2024 年《概率统计与随机过程》（智）期中考试解析

俞逸阳, 谢万皓, 陈乐逸, 韩子慕

24 级 AI 学组

April 8, 2025

一. 选择题

1. 对同一目标进行 3 次独立重复射击，假定至少有一次命中目标的概率为 $\frac{7}{8}$，则每次射击命中目标的概率 $p=$ ( )
A. $\frac{7}{24}$ B. $\frac{17}{24}$ C. $\frac{1}{4}$ **D. $\frac{1}{2}$**

解:
选 $\boxed{D}$。
设每次命中目标的概率为 p，
则一次都没命中的概率为:
$$(1-p)^3$$
所以至少命中一次的概率为:
$$1-(1-p)^3=\frac{7}{8}$$
由此解出:
$$p=\frac{1}{2}$$

2. 设随机事件 A，B 满足 $P(A)=P(B)=\frac{1}{2}$ 和 $P(A\cup B)=1$, 则有 ( )
A. $A\cup B=\Omega$ B. $AB=\phi$ **C. $\mathbf{P(\overline{A}\cup\overline{B})=1}$** D. $P(A-B)=0$

解:
选 $\boxed{C}$。
由容斥原理
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$
而由条件知：$P(A)=P(B)=\frac{1}{2},P(A\cup B)=1$, 所以得出：
$$P(A\cap B)=0$$
但由于对于连续随机变量，概率为 0 不一定是空集，概率为 1 也不一定是全集, 故 A、B 不一定成立，不正确。
对于 C，因为
$$P(\overline{A}\cup\overline{B})=P(\overline{\overline{\overline{A}}\cap\overline{\overline{B}}})=P(\overline{A\cap B})=1-P(A\cap B)=1$$
故 C 正确。
对于 D，$P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=\frac{1}{2}$, 故错误。

3. 设随机变量 X 的概率密度函数满足 $f(1-x)=f(1+x)$, 且 $\int_0^2 f(x)dx=0.6$, 则 $P\{X<0\}=$ ( )
A. 0.2 B. 0.3 C. 0.4 D. 0.5

解:
选 $\boxed{A}$。
由 $f(1-x)=f(1+x)$ 知概率密度函数关于 $x=1$ 对称，而 $\int_0^2 f(x)dx=0.6$，故剩余的 0.4 刚好对称分布于 $x<0$ 和 $x>2$ 上, 故:
$$P\{X<0\}=F(0)=\int_{-\infty}^{0}f(x)dx=0.2$$

4. 设 $X\sim N(1,\frac{1}{4}),Y\sim B(3,\frac{1}{3})$, 且 X 和 Y 相互独立，则 $P(XY>X+Y-1)=$( )
A. $\frac{5}{18}$ B. $\frac{7}{18}$ C. $\frac{5}{12}$ D. $\frac{7}{12}$

解:
选 $\boxed{A}$。
$P(XY > X + Y - 1) = P((X-1)(Y-1) > 0)$
$= P\{(X-1>0) \cap (Y-1>0)\} + P\{(X-1<0) \cap (Y-1<0)\}$
又因为 X，Y 相互独立，所以上式 =

$$P(X-1>0) \times P(Y-1>0) + P(X-1<0) \times P(Y-1<0)$$

而 $X \sim N(1, \frac{1}{4})$, 由正态分布的对称性知

$$P(X-1>0) = P(X-1<0) = \frac{1}{2}$$

$Y \sim B(3, \frac{1}{3})$，故

$$P(Y-1>0) = P(Y=2) + P(Y=3) = 3 \times (\frac{1}{3})^2 \times \frac{2}{3} + (\frac{1}{3})^3 = \frac{7}{27}$$

$$P(Y-1<0) = P(Y=0) = (\frac{2}{3})^3 = \frac{8}{27}$$

所以

$$P(XY > X+Y-1) = \frac{1}{2} \times (\frac{8}{27} + \frac{7}{27}) = \frac{5}{18}$$

5. 设二维随机向量 (X, Y) 的分布函数为 $F(X, Y)$, 其边缘分布函数为 $F_X(x), F_Y(y)$，则 $P\{X > 1, Y > 1\} =$( )
A. $1 - F(1,1)$ B. $1 - F_X(1) - F_Y(1)$
C. $\mathbf{1 - F_X(1) - F_Y(1) + F(1,1)}$ D. $1 + F_X(1) + F_Y(1) + F(1,1)$

解:
选 $\boxed{C}$。
由容斥原理变形得:

$$\begin{aligned}
P\{X>1, Y>1\} &= -P\{(X>1) \cup (Y>1)\} + P\{X>1\} + P\{Y>1\} \\
&= -(1 - P\{(X \le 1) \cap (Y \le 1)\}) + (1 - P\{X \le 1\}) + (1 - P\{Y \le 1\}) \\
&= -(1 - F(1,1)) + (1 - F_X(1)) + (1 - F_Y(1)) \\
&= 1 - F_X(1) - F_Y(1) + F(1,1)
\end{aligned}$$

二. 填空题

1. 袋中有 2 黑球 3 白球，无放回地取出两球，则取出一黑一白的概率为 ______。

解:
情况可分为两种：第一次取出白球第二次取出黑球 或 第一次取出黑球第二次取出白球，将上述事件的概率分别记为 p_1, p_2，分别计算概率:

$$p_1 = \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{10},\ p_2 = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{10}$$

所以取出一黑一白的概率为

$$p = p_1 + p_2 = \boxed{\frac{3}{5}}$$

2. 独立地掷三个骰子，则第一个和第二个的和等于第三个的概率为______。

解：
三个骰子的总结果数为：
$$6 \times 6 \times 6 = 216$$
要求满足 $A + B = C$，其中 C 的可能取值为 $\{2, 3, 4, 5, 6\}$。总有效组合数为：
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$
最终概率为：
$$P(A + B = C) = \frac{15}{216} = \boxed{\frac{5}{72}}$$

3. 设 $X \sim P(10)$，$Y \sim B(100, 0.5)$，$Z \sim N(1, 4)$ 且相互独立，则 $D(3X - 2Y + 5Z - 10)$ 为______。

解：
根据方差性质：
$$D(3X - 2Y + 5Z - 10) = 3^2 D(X) + (-2)^2 D(Y) + 5^2 D(Z)$$
其中：
$$D(X) = 10, \quad D(Y) = 25, \quad D(Z) = 4$$
代入计算：
$$9 \times 10 + 4 \times 25 + 25 \times 4 = 90 + 100 + 100 = \boxed{290}$$

4. 随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从区间 $[1, 3]$ 上的均匀分布，令 $U = \max\{X, Y\}, V = \min\{X, Y\}$，则 (U, V) 的概率密度 $f_{U,V}(U, V) =$ (__)

解：
已知随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从区间 $[1, 3]$ 上的均匀分布，因此它们的概率密度函数为：
$$f_X(x) = f_Y(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 1 \le x \le 3, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$
因为 X 和 Y 相互独立，所以其联合概率密度为：
$$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 1 \le x \le 3, 1 \le y \le 3, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$
现在我们求 (U, V) 的联合分布 $f_{U,V}(u, v)$。根据 $U = \max\{X, Y\}$，$V = \min\{X, Y\}$，我们有：
$$f_{U,V}(u, v) = P\left(\max\{X, Y\} \le u, \min\{X, Y\} \le v\right) = P\left(X \le u, Y \le u, X \ge v, Y \ge v\right), U > V$$
分情况讨论：
1. $u > v$, 且 $1 \le v \le u \le 3$:
$$F_{U,V}(u, v) = \frac{1}{4}\left[(u - 1)^2 - (u - v)^2\right], \quad 1 \le v \le u \le 3$$

2. $u > 3 > v > 1$:

$$F_{U,V}(u,v) = \frac{1}{4}\left[(2-(3-v))^2\right],$$

3. $v < 1$:

$$F_{U,V}(u,v) = 0, \quad v < 1$$

对 u 和 v 进行偏导数得到联合概率密度函数 $f_{U,V}(u,v)$:

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}F_{U,V}(u,v)$$

对于不同的情况，我们分开求导。
当 $1 \le v \le u \le 3$ 时:

$$f_{U,V}(u,v) = \frac{\partial^2}{\partial u\,\partial v}\left(\frac{1}{4}\left[(u-1)^2-(u-v)^2\right]\right)$$

计算结果为:

$$f_{U,V}(u,v) = \boxed{\begin{cases}\frac{1}{2}, & 1 \le v \le u \le 3,\\ 0, & \text{其他情况}.\end{cases}}$$

5. 设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $G = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\}$ 上服从均匀分布，定义 $U = |X+Y|$ 和 $V = |X-Y|$。求联合分布函数 $F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ 的值______。

解:
(X,Y) 的联合概率密度函数为:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases}1 & \text{当}0 \le x \le 1 \text{ 且}0 \le y \le 1,\\ 0 & \text{其他情况}.\end{cases}$$

由于 $X,Y \ge 0$，有 $U = |X+Y|$ 和 $V = |X-Y|$。$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = P\left(U \le \frac{1}{2}, V \le \frac{1}{2}\right)$，即区域面积满足:

$$X+Y \le \frac{1}{2} \quad \text{且} \quad |X-Y| \le \frac{1}{2}.$$

在 $X+Y \le \frac{1}{2}$ 的区域内，X 和 Y 的最大绝对差为 $\frac{1}{2}$（例如当 $X = \frac{1}{2}, Y = 0$ 或 $X = 0, Y = \frac{1}{2}$ 时）。因此，满足 $X+Y \le \frac{1}{2}$ 的点必然满足 $|X-Y| \le \frac{1}{2}$。区域 $X+Y \le \frac{1}{2}$ 是顶点为 $(0,0)$, $(0,\frac{1}{2})$, $(\frac{1}{2},0)$ 的等腰直角三角形，面积为:

$$\text{面积} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{8}.$$

因此，联合分布函数值为:

$$F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right) = \boxed{\frac{1}{8}}.$$

三. 解答题

1. 证明：已知 $P(A) + P(B) = 1$，试证明 $P(A \cap B) = P(A^c \cap B^c)$

解:

$$
\begin{aligned}
P(A^c \cap B^c) &= P((A \cup B)^c) && \text{（德摩根定律）} \\
&= 1 - P(A \cup B) && \text{（补集概率公式）} \\
&= 1 - [P(A) + P(B) - P(A \cap B)] && \text{（概率加法公式）} \\
&= 1 - [1 - P(A \cap B)] && \text{（因 } P(A)+P(B)=1\text{）} \\
&= P(A \cap B) && \text{（化简）}
\end{aligned}
$$

2. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且服从同一参数为 λ 的泊松分布，求随机变量 $Z = X + Y$ 的分布律。

解:

$$
\begin{aligned}
P(Z = k) &= P(X + Y = k) \\
&= \sum_{i=0}^{k} P(X = i) P(Y = k - i) \quad \text{（独立性下卷积公式）} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \left(\frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda} \right) \left(\frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda} \right) \quad \text{（泊松分布概率代入）} \\
&= e^{-2\lambda} \sum_{i=0}^{k} \frac{\lambda^i \lambda^{k-i}}{i!(k-i)!} \quad \text{（合并指数项与常数因子）} \\
&= \frac{e^{-2\lambda} \lambda^k}{k!} \sum_{i=0}^{k} \frac{k!}{i!(k-i)!} \quad \text{（提取公共因子 } \frac{\lambda^k}{k!}\text{）} \\
&= \frac{e^{-2\lambda} \lambda^k}{k!} \cdot 2^k \quad \text{（二项式系数和 } \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} = 2^k\text{）} \\
&= \boxed{\frac{(2\lambda)^k}{k!} e^{-2\lambda}} \quad \text{（化简为泊松分布形式）}.
\end{aligned}
$$

3. 设随机变量 X 的密度函数为

$$
\begin{cases} A \cos x, & |x| \le \frac{\pi}{2} \\ 0, & |x| > \frac{\pi}{2} \end{cases}
$$

试求：（1）系数 A；（2）X 落在区间 $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ 的概率。

解:

（1）由概率密度函数在区间 $(-\infty, +\infty)$ 积分为 1，得：

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} A \cos x dx = 1
$$

积分得：

$$
A \sin x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2A = 1
$$

因此：

$$
\boxed{A = \frac{1}{2}}
$$

（2）

$$
P\left\{ -\frac{\pi}{4} \le X \le \frac{\pi}{4} \right\} = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2} \cos x dx = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}
$$

4. 若现在有三个炮台，每个炮台命中率分别为 0.7，0.6，0.5，现 3 门炮台各独立发射一枚炮弹：
（1）求命中目标的概率：
（2）若恰有两门炮台命中目标，求第一门炮台命中目标的概率。

解：
设事件 A,B,C 分别表示三个炮台命中的事件。由题意 A,B,C 相互独立。
（1）
“命中目标”等价于“至少有一个炮台命中目标”，即 $A \cup B \cup C$。该事件的补为“没有一个炮台命中目标”，即 $\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$。

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= 1 - P(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}) \\ &= 1 - P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C}) \\ &= 1 - [1 - P(A)][1 - P(B)][1 - P(C)] \\ &= 1 - (1 - 0.7)(1 - 0.6)(1 - 0.5) \\ &= \boxed{0.94} \end{aligned}$$

（2）
设事件 G 表示两门炮台命中的概率，则题目即为求条件概率 $P(A|G)$。且 $G = \overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup AB\overline{C}, AG = A\overline{B}C \cup AB\overline{C}$。
由右端各事件的互斥性和 A,B,C 之间的独立性得：

$$\begin{aligned} P(G) &= P(\overline{A}BC \cup A\overline{B}C \cup AB\overline{C}) \\ &= P(\overline{A}BC) + P(A\overline{B}C) + P(AB\overline{C}) \\ &= P(\overline{A})P(B)P(C) + P(A)P(\overline{B})P(C) + P(A)P(B)P(\overline{C}) \\ &= 0.3 \times 0.6 \times 0.5 + 0.7 \times 0.4 \times 0.5 + 0.7 \times 0.6 \times 0.5 \\ &= 0.44 \\ P(AG) &= P(A\overline{B}C \cup AB\overline{C}) \\ &= P(A\overline{B}C) + P(AB\overline{C}) \\ &= P(A)P(\overline{B})P(C) + P(A)P(B)P(\overline{C}) \\ &= 0.7 \times 0.4 \times 0.5 + 0.7 \times 0.6 \times 0.5 \\ &= 0.35 \end{aligned}$$

由条件概率的定义：

$$P(A|G) = \frac{P(AG)}{P(G)} = \frac{0.35}{0.44} = \boxed{0.795}$$

5. 设二维随机变量 (X, Y) 的概率密度函数为

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} e^{-\sqrt{x^2+y^2}} & , x > 0, y > 0 \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

令 $\begin{cases} U = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ V = \arctan \frac{Y}{X} \end{cases}$
（1）求 $P\{U \leq 1, V \leq \frac{\pi}{4}\}$；
（2）求 (U, V) 的密度函数 $f_{U,V}(u, v)$；
(3) 分别求 (U, V) 的边缘密度函数 $f_U(u)$ 和 $f_V(v)$ 并判断 U 和 V 是否独立，并说明理由。

解：
显然，题设中的变换是极坐标变换的逆变换，因此 $\begin{cases} X = U \cos V \\ Y = U \sin V \end{cases}$，那么

（1）

$$
\begin{aligned}
P(U \le 1, V \le \frac{\pi}{4}) &= \iint_G \frac{2}{\pi} e^{-u} u du \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{4}} dv \int_0^1 \frac{2}{\pi} e^{-u} u du \\
&= \boxed{\frac{1}{2} - \frac{1}{e}}
\end{aligned}
$$

（2）（莫名其妙的的题）

$$J = \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| = u$$

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(u\cos v, u\sin v)|J| = \boxed{\frac{2}{\pi} u e^{-u}}$$

（3）求边缘密度函数即对另一个变量积分。

$$
\begin{aligned}
f_U(u) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{\pi} u e^{-u} dv \\
&= u e^{-u} \\
f_V(v) &= \int_0^{+\infty} \frac{2}{\pi} u e^{-u} du \\
&= \frac{2}{\pi}(-ue^{-u} - e^{-u})\Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{2}{\pi}
\end{aligned}
$$

则 $\boxed{f_{U,V}(u,v) = f_U(u) f_V(v), \text{说明}U\text{和}V\text{独立}}$

6. 两个独立随机变量 X,Y 均服从 $[1,2]$ 区间上的均匀分布
（1）求 $U = e^X$ 的概率密度函数。
（2）求 $V = 2X/Y$ 的概率密度函数。

解：

（1）X 的概率密度函数为 $f_X(x) = \begin{cases} 1 & ,1 \le x \le 2 \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$。

$$F_U(u) = P\{U \le u\} = P\{e^X \le u\} = P\{X \le \ln u\} = \int_{-\infty}^{\ln u} f_X(x) dx$$

那么概率密度函数为：

$$f_U(u) = F'_U(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u} \int_{-\infty}^{\ln u} f_X(x) dx = \boxed{\begin{cases} \frac{1}{u} & ,e \le u < e^2 \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}}$$

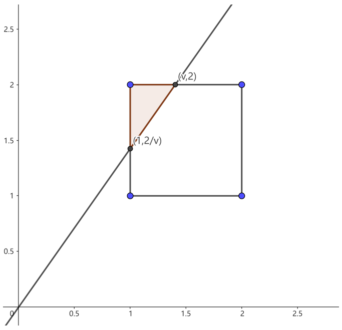
（2）X,Y 独立且均服从 $[1,2]$ 区间上的均匀分布，所以 X,Y 的联合密度函数为

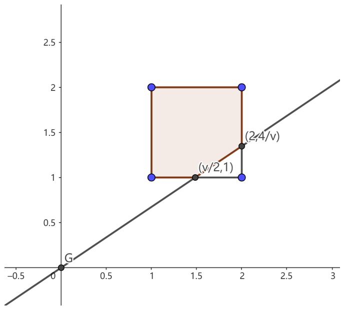
$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1 & ,1 \le x \le 2, 1 \le y \le 2 \\ 0 & ,\text{其他} \end{cases}$$

由题设得：

$$F_V(v) = P\{V \le v\} = P\{2X/Y \le v\} = P\{X/Y \le v/2\} = \iint_{X/Y \le v/2} f(x,y) d\sigma$$

这个积分等价于计算直线 $y=\frac{2}{v}x$ 上方与区间的重合面积，画图计算得（这里仅给出第二、三种情况的图）:





$$F_V(v)=\begin{cases}0 & ,v<1\\ \frac{1}{2}\left(2-\frac{2}{v}\right)(v-1) & ,1\le v<2\\ 1-\frac{1}{2}\left(2-\frac{2}{v}\right)\left(\frac{4}{v}-1\right) & ,2\le v<4\\ 1 & ,v\ge 4\end{cases}$$

对 $F_V(v)$ 求导得:

$$\boxed{f_V(v)=\begin{cases}1-\frac{1}{v^2} & ,1\le v<2\\ \frac{4}{v^2}-\frac{1}{4} & ,2\le v<4\\ 0 & ,\text{其他}\end{cases}}$$

7. 已知正常男性成人血液中，每一毫升白细胞数平均是 7300，均方差（即标准差）是 700，利用切比雪夫不等式估计每毫升含白细胞数在 5200 ~ 9400 之间的概率 p。

解:

设 X 为代表白细胞数的随机变量，则 $E(X)=7300, D(X)=700^2$，$5200<X<9400$ 等价于 $|X-7300|<2100$。

由切比雪夫不等式:

$$\begin{aligned}P\{|X-7300|<2100\}&=1-P\{|X-7300|\ge 2100\}\\ &\ge 1-\frac{700^2}{2100^2}=\boxed{\frac{8}{9}}\end{aligned}$$